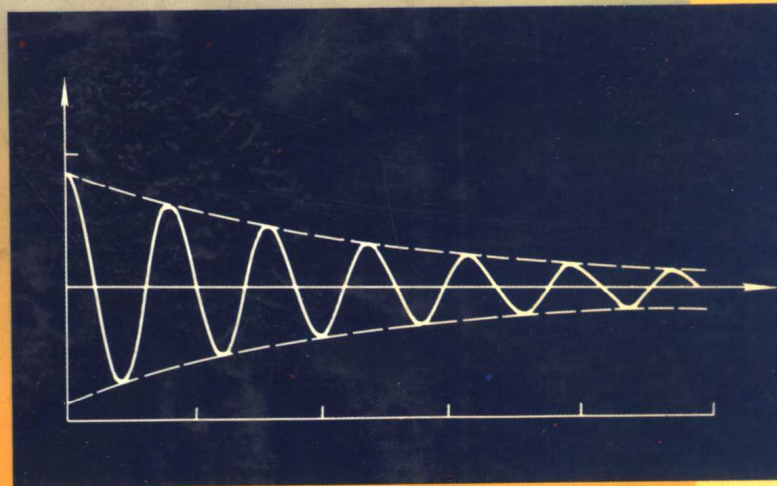
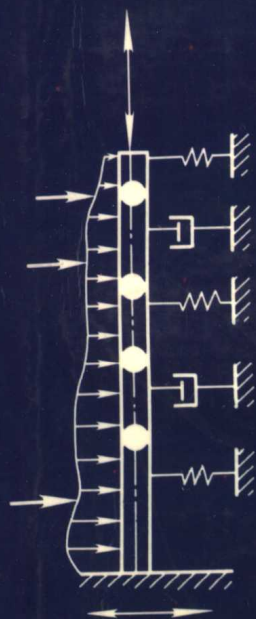


结构动力学及其应用

陆伟民 刘 雁 编著



同济大学出版社

结构动力学及其应用

陆伟民 刘 雁 编著



同济大学出版社

内 容 提 要

本书主要阐述结构动力学的基本原理及其在工程中的应用方法。全书共分九章,前五章阐述传统动力学的基本内容,后四章介绍结构动力学的数值分析方法和结构动力学的逆问题,其中包含用计算机分析语言的求解方法、结构参数的系统识别和结构动力学修改等技术内容。

本书可作为高等学校理工科专业高年级学生、研究生的教材和参考书,也可供土木工程领域从事结构动力分析和试验研究的工程技术人员参考。

责任编辑 郁 峰

封面设计 李志云

结 构 动 力 学 及 其 应 用

陆伟民 刘 雁 编著

同济大学出版社出版

(上海四平路1239号)

新华书店上海发行所发行

上海青浦任屯印刷厂印刷

1996年6月第1版 1996年6月第1次印刷

开本: 787×1092 1/16 印张: 14.25 字数: 360千字

印数: 1—1500 定价: 24.00元

ISBN7—5608—1644—4/O·144

前 言

本书是在作者多年来为结构工程专业硕士研究生讲授结构动力学的讲义基础上,结合工程结构抗震课题研究的心得编写的,对于要求开设动力学的高等院校有关专业,这是一本可供选择的教材,同时,它在应用上有所拓扩,是可供广大工程技术人员参考的一本工具性读物。

全书共分九章,书中第一章至第五章阐述传统的动力学基本内容,包括分析力学基础、单自由度系统、多自由度系统和连续系统;第六章在讨论直接积分解法基础上介绍用计算机分析语言 CAL 解结构动力问题以及模态叠加法、状态空间法等结构动力分析方法;第七章讲述动力有限元法的原理和利用 CAL 解平面动力问题的应用,并介绍部件模态综合和特征值约化问题;第八章阐述结构动力问题的逆问题——系统识别,讨论几种常用的参数识别方法:拟牛顿法、单纯形法、随机走步法、最小二乘法及模态参数识别,最后还介绍了荷载反演;第九章讲述结构动力学一个重要的应用——动力学修改,包括复频响应函数综合修改法、双模态空间修改法、基于灵敏度分析的结构修改方法和结构宽带抑振优化设计的概念。

