

第二版

数理化自学丛书

平面解析几何

吴家钦 奚定华 编

上海科学技术出版社



数理化自学丛书

第二版

平面解析几何

吴家钦 奚定华 编

上海科学技术出版社

数理化自学丛书

第二版

平面解析几何

吴家钦 奚定华 编

数理化自学丛书编委会审定

上海科学技术出版社出版

(上海瑞金二路450号)

新华书店上海发行所发行 上海群众印刷厂印刷

开本 787×1092 1/32 印张 14.625 字数 386,000

1965年9月第1版

1982年10月第2版 1983年7月第9次印刷

印数 840,501—999,500

统一书号: 13119·669 定价: (科三) 1.00元

内 容 提 要

本书主要包括直线和圆锥曲线的各种方程与性质、坐标变换、极坐标和参数方程等内容。

本书讲解详细，系统性强，有大量例题和习题，注解与提示也较多，可供具有平面几何、代数方程和平面三角的初步知识的读者阅读。书中加有“*”号的段落、章节和习题，都是比较难的，初学时如有困难，可暂时略去。

本书主要读者对象是青年工人、知识青年、在职干部，也可供中学教师参考。

第二版出版说明

《数理化自学丛书》第二版是在第一版的基础上编写而成的。考虑到我社已出版大学数、理、化自学丛书，中学数学中的微积分内容没有另编分册。第二版仍包括《代数》四册、《平面几何》两册、《平面三角》、《立体几何》、《平面解析几何》、《物理》四册和《化学》四册，共十七册。

由黄丹蘊、杨荣祥、余元希、杨逢挺、桂君协等同志主编的第一版，自1963年陆续出版后，受到广大读者的欢迎。特别是1977年重排、重印以来，受到社会各方面极为广泛的关注，在广大读者中有了相当的影响。许多在职职工、农村青年和在校学生，自学了这套书以后，数理化知识水平有了一定的提高。

第二版由杨荣祥、余元希、束世杰、季文德等同志主编，数理化自学丛书编委会审定。它保留了第一版在编写上“详尽在先、概括在后、通俗到底”和“便于自学、无师自通”的特色，仍是一套与现行中学课本并行的自学读物。第二版仍从读者的实际情况出发，按传统的教学体系编写。但这次参照新的试行教学大纲的要求，与第一版相比，数学各分册的编写内容作了适当的增删和调整，基础知识和运算技能的训练有了进一步加强；物理各分册在内容的取舍、习题的更新、插图的选配、实验的描述等方面均有较大的改进；化学各分册还增加了反映现代科学技术水平的基础理论知识，在理论和实践相结合的原则下，内容和体系均有新的特色。此外，各册的例题和习题选配得力求恰当、合理，知识

论述力求通俗、严密；并按章增加了测验题。在各册编者的话中，还有供读者自学时参考的指导性意见。

自学要有成就，必须刻苦勤奋、踏实认真、持之以恒、知难而进。刻苦自学、学有成就者不乏其人，愿广大读者努力学好。

《数理化自学丛书》出版以来，全国各地的读者给以热情的鼓励和有力的支持，特在此表示衷心感谢。

上海科学技术出版社

编者的话

本书第一版自 1965 年出版以来,陆续收到不少读者的来信,从这些热情洋溢的信中,编者受到极大的鼓舞,并从中得到很多教益.根据读者的反映,原书为减少自学的困难所采取的一些措施是有效的,编排的体系也是合理的,这些在第二版中都加以保留.为了适应教学改革的发展和读者要求的变化,本书各章作了如下的修订:

重新编写了第一、二、三章,精简了重复的内容,突出了解析几何的基本思想,加强解析法论证图形性质的内容.

第四章的基本内容没有变动,对部分例题作了更新和补充.

第五章作了适当的精简和补充.

第六章充实了求轨迹的参数方程和参数方程应用的内容.

第七章对极坐标方程作了较深入的讨论,增加了等速螺线的内容.

从自学的实际情况出发,删去了附录“经验公式”.

对各章的例题和习题作了较多的更新和补充,修订后的习题分为以下几类:

1. 在一个阶段或一节之后附有练习,帮助读者初步理解基本概念和熟悉公式、法则.

2. 在适当的阶段之后附有习题,供读者巩固基础知识和加强基本技能训练用.

3. 每章之后附有复习题, 帮助读者提高综合运用知识的能力以及分析问题和解决问题的能力. 复习题分 A、B 两组, 其中 B 组综合性较强, 供要求不同的读者选用.

