必胜数学完全档案

BI SHENG SHU XUE WAN QUAN DANG AN

几何

初中三年级

全国重点中学特高级教师　编写

全力打造

全　全过程　全训练　全综合

新　新理念　新方法　新题型

真　真精讲　真精练　真解析

中国少年儿童出版社

必胜数学完全档案

BI SHENG SHU XUE WAN QUAN DANG AN

几何

初中三年级

主编：张乃达

编写：孙朝仁　吴雪英 姜 洋

中国少年儿童出版社

图书在版编目（CIP）数据

必胜完全档案．初三几何 / 张乃达编．—北京： 中国少年儿童出版社， 2002

ISBN 7－5007－3627－4

Ⅰ．必… Ⅱ．张… Ⅲ．几何课—初中—教学参考资料 Ⅳ．G634

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2002）第 034463 号

必胜几何·完全档案

初三几何

BI SHENG JI HE WAN QUAN DANG AN

出版发行：中国少年儿童出版社

出 版 人：

主　　编：张乃达　　装帧设计：钱　明

主持编辑：陈效师　　封面设计：徐　枝

责任编辑：刘维维　　责任印务：栾永生

社　址：北京东四十二条二十一号　　邮政编码：100708

电　话：010－64032265　　咨询电话：65956688-31

印　刷：北京集惠印刷有限公司　　经　销：全国新华书店

开 本：850×1168　1/32　　印 张：12.875 印张

2002 年 6 月北京第 1 版　　2002 年 7 月北京第 1 次印刷

字 数：296 千字　　印 数：1—10000 册

ISBN 7—5007—3627—4/G·2419

（初三几、物、化）总定价：44.40 元　本册：14.80 元

前　言

本套丛书是以全日制普通初级和高级中学教科书（试验修订本）为依据而编写的，供使用人教版最新教材的初、高中各年级学生学习和使用。

长期以来，如何全面而系统地掌握各学科的基础知识，打牢扎实的学习基本功？如何确定和把握教材中的重点、难点，做到以点带面、融汇贯通？如何运用所学的知识正确地解析各类习题（特别是疑难问题），做到举一反三、触类旁通？以及如何根据学子们的年龄与思维特征，逐步地启迪和培养其综合分析与创新能力？——这些一直都是广大同学与企盼子女能够学业有成的家长所共同关心，并热切渴望得到解决的问题。本丛书正是以解决这些问题为目标，汇集了目前国内一大批具有丰富教学经验的中学特、高级教师及部分资深教育专家共同精心编写的。丛书所阐述的学习方法及选用的各种例题与习题，都是这些著名的教育专家多年从事教学工作心血的结晶。其中有许多是第一次与广大读者见面，它的出版，为我国广阔的教辅图书市场增添了一颗绚丽的明星。

全书共设有**“目标浏览”**、**“实践探究”**、**“点拨引导”**、**“开拓创新”**、**“知识结构”**、**“专题研究”**、**“反馈评估”**等七个栏目，从不同角度和侧面对教材中的知识点、重点和难点进行了扼要的介绍、细致的讲解、全面的分析与深入的研讨。是一套与教材紧密结合，具有极强的指导性、实用性与可读性的优秀综合助学读物。丛书的主要特点有：

点面结合　结构合理　“目标浏览”，简要地指出了每节知识和

能力的要求，提示重点、难点。“知识结构”，对全章知识的相互关系或体系，作出具体说明或列出知识网络图，加以归纳和总结，重点明确突出，知识体系脉络清晰。

精讲细解 注重实效 “实践探究”，精选部分典型例题，详加分析讲解，力求使学生领会解题思路、夯实基础。“点拨引导”，对重点、难点作深入的剖析、释疑，对学生疑惑的问题，给予科学、详尽的点拨。以梯次递进的有效方式，将对一般问题的回答与对疑难问题的解析，浑然溶为一体。

循序渐进 拓展创新 “开拓创新”，对有关知识作了适当的引伸、扩展，介绍和探讨了不同的解题方法及实际应用中有创意的问题，进一步提升了学生的智能水平。“专题研究”，对各章节中重要的有综合意义的问题或方法，进行了深入的探究和拓展。这两个栏目的设立，为学生认识能力与思维能力的提高，开辟了广阔的空间。