本书充分照顾了结构动力学的基础内容,同时对于近 20 多年来发展起来的解决复杂结构的一些成功方法以及动力学逆问题和结构修改问题也给予了注意,编写本书的目的是希望为读者打好结构动力学基础,也希望能在掌握近代结构动力学计算方法、拓宽解决动力问题思路 and 手段等方面起到桥梁作用。

本书的第一章、第六章至第九章由陆伟民编写;第二章至第五章由刘雁编写。

承蒙复旦大学王文亮教授对全稿进行了审阅并提出指导性意见,在此谨致深切谢意。李恒增老师校阅了原稿和部分插图的绘制和誊写,郭新海同志做了部分整理工作,作者在此一并致谢。

由于水平所限,书中难免有错误和不妥之处,恳切希望读者批评指正。

编著者
1995 年 8 月于
上海 同济大学

序

结构动力学是宇航、航空、海洋、原子能、化工、土建、水利、交通、机械等工业部门中结构物（如航天飞机、海洋平台、核反应堆装置、各种发动机的转子、高层建筑等）的建模、动力响应分析与计算、振动控制以及实用优化设计的必备知识，因此，为它在各个工程领域中的应用展示了广阔的前景。最近 20 多年来，结构动力学的内容经历了不断的更新，其主要原因是振动工程技术的突飞猛进以及高速数字计算机在求解结构振动问题中的巨大潜力。由于国民经济发展的需要，当前我国动力工程部门中的学者、研究员和工程技术人员已经掀起了一个学习、研究结构动力学理论及其应用的热潮。

本书是作者对最近几年有关结构动力学方面的著作深入调研并总结多年来科学研究和教学实践经验的基础上写成的，作者不仅深入浅出地叙述了结构动力学的基本原理，概念清晰，逻辑严谨，而且还十分注意理论的应用，尽力地阐明技术问题的解决方法，尤其是近 20 多年来兴起的一些新方法，诸如部件模态的综合技术（或动力子结构方法）、用计算机分析语言 CAL 求解动力学问题、模态参数识别和动力修改等方面。

本书内容翔实，图文并茂，既讲结构动力学的正问题，也讲解了它的一些逆问题，在选材上有自己的特色，我衷心地祝贺这本书的出版。

王文亮

1995 年 8 月

目 录

第一章 绪论	(1)
§ 1.1 概述	(1)
§ 1.2 结构的数学模型	(2)
§ 1.3 振动特性的表示	(5)
习题	(6)
第二章 分析力学基础	(8)
§ 2.1 概述	(8)
§ 2.2 约束、自由度和广义坐标	(8)
§ 2.3 可能位移、虚位移和广义力	(12)
§ 2.4 虚功原理	(16)
§ 2.5 拉格朗日(Lagrange)方程	(22)
§ 2.6 哈密顿(Hamilton)原理	(32)
习题	(39)
第三章 单自由度系统	(41)
§ 3.1 数学模型	(41)
§ 3.2 自由振动	(48)
§ 3.3 强迫振动	(54)
§ 3.4 反应谱	(66)
习题	(67)
第四章 多自由度系统	(71)
§ 4.1 主坐标和主振动	(71)
§ 4.2 无阻尼自由振动	(75)
§ 4.3 振型的正交性和正规坐标变换	(81)
§ 4.4 半正定系统	(85)
§ 4.5 瑞利-李兹(Rayleigh-Ritz)方法	(88)
§ 4.6 广义特征值问题的数值计算	(94)
§ 4.7 多自由度系统的阻尼	(97)
习题	(99)
第五章 连续系统	(101)
§ 5.1 连续系统的数学模型	(101)
§ 5.2 连续系统的自由振动	(106)
§ 5.3 固有模态的性质	(111)