4. 每章都附有测验题, 供读者自我检查学习效果时参考.

平面解析几何是学习高等数学和其他科学技术的基础, 在工农业生产上也有实际应用. 编者热切希望自学本书的读者能深刻领会解析几何的思想方法, 打下坚实的基础. 因此, 在自学时, 希望能注意做到以下几点:

1. 学习解析几何与学习其他学科一样, 要精读教材, 深刻理解概念; 要掌握公式的推导方法, 并熟记重要的公式; 学习要循序渐进, 学好一节再往下学.

2. 解析几何是用代数的方法研究某些几何图形性质的学科. 在整个学习过程中要反复领会解析几何的这个基本思想. 通过练习逐步掌握求曲线方程的各种方法, 学会根据方程研究曲线的几何性质, 这是学好解析几何的重要基础. 在解题时, 如能注意选择适当的坐标系, 则解题的过程和求得的方程都会比较简单.

3. 平面解析几何研究的方法是代数的方法, 因此计算是解题的重要手段. 在学习过程中应注意培养正确的、迅速的计算能力. 审题要认真, 计算要仔细, 不要粗枝大叶, 遇到比较复杂的问题, 也要耐心对待. 解完每道题都要检查结果是否正确, 养成验算的习惯, 不要急于对答案.

4. 平面解析几何研究的对象是平面图形, 因此还要培养正确的绘图技能, 在解题时, 要根据条件画出准确的图形. 在很多情况下, 正确的图形往往有助于进行观察和思维, 使问题得到迅速解决, 而错误的图形则常常会引起错觉, 导致解题失误.

5. 平面解析几何是在掌握了代数、平面几何和三角的

基础知识的基础上进行学习的。在学习时要经常用到有关的知识,如果有遗忘,要及时复习。同时还要注意这些知识在解析几何中的应用,以提高综合运用知识解题的能力。

6. 为了使自学时做到目的明确,心中有数,我们在每章的开头都提出了学习要求,结尾都有提要,读者可以在学习一章之后,加以对照,以了解自己的学习情况,掌握学习的主动权。

我们相信,坚持自学的读者通过认真刻苦的学习,一定能取得良好的学习效果。

本书的第一版由朱凤豪、吴家钦编写,第二版由吴家钦、奚定华编写。由于编者水平有限,难免有谬误之处,恳望广大读者予以批评、指正。

编 者

一九八〇年十月

目 录

第二版出版说明	i
编者的话	iii
1. 平面直角坐标系	1
§ 1.1 有向线段	1
§ 1.2 平面直角坐标系	6
§ 1.3 两点间的距离	11
§ 1.4 直线的倾斜角和斜率	13
§ 1.5 线段的定比分点	20
§ 1.6 三角形面积	33
本章提要	40
复习题一 A	42
复习题一 B	43
第一章测验题	44
2. 曲线和方程	46
§ 2.1 曲线和方程的关系	46
§ 2.2 从曲线求出它的方程	50
§ 2.3 从方程画出它的曲线	55
§ 2.4 方程的讨论	56
§ 2.5 两曲线的交点	67
本章提要	72
复习题二 A	73
复习题二 B	74
第二章测验题	75

3. 直线	77
§ 3.1 直线方程的几种形式	77
§ 3.2 直线和二元一次方程的关系	87
§ 3.3 直线方程的法线式	92
§ 3.4 化直线方程的一般式为法线式	98
§ 3.5 点到直线的距离	102
§ 3.6 直线和直线之间的关系	111
§ 3.7 直线系	121
§ 3.8 过两条直线交点的直线系	127
本章提要	133
复习题三 A	135
复习题三 B	137
第三章测验题	139
4. 圆锥曲线	141
I. 圆	141
§ 4.1 圆的方程	141
§ 4.2 决定一个圆的条件	147
§ 4.3 圆的切线	154
§ 4.4 圆系	159
II. 椭圆	165
§ 4.5 椭圆的定义	165
§ 4.6 椭圆的标准方程	166
§ 4.7 椭圆的性质	170
§ 4.8 用几何方法画出椭圆上的点	182
III. 双曲线	185
§ 4.9 双曲线的定义	186
§ 4.10 双曲线的标准方程	187
§ 4.11 双曲线的性质	190
§ 4.12 用几何方法画出双曲线上的点	206