自检自测 寓教于练 “反馈评估”，每一小节均精选了一定数量与教学内容密切联系的精典试题，以供学生自我训练与评估使用。在每章（单元）之后，又设有针对性很强的测试卷，以便学生自我检测之用。习题演练是学习的一项极为重要的内容，也为学生检测自己的理解、论证与解题能力，提供了一条佳径。

书山有路勤为径，学海无涯“巧”作舟。我们所说的“巧”，是指能迅速地掌握准确的基本概念、娴熟的解题技巧、富有想象力的创新思维，而这正是我们编写此书的宗旨。同时，也是我们献给广大师生与读者的一份厚礼！

编者

2002 年 6 月

目　录

第六章　解直角三角形

一、锐角三角函数

6.1　正弦和余弦

【目标浏览】

1. 能够正确地应用 $\sin\alpha$，$\cos\alpha$ 表示直角三角形中两边的比.
2. 熟记特殊角的正弦、余弦值并能准确运用.
3. 能熟练运用正弦、余弦定义解答有关问题.
4. 会用计算器由已知锐角求它的正、余弦值，由已知正、余弦值求它对应的锐角.

重点　正、余弦的概念，特殊角的正、余弦值的运算.

难点　运用正、余弦定义解决有关问题.

【点拨引导】

1. 锐角三角函数

把直角三角形中的某个锐角 A 看成变量，当它每取一个确定值时，角 A 的两边(比如对边与斜边)的比值也唯一地确定了.因此，两边比的比值就是角 A 的函数.我们称之为“锐角三角函数”.

2. 正弦、余弦

定义：在 $\mathrm{Rt}\triangle ABC$ 中，有

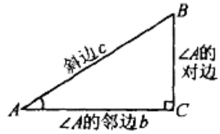


图 6-1

$$\sin A=\frac{\angle A\text{ 的对边}}{\text{斜边}}=\frac{a}{c}$$

$$\cos A=\frac{\angle A\text{ 的邻边}}{\text{斜边}}=\frac{b}{c}$$

则称 $\sin A$ 为 $\angle A$ 的正弦，$\cos A$ 为 $\angle A$ 的余弦.(如图 6-1)

3. 特殊角的正弦和余弦值

α	0°	30°	45°	60°	90°
$\sin\alpha$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\cos\alpha$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0

4. 锐角的正弦与余弦之间的关系

$\sin A=\cos(90^\circ-A)$　　$\cos A=\sin(90^\circ-A)$

$\sin^2A+\cos^2A=1$

5. 正弦函数与余弦函数的性质

(1) 取值范围

$0<\sin A<1$，$0<\cos A<1$.

(2) 增减性

当角度在 $0^\circ\sim90^\circ$ 间变化时，正弦函数值随着角度的增大而增大；余弦函数值随着角度的增大而减小.

随堂练习

1. 选择题

(1) 在 $\triangle ABC$ 中，$\angle C=90^\circ$，$AC=4$，$BC=3$，则 $\sin A$ 等于　　(　　)

A. $\frac{4}{5}$　　B. $\frac{3}{5}$　　C. $\frac{3}{4}$　　D. $\frac{4}{3}$

(2) 在 $\mathrm{Rt}\triangle ABC$ 中，如果各边长度都扩大 2 倍，则锐角 A 的正弦值和余弦值　　(　　)

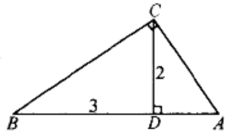
A. 都没有变化　　B. 都扩大 2 倍
C. 都缩小 2 倍　　D. 不能确定

2. 填空题

(1) $\angle A$ 是锐角，已知 $\cos A=\frac{15}{17}$，那么 $\sin(90^\circ-A)=$________.

(2) $\sin30^\circ-\cos60^\circ=$________.