§ 5.4	传递矩阵法	(114)
§ 5.5	梁的弯曲振动	(117)
	习题	(122)
第六章	结构动力分析方法	(124)
§ 6.1	直接积分法	(124)
§ 6.2	用计算机分析语言 CAL 解动力问题	(129)
§ 6.3	模态叠加法	(135)
§ 6.4	状态空间法	(147)
	习题	(152)
第七章	动力有限元法	(154)
§ 7.1	单元分析	(154)
§ 7.2	单元坐标转换	(160)
§ 7.3	单元矩阵的装配	(163)
§ 7.4	边界条件处理	(168)
§ 7.5	用 CAL 求解平面结构	(170)
§ 7.6	部件模态的综合	(181)
§ 7.7	主辅自由度法(Guyan 减缩)	(185)
	习题	(188)
第八章	结构的系统识别	(190)
§ 8.1	系统设计概念	(190)
§ 8.2	系统识别问题的提法和分类	(191)
§ 8.3	高斯-牛顿法及其改进——拟牛顿法	(193)
§ 8.4	单纯形法	(195)
§ 8.5	随机走步法	(196)
§ 8.6	最小二乘法	(197)
§ 8.7	模态参数识别(Ibrahim 时域法)	(198)
§ 8.8	荷载反演	(201)
第九章	结构的动力学修改	(204)
§ 9.1	复频响应函数修改法	(204)
§ 9.2	双模态空间修改法	(209)
§ 9.3	基于灵敏度分析的结构修改方法	(211)
§ 9.4	结构宽频带抑振优化设计概念	(214)
	参考书目及文献	(217)

第一章 绪 论

§ 1.1 概述

结构动力学的发展有很长的历史,它涉足于土木工程、机械工程、工程力学、宇航工程……众多领域,虽然在这些领域中的研究对象各不相同,但在基本原理和求解技术上是具有共同之处的,因此具有普遍意义。

近数十年来,工程实际对结构进行动力分析的要求越来越迫切,人们对结构动态特性也给予了更多的重视,这可以在以下几个方面得到反映:

(1) 工程结构的规模日益扩大,无论高度和外形都变得更为高大和复杂,不能不考虑风荷载等动力因素对结构强度和稳定性的影响;

(2) 动力荷载(如地震、爆炸等)对结构物的作用存在很大的可能性,对其危害性作出评估并采取有效的对策,有赖于结构动力学;

(3) 随着海洋采油平台的应用,不同介质对结构的动力影响向结构动力学提出了更高的要求;

(4) 动力设备基础结构和厂房机器上楼,要求进行振动分析;

(5) 结构动力实验技术(如模态分析方法)的发展是以动力学的理论为依据的;

(6) 复杂结构特性参数的确定须综合应用实验技术和动力学原理;

(7) 结构物和桩基等无损检验技术是建立在动力学理论基础上的。

特别应指出的是数值方法的发展、快速富利哀变换技术的引入、结构动力学原理与计算机相结合,使古老的学科得到了巨大的活力,促使结构动力有限元的迅速崛起和发展,结构的设计、分析和实验在计算机这一强有力工具的支持下已沟通起来(图 1.1),可以预期,基于知识库专家系统求解工程问题的自动化过程的实现不会是很遥远的事了。

数值方法在结构动力学上的应用,使结构分析时间大大缩短、工程投资降低并提供大量完整的信息,由于采用了前处理,输入数据灵活方便;而后处理功能可使处理结果更切合实际需要。再加上计算机绘图与通讯技术的配合,分析过程的有效性和效率得到了前所未有的提高。

然而,在这样的形势下,对结构动力学的基本理论学习非但不应削弱,相反应得到加强,因为这是使用好计算机工具及其软件系统的需要。对建立起正确的动力分析模型,人的作用是非常突出的,很难设想,一个被歪曲了的原型结构模型,在即使非常先进的动力分析计算程序上会得到有用的结果来。

我们再来看一下动力学问题的组成,它包含三个基本环节:激励、响应(反应)和结构体系,即输入、输出和系统。具体地说:

(1)“输入”是振动的起因,它涉及作用点、数值与方向三个要素,动力荷载与静力荷载的差别就在于:第一,与时间变量 t 有关,因此而来的是动力问题解牵涉到初始条件;第二,惯性力不能忽略;须考虑质量的大小和分布以及加速度的大小。