IV. 抛物线	207
§ 4.13 抛物线的定义	208
§ 4.14 抛物线的标准方程	209
§ 4.15 抛物线的性质	212
§ 4.16 抛物线方程的其他一些形式	214
§ 4.17 用几何方法画出抛物线上的点	219
§ 4.18 圆锥曲线	222
*V. 圆锥曲线的切线和法线	224
§ 4.19 曲线的切线	225
§ 4.20 切线的斜率	226
§ 4.21 切线的方程	229
§ 4.22 已知斜率的切线方程	239
§ 4.23 圆锥曲线的切线和法线的性质	244
本章提要	251
复习题四 A	253
复习题四 B	255
第四章测验题	257
5. 坐标变换和二元二次方程的讨论	258
§ 5.1 坐标轴的平行移动	258
§ 5.2 方程 $Ax^2 + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$ 的讨论	265
§ 5.3 坐标轴的旋转	270
§ 5.4 一般二元二次方程的讨论	275
§ 5.5 化简关于数字系数的一般二元二次方程的实用 方法	284
§ 5.6 圆锥曲线的统一定义	294
§ 5.7 圆锥曲线系	303
本章提要	309
复习题五 A	310
复习题五 B	311
第五章测验题	312

6. 参数方程	314
§ 6.1 参数方程	314
§ 6.2 将参数方程化为普通方程	317
§ 6.3 描绘参数方程的图象	320
§ 6.4 将普通方程化为参数方程	321
§ 6.5 直线和圆锥曲线的参数方程	326
§ 6.6 参数方程的应用	340
§ 6.7 圆锥曲线的直径	348
本章提要	353
复习题六 A	355
复习题六 B	357
第六章测验题	360
7. 极坐标	362
§ 7.1 极坐标的意义	362
§ 7.2 极坐标和直角坐标的互化	369
§ 7.3 描绘极坐标方程的曲线	374
§ 7.4 求曲线的极坐标方程	383
§ 7.5 直线和圆锥曲线的极坐标方程	388
§ 7.6 等速螺线	394
本章提要	400
复习题七 A	401
复习题七 B	404
第七章测验题	406
总复习题 A	408
总复习题 B	414
总测验题	422
习题答案	423

平面直角坐标系

本章主要叙述解析几何的一些基础知识。

解析几何是一门用代数方法研究某些几何图形的学科。它的基本思想是把几何问题转化为代数问题进行研究。因此，通过坐标轴或坐标系的引入，建立点与实数、或与有序实数对、有序实数组的对应关系，是学习解析几何的关键。学习时，务求做到深刻理解，达到以下要求：

(1) 理解有向线段的概念，学会用坐标方法表示有向线段的数量。

(2) 掌握坐标平面上任意一点与一对有序实数之间的对应关系。就是说，能从坐标平面上任意一点求出它的坐标，以及由已知的一对实数能在坐标平面上定出它的对应点。

(3) 了解并掌握四个基本公式的推导方法及其应用。

(4) 初步学会应用解析法证明几何问题。

§1.1 有向线段

1. 有向直线和有向线段

在平面几何里，对于一条直线，我们只考虑它的位置而不考虑它的方向。如图 1.1 是一条经过 B 、 A 两点的直线，我们称它为直线 BA 或直线 AB 是没有什么区别的。但如果把这条直线看作是由一个点移动而成的，那就有一个由 B 到 A 或由 A 到 B 的方向问题了。在物理学

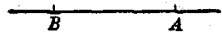


图 1.1

里(尤其是在力学中),在实际生活和生产中,考虑直线的方向是有它的实际意义的.

任意一条直线都具有两个相反的方向,我们可以规定它的一个方向为正向,那么和它相反的方向就是负向了.象这样规定了方向的直线叫做有向直线.有向直线的正方向习惯上用箭头表示.如图 1.2 中的直线,称为有向直线 BA 或有向直线 l .

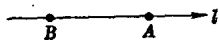


图 1.2



图 1.3

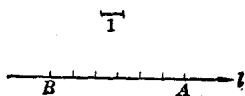


图 1.4

线段是直线上两点间所截得的部分,因此线段也有两个相反的方向.如果以线段的一个端点 B 为起点,另一端点 A 为终点,那么由起点 B 到终点 A 是线段的一个方向(图 1.3);反之,如果以 A 为起点, B 为终点,那么由 A 到 B 的方向恰好与由 B 到 A 的方向相反.规定了方向的线段叫做有向线段.有向线段的方向就是由起点到终点的方向.