(3) 如图，在 Rt$\triangle ABC$ 中，$\angle ACB=90^\circ$，$CD\perp AB$ 于点 D，$CD=2$，$BD=3$，则 $BC=$______，$\sin\angle ACD=$______.



第 2(3)题

3. 在 Rt$\triangle ABC$ 中，$\cos A=\frac{3}{5}$，$BC=12$，求斜边 AB 上的中线的长.

答案

1. (1) B; (2) A　　2. (1) $\frac{15}{17}$; (2) 0; (3) $\sqrt{13}$、$\frac{2\sqrt{13}}{13}$

3. 7.5

【实例探究】

例 1　如图 6-2，求出各直角三角形中的 $\sin A$、$\cos A$、$\sin B$、$\cos B$ 的值.

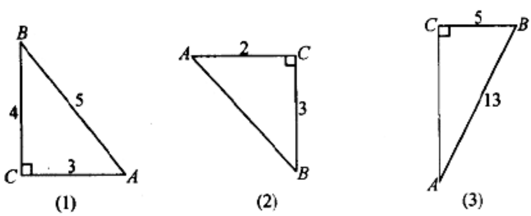


图 6-2

分析　在直角三角形中，只要已知两条边的长，就可以先用

勾股定理求出第三边的长，然后根据正弦、余弦函数的定义，即可求出函数值.

解 (1) $\sin A=\dfrac{BC}{AB}=\dfrac{4}{5}=\cos B$，

$$\sin B=\frac{AC}{AB}=\frac{3}{5}=\cos A.$$

(2) 由勾股定理，得斜边 $AB=\sqrt{AC^2+BC^2}=\sqrt{3^2+2^2}=\sqrt{13}$，

$$\sin A=\frac{BC}{AB}=\frac{3}{\sqrt{13}}=\frac{3\sqrt{13}}{13}=\cos B,$$

$$\sin B=\frac{AC}{AB}=\frac{2}{\sqrt{13}}=\frac{2\sqrt{13}}{13}=\cos A.$$

(3) 由勾股定理，得直角边

$$AC=\sqrt{AB^2-BC^2}=\sqrt{13^2-5^2}=12,$$

$$\sin A=\frac{BC}{AB}=\frac{5}{13}=\cos B,$$

$$\sin B=\frac{AC}{AB}=\frac{12}{13}=\cos A.$$

例 2 如图 6-3，在 Rt△ABC 中，$\angle C=90°$，$a=2b$，求 $\sin A$ 与 $\cos A$ 的值.

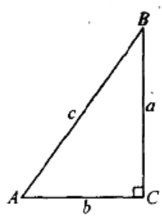


图 6-3

分析 本题中的边长并没有给出具体数值，而呈现出来的是一个关系式“$a=2b$”. 因此，可以设立辅助未知数 k，使得两条直角边 a 与 b 之间的关系更加明确，再由勾股定理用含 k 的代数式表示 c，这样利用定义求 $\sin A$ 与 $\cos A$ 就变得很容易了.

解 设 $b=k(k>0)$，则 $a=2k$，由勾股定理，得

$$c=\sqrt{a^2+b^2}=\sqrt{(2k)^2+k^2}=\sqrt{5}k,$$

所以 $\sin A=\frac{a}{c}=\frac{2k}{\sqrt{5}k}=\frac{2\sqrt{5}}{5}$，$\cos A=\frac{b}{c}=\frac{k}{\sqrt{5}k}=\frac{\sqrt{5}}{5}$.

例 3　已知 $\angle A$ 为锐角，并且 $\sin A=\frac{8}{17}$，求 $\cos A$ 的值.

分析　根据条件“$\sin A=\frac{8}{17}$”，构造一个直角三角形，进而结合例 2 中的解题思路以及 $\cos A$ 的定义即可求出它的值.

解　$\mathrm{Rt}\triangle ABC$，使它的斜边 $AB=17k$，直角边 $BC=8k\ (k>0)$，如图 6-4.

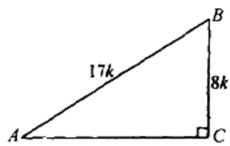


图 6-4

在 $\mathrm{Rt}\triangle ABC$ 中，由勾股定理，得 $AC=\sqrt{AB^2-BC^2}=\sqrt{(17k)^2-(8k)^2}=15k$.