(2)“系统”是反映实际结构物特性的计算模型,表达该模型的结构特性各参数有线性

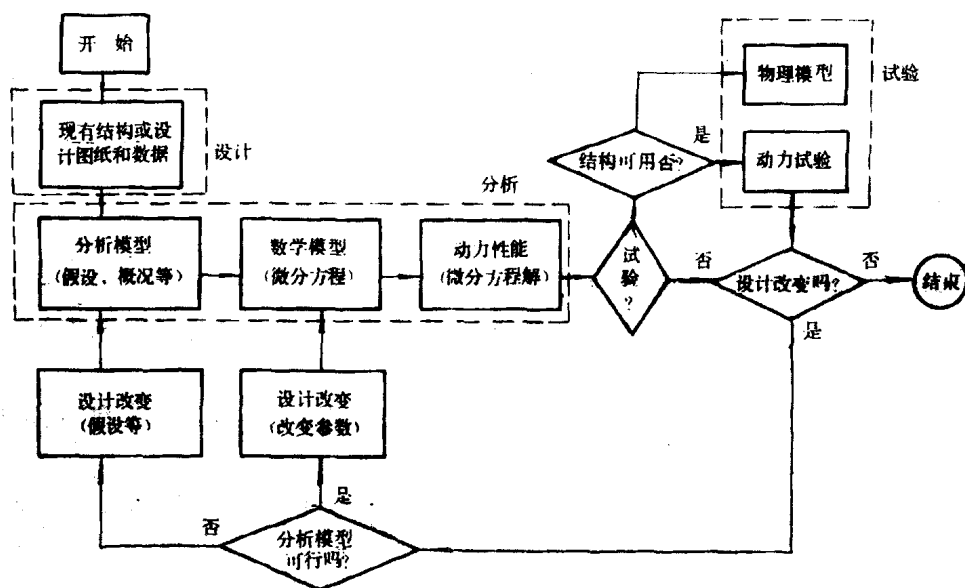


图 1.1 动力学问题研究的全过程

和非线性之分。

(3)“输出”是系统在输入作用下所取得的反应，也就是结构物的位置和形状随时间而变化的规律。

按照这三个基本环节之间的关系，可以把动力学研究的问题归类如下：

(1) 正问题，即求结构物的反应，它有确定性方法和随机性方法之分，一般地，它取决于荷载是如何规定的。如果荷载随时间的变化能以时间函数关系表示，是确定性荷载，相应的动力反应分析是确定性分析方法；反之，如果荷载随时间变化不是完全确定的或已知的，但可以用统计特征表达，就是随机荷载，对应于随机荷载下的动力反应分析方法是随机性的。

(2) 逆问题，从结构的输入和输出确定结构系统参数，这是系统识别问题；另外，若已知输出和结构系统参数，反推出荷载，则属荷载反演。

这一类动力问题的解决，需要有动力实验的测试数据的配合，因而动力学的逆问题须综合应用实验技术、计算技术和自动控制论。

§ 1.2 结构的数学模型

结构动力学问题分析的基本步骤是：①确定荷载，包括它的性质、大小和变化规律；②确定初始条件；③对实际结构进行简化，建立数学模型；④选用合理方法求解；⑤验证结果的正确性。

上述步骤中的第③步（模型的建立）是关键的一步，它必须确定起一个与真实结构相像、能反映其主要特征性能的抽象化模型，以使接下来的数学分析不致徒劳，构造数学模型的内容有：①利用简化和假定将实际结构抽象为设想的模型；②用计算草图来表示模型；③规定模型参数，即几何尺寸和物理特性。

结构的数学模型有两类: ①连续模型, 又称分布参数系统; ②离散模型, 又称离散参数模型。下面分别讨论这两种模型的一些主要建立方法。

1. 连续模型的建立

这里以变截面悬臂梁为例, 说明在支承端作竖向平动时不计轴向力和内阻尼情况下用常规力平衡方法建立连续模型的过程。

如图 1.2 所示, 取出悬臂梁微段 dx , 分析其单位长度上的受力。

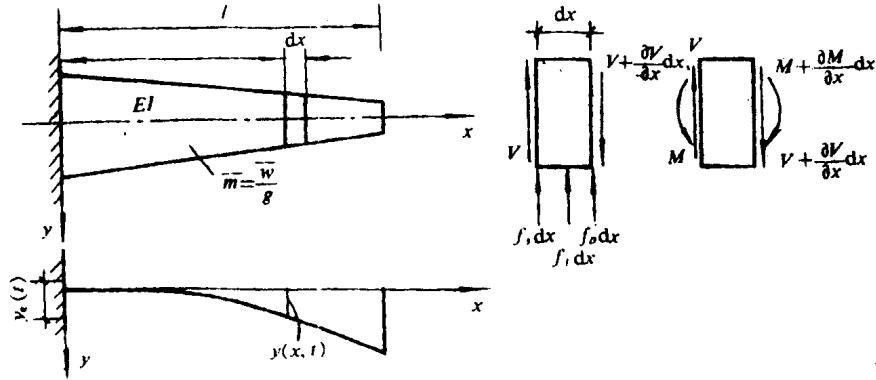


图 1.2 悬臂梁支承端平动引起挠曲的受力分析

(1) 弹性恢复力

由微段力平衡条件得

$$f_s = \frac{\partial V}{\partial x}$$

由微段力矩平衡条件得

$$V = -\frac{\partial M}{\partial x}$$

计及

$$M = EI \frac{\partial^2 y(x, t)}{\partial x^2}$$

所以

$$f_s = \frac{\partial}{\partial x} \left(-\frac{\partial M}{\partial x} \right) = -\frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(EI \frac{\partial^2 y(x, t)}{\partial x^2} \right)$$