有向线段 BA ,用记号 \overline{BA} (表示起点的字母写在前,表示终点的字母写在后.当不发生混淆时也可以用 BA 表示).有向线段的方向,通常由它所在的有向直线的方向来确定,就是说,如果有向线段的方向与它所在的有向直线的方向相同,就说它是正向的;如果相反,就说它是负向的.如图 1.4 的有向直线 l 上, \overline{BA} 表示正向, \overline{AB} 表示负向.

2. 有向线段的数量

选定一条线段作为长度单位,可以用它来度量有向线段的长度.一条有向线段的长度,连同表示它的方向的正负号,叫做这条有向线段的数量(或值).如图 1.4 的 \overline{BA} ,

它的长度为6, 方向为正向, 用记号

$$BA=6$$

表示. \overline{AB} 的长度为6, 方向为负向, 用记号

$$AB=-6$$

表示. 如果只表示有向线段的长度, 而不考虑它的方向时, 只要给有向线段的数量加上绝对值的记号. 如

$$|BA|=|6|=6, \quad |AB|=|-6|=6.$$

注意, 三个记号的区别: “ \overline{BA} ”表示有向线段, “ BA ”表示有向线段的数量, “ $|BA|$ ”表示有向线段的长度. 对有向线段的长度来说,

$$|BA|=|AB|.$$

对有向线段的数量来说,

$$BA=-AB,$$

就是

$$BA+AB=0.$$

3. 用点的坐标表示有向线段的数量

在代数里, 我们曾经在一条有向直线上选取一点 O 作为原点, 任取一定长的线段作为长度单位, 建立了坐标轴 (也称数轴, 图 1.5). 并且知道, 任意一个实数都可以用数轴上一个 (唯一的) 点来表示; 反之, 数轴上的任意一点, 都可以表示一个 (唯一的) 实数. 这就是数轴上的点与实数集有着一一对应的关系. 对应于数轴上一点 P 的实数 x 叫做这点 P 的坐标, 记作 $P(x)$. 如某一点 P 的坐标是 5, 就是以原点 O 为起点, P 为终点的有向线段的数量是 5, 即 $OP=5$.

反过来, 如以原点 O 为起点, Q 为终点的有向线段的数量 $OQ=$

-4 , 就是点 Q 的坐标为 -4 (图 1.5).

设数轴 x 上有两点 A 、 B , 它们的坐标分别是 x_1 和 x_2 .

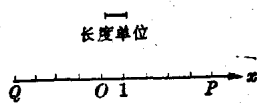


图 1.5

现在我们来研究, 如何用坐标 x_1 和 x_2 表示有向线段 AB 的数量. 在图 1.6(a) 中, $OA=x_1$, $OB=x_2$, 线段 AB 的起点为 A , 终点为 B . 从图形上, 我们可以直观地看到

$$AB=OB-OA.$$

即

$$AB=x_2-x_1. \quad (1)$$

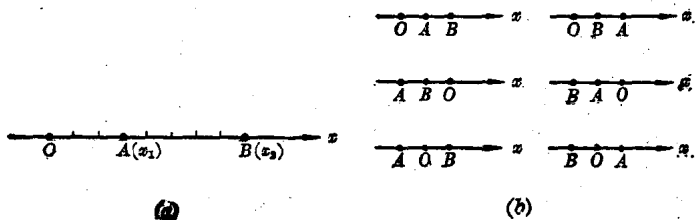


图 1.6

就是说, 有向线段 AB 的数量是终点的坐标减去起点的坐标.

这个结论, 不管 A 、 B 在 x 轴上的位置如何, 总是成立的 (O 、 A 、 B 三点在数轴上的位置关系, 共有 6 种, 见图 1.6 (b)). 我们不妨任选其中的一种情况加以证明 (其余各种情况由读者自己论证):

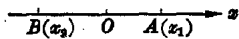


图 1.7

设 $A(x_1)$ 在原点的右边, $B(x_2)$ 在原点的左边. 由图 1.7 可得:

$$BO+OA=BA,$$

而

$$BA=-AB, \quad BO=-OB,$$

代入上式, 得

$$-OB+OA=-AB,$$

$$AB=OB-OA,$$

就是

$$AB=x_2-x_1.$$

如果要计算数轴上 A 、 B 两点间的距离, 只要在求出