(2) 惯性力

$$f_1 = -\bar{m} \left(\frac{\partial^2 y(x, t)}{\partial t^2} + \frac{\partial^2 y_R(x, t)}{\partial t^2} \right)$$

(3) 外阻尼力

$$f_D = -\beta \frac{\partial y(x, t)}{\partial t}$$

根据平衡关系 $f_s + f_I + f_D = 0$

$$\text{得} \quad \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left[EI \frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial t^2} \right] + \beta \frac{\partial y(x,t)}{\partial t} + \bar{m} \frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial t^2} = -\bar{m} \frac{\partial^2 y_g(t)}{\partial t^2} \quad (1.1)$$

这就是悬臂梁受支承端平动作用的连续模型，它是一个偏微分方程，右端项表示引起其振动的等效外荷载。

2. 离散模型的建立

相应于离散模型的是一个常微分方程，这里介绍三种离散化方法。

(1) 堆聚质量法

将原来的分布质量加以集中，分别堆聚在若干个质点上，如图 1.3 所示，每个质点在运动过程中因具有位移加速度，形成惯性力。这时，只需确定离散点的位移和加速度，可见，为表达惯性力作用，须考虑位移分量的数目，这就是结构的动力自由度，这里， $m_i (i=1, 2, 3)$ 只在竖直方向运动，应考虑的位移分量数为 3，是三自由度系统。这个方法不但在物理上、也在数学上将空间和时间的变量分离开来。

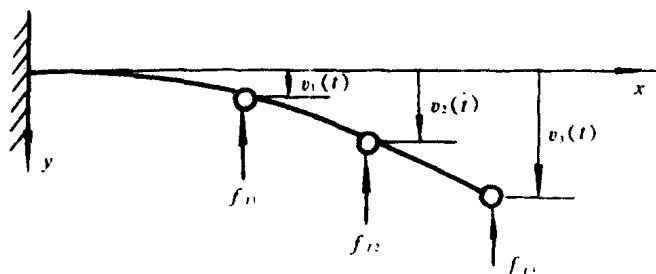


图 1.3 具有三个自由度的三质量模型

(2) 广义坐标法

系统的质量分布很均匀时，采用上述堆聚质量法，需要很多的离散点，也就是有很多自由度，无疑这将使分析更为麻烦。为了减少自由度，可采用广义坐标法，又称广义位移法，这个方法是假定结构的挠曲形状可用一系列满足边界条件和互相正交的线性无关的位移曲线之和表示，譬如，对简支梁，就可用三角级数来表示其挠曲线：

$$V(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin \frac{n\pi x}{l} \quad (1.2)$$

式中，幅值 $b_n (n=1, 2, \dots)$ 可看成是系统的独立坐标，称之为广义坐标。事实上，取 $n=3$ 就可以足够精确地表示 $V(x)$ ，这就将无限自由度的连续系统限制成三个自由度，相应的三个独立坐标为 b_1 , b_2 和 b_3 。

(3) 有限单元法

这个方法提供了方便可靠的结构数学模型，特别适宜于计算机分析，可以从数学角度和物理学角度来建立公式，前者是以剖分插值和变分原理为基础，这里，则从后者即物理学角度来说明有限单元法的基本概念。

将整个结构离散化为有限个单元，它们在有限个节点上连接，通过选用适当的场函数，对各个单元进行近似的力学分析处理，建立起单元的节点位移与相应节点力之间的关系，然后按照在连接点上的力平衡条件或变形连续条件把单元拼装成原结构，这样，就可列出作为未知量的节点位移或节点力的方程组。对方程组求解，就可获得问题的解。

§ 1.3 振动特性的表示

振动是一种机械运动，具有在平衡位置作往复运动的特征。因为每一结构都具有一定的质量和受力变形并恢复原来状态的弹性，现分别用 m 和 k 表示质量和刚度，成为质量-弹簧系统的分析模型，当它受外力干扰后，就能产生在平衡位置附近的往复运动，固有频率就是表示这种运动的重要参数之一，它表达了系统的内在动力特性。

根据在任意位置上弹性力和惯性的平衡条件，可列出振动方程：

$$m\ddot{u} + ku = 0 \quad (1.3)$$

或
$$\ddot{u} + \omega^2 u = 0 \quad (1.4)$$

式中
$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} \quad (1.5)$$

称为圆频率，单位为 rad/s ，如果用一质点作圆周运动来表示 m 在平衡位置附近的往复运动，那么，质点的角速度 ω 就是振动的圆频率，在时间 t 为横轴、振幅 u 为纵轴的坐标系中，可得到以三角函数表示的曲线，称这种规律的运动为简谐运动（图 1.4），质点在圆上运动一周所需的时间就是周期：

$$T = \frac{2\pi}{\omega} \quad (1.6)$$

频率为周期的倒数

$$f = \frac{1}{T} = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{k}{m}} \quad (1.7)$$

单位为 Hz ，是工程上常用的单位。

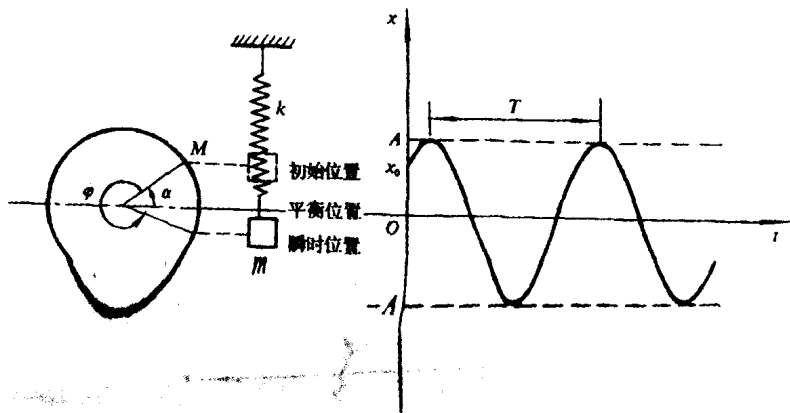


图 1.4 简谐运动

初始条件是起始时刻的位移和速度, 即

$$t = 0 \quad u = u_0 \quad \dot{u} = \dot{u}_0 \quad (1.8)$$

简谐运动规律为

$$u = A \cos(\omega t - \alpha) \quad (1.9)$$

其中, A 为振幅, α 为初始位相。

方程(1.9)式是二阶常微分方程(1.4)的解, 因为由(1.9)式可得

$$u = c_1 \cos \omega t + c_2 \sin \omega t$$

利用初始条件(1.8)式得

$$c_1 = u_0, \quad c_2 = \dot{u}_0 / \omega$$

所以

$$\begin{aligned} u &= u_0 \cos \omega t + (\dot{u}_0 / \omega) \sin \omega t \\ &= A \cos(\omega t - \alpha) \end{aligned}$$

式中

$$\left. \begin{aligned} A &= \sqrt{u_0^2 + \left(\frac{\dot{u}_0}{\omega}\right)^2} \\ \alpha &= \arctg \frac{\dot{u}_0}{\omega u_0} \end{aligned} \right\} \quad (1.10)$$

若系统具有阻尼, 其阻尼比为 ξ 时, 运动方程的解为

$$u = e^{-\xi \omega t} \cos(\omega t - \alpha) \quad (1.11)$$

对于 n 个自由度的多自由度系统, 除了具有与自由度数相同的 n 个固有频率外, 还具有相应的固有振动样式, 即振型, 这时, 运动方程用矩阵形式表示:

$$[M]\{\ddot{u}\} + [K]\{u\} = \{o\} \quad (1.12)$$

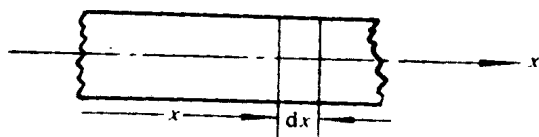
由此可得特征方程

$$([K] - \omega^2 [M])\{\phi\} = \{o\} \quad (1.13)$$

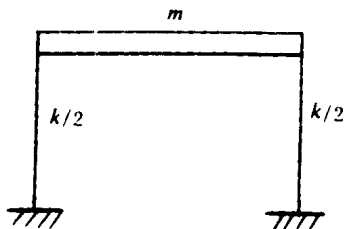
相应地有 n 个特征对: 固有频率 ω_i 和振型 $\{\phi\}_i$ ($i = 1, 2, 3, \dots, n$), 它们构成一个完备的模态集, 结构的动力特性就是用模态集来表示的。

习 题

1.1 将等截面直杆作为连续体, 试根据平衡条件建立其纵向振动数学模型, 材料密度 ρ , 弹性模量 E , 横截面积 A 。



1.2 单层框架质量 m 集中在横梁上，忽略柱子质量，每根柱的侧向刚度为 $k/2$ ，不计阻尼，试推导其运动方程，若初始位移为 u_0 ，初始速度为 $\dot{u}_0$ ，求自由振动周期 T 及振幅 u ，并画出位移反应时程曲线。



1.3 已知质量-弹簧系统的速度反应 $\dot{u}(t) = 150\cos(17t + \pi/2)(\text{mm/s})$ ，试求：①振动频率和周期；②最大位移、速度和加速度；③振动开始时刻的位移、速度和加速度；④ $t = 1.2\text{s}$ 时的位移、速度和加速度。

1.4 试用相平面(即取 $\dot{u}/\omega$ 为横轴、 u 为竖直轴的正交坐标系，用旋转向量 OR 表示幅值为 A 的振动)表示质量-弹簧系统的简谐运动，建立方程式(1.9)和(1.10)的关系。

第二章 分析力学基础

§ 2.1 概述

力学原理是人类经验的总结和抽象,因而具有普遍性。同时,它一直受到实践的检验。

力学原理可以用微分形式和积分形式表示,前者适用于运动的每瞬时,而后者适用于运动的非无限短的任何时段。

力学原理又可以分为变分原理和非变分原理两类。非变分原理描述所有真实运动的公共性质;变分原理提供一种准则,把真实运动和在同样条件下运动学上可能的其他运动区分开来。

因此,可将力学原理概括如下:

$$\text{力学原理} \left\{ \begin{array}{l} \text{微分的} \left\{ \begin{array}{l} \text{非变分的(如牛顿定律)} \\ \text{变分的(如虚功原理)} \end{array} \right. \\ \text{积分的} \left\{ \begin{array}{l} \text{非变分的(如能量守恒定律)} \\ \text{变分的(如哈密顿原理)} \end{array} \right. \end{array} \right.$$

分析力学是以变分原理为基础,阐明力学的普遍规律,并用此普遍规律推导运动微分方程,进而求解。对于工程上的力学问题,分析力学的方法是解决问题的基础,本章介绍的原理和方法将为以后各章建立数学模型提供依据。

§ 2.2 约束、自由度和广义坐标

1. 约束

任意多个质点的集合称为质点系(简称系统),系统各质点在空间的位置的集合称为系统的位形,位形表示了系统各质点的位置分布所构成的几何形象。位形或速度不受任何预先规定的几何条件的制约而任意变化的系统称为自由系,当然,位形或速度受到预先规定的几何条件的制约而不能任意变化的系统就称为非自由系。

对非自由系各质点的位置或速度所施加的几何或运动学的限制称为约束,一般的约束都可用约束方程或约束不等式来表达。设平面上两质点由一长度为 l 的刚性杆连接,运动中杆中点的速度只可以沿着杆向(如图2.1),因而约束方程可表示为

$$(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 - l^2 = 0 \quad (2.1)$$

$$\frac{\dot{x}_1 + \dot{x}_2}{x_1 - x_2} = \frac{\dot{y}_1 + \dot{y}_2}{y_1 - y_2} \quad (2.2)$$

在力学系统中,其方程用坐标 $x_i, y_i, z_i (i=1, \dots, N)$ 及时间 t 的解析方程或有限方

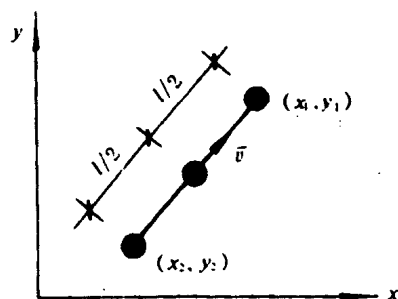


图 2.1

程（非微分方程）来表示的约束叫完整约束，如式(2.1)即为完整约束，受完整约束的系统称为完整系统；在完整约束的约束方程中，不显含时间变量 t 的约束称为定常约束；而在约束方程中显含时间变量 t 的约束则为非定常约束。例如，图 2.2(a)中，若质点 m 由无重刚杆铰联于支座 O ，则其约束方程为

$$x^2 + y^2 + z^2 - l^2 = 0 \quad (2.3)$$

与时间无关，所以是定常约束。而如图 2.2(b)所示的情况，约束随时间的变化而变化，其约束方程为

$$x^2 + y^2 + z^2 - l^2(t) = 0 \quad (2.4)$$

这种约束就是非定常约束。

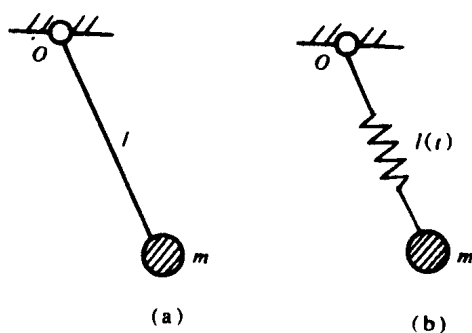


图 2.2

如果约束方程是用坐标的不可积分的微分方程来表示，即方程中不仅包含坐标，而且还包含其对时间的导数，则称非完整约束。例如式(2.2)就是非完整约束，受非完整约束的系统为非完整系统。

总之，约束可分类如下：

$$\text{约束} \begin{cases} \text{完整的} \\ \text{非完整的} \end{cases} \begin{cases} \text{定常的} \\ \text{非定常的} \end{cases}$$

2. 自由度

给定的力学系统的一个重要特征是它的自由度数，系统的自由度是在一固定的时刻(t 保持不变)、约束许可条件下能自由变更的独立的坐标数目。自由度数等于坐标数目减去独立的约束方程数目，例如，如果利用 $3N$ 个直角坐标描述具有 N 个质点的系统的位形，并且有 l 个联系这些坐标的独立约束方程：

$$f_k(x_i, y_i, z_i, \dots, z_N, y_N, z_N) = 0 \quad (k = 1, 2, \dots, l)$$

则该系统的自由度 $n = 3N - l$ (2.5)

因此，完整系统的自由度数等于独立坐标的数目。但对于非完整系统，它的自由度数等于独立坐标数目减去非完整约束方程的数目。

在这里，重要的是要认识到自由度数是系统本身的特征，它并不依赖于描述该系统时所采用的一组特定的坐标。

3. 广义坐标

一个给定系统的位形可以采用不同的坐标组来表示，例如，图 2.3 所示的质点系统。小球 m_2 用长 l_2 的轻杆拴于小球 m_1 上，系统运动时保持在铅垂平面内。为确定系统的位置，选轻杆与铅垂的夹角 θ_1, θ_2 为坐标，设 m_1, m_2 的直角坐标分别为 $(x_1, y_1), (x_2, y_2)$ ，则

$$\left. \begin{aligned} x_1 &= l_1 \cos \theta_1 \\ y_1 &= l_1 \sin \theta_1 \\ x_2 &= l_1 \cos \theta_1 + l_2 \cos \theta_2 \\ y_2 &= l_1 \sin \theta_1 + l_2 \sin \theta_2 \end{aligned} \right\} \quad (2.6)$$

且式(2.6)自动满足下面的约束方程：

$$x_1^2 + y_1^2 = l_1^2 \quad (2.7)$$

$$(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 = l_2^2 \quad (2.8)$$

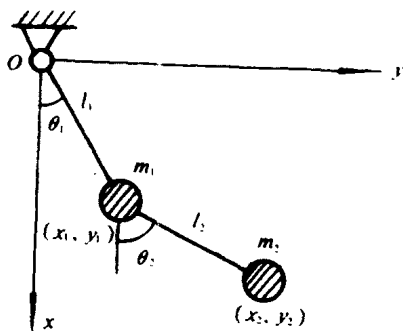


图 2.3

因此，只要选取 $(x_1, y_2), (x_2, y_1), (x_1, x_2), (y_1, y_2), (\theta_1, \theta_2)$ 中任一个，即可确定