$\therefore\quad \cos A=\frac{AC}{AB}=\frac{15k}{17k}=\frac{15}{17}$.

本题也可直接利用公式 $\sin^2A+\cos^2A=1$ 来求解，因为这个公式反映了同一角的正弦与余弦的关系. 因而本题也可有如下解法：

$\because\quad \sin^2A+\cos^2A=1$，

$$\therefore\quad \cos A=\sqrt{1-\sin^2A}\qquad(\because\ \cos A\geqslant 0)$$

$$=\sqrt{1-\left(\frac{8}{17}\right)^2}=\frac{15}{17}.$$

例 4　求下列各式的值

(1) $\cos^2 60^\circ+\cos^2 45^\circ+\sqrt{2}\sin 30^\circ\sin 45^\circ+\sin^2 23^\circ+\sin^2 67^\circ$；

(2) $\frac{\cos 60^\circ+\sin 45^\circ}{\cos 60^\circ-\sin 45^\circ}+\frac{\cos 60^\circ-\cos 45^\circ}{\sin 30^\circ+\cos 45^\circ}$.

分析　将特殊角的三角函数值准确代入并正确运算即可.

解　(1) 原式 $=\left(\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2+\sqrt{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}+\sin^2 23^\circ+\cos^2 23^\circ$

$$=\frac{1}{4}+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+1=2\frac{1}{4}；$$

(2) 原式 $=\dfrac{\dfrac{1}{2}+\dfrac{\sqrt{2}}{2}}{\dfrac{1}{2}-\dfrac{\sqrt{2}}{2}}+\dfrac{\dfrac{1}{2}-\dfrac{\sqrt{2}}{2}}{\dfrac{1}{2}+\dfrac{\sqrt{2}}{2}}=\dfrac{1+\sqrt{2}}{1-\sqrt{2}}+\dfrac{1-\sqrt{2}}{1+\sqrt{2}}$

$$=-(1+\sqrt{2})^2-(1-\sqrt{2})^2$$

$$=-3-2\sqrt{2}-3+2\sqrt{2}$$

$$=-6.$$

例 5 如图 6-5，在正方形 $ABCD$ 中，M 为 DC 的中点，N 为 BC 上一点，$BN=3NC$，设 $\angle MAN=\alpha$，则 $\cos\alpha$ 的值等于 ( ).

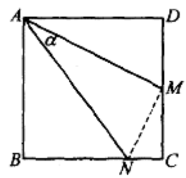


图 6-5

A. $\dfrac{2\sqrt{5}}{5}$　　B. $\dfrac{1}{5}\sqrt{5}$

C. 2　　D. $\dfrac{1}{2}$

分析 为求 $\cos\alpha$ 的值，观察图形发现，$\angle MAN(\alpha)$ 不是直角三角形的一个内角，因此需要构造直角三角形，连结 MN，由已知 $BN=3NC$，$BN+NC=BC$，可得

$$NC=\frac{1}{4}BC.$$

由 $DM=CM$，$CM=\dfrac{1}{2}DC$，在正方形 $ABCD$ 中，$BC=CD$，故 $NC=\dfrac{1}{2}MC$，$DM=\dfrac{1}{2}AD$. 在 $\mathrm{Rt}\triangle MNC$ 和 $\mathrm{Rt}\triangle AMD$ 中，$\dfrac{NC}{MC}=\dfrac{DM}{AD}$，故 $\mathrm{Rt}\triangle MNC \backsim \mathrm{Rt}\triangle AMD$，$\dfrac{MN}{AM}=\dfrac{NC}{DM}=\dfrac{1}{2}$，且 $\angle NMC=\angle MAD$. 又 $\angle MAD+\angle AMD=90^\circ$，所以 $\angle NMC+\angle AMD=90^\circ$，即 $\angle AMN=90^\circ$.

在 $\mathrm{Rt}\triangle AMN$ 中，$\dfrac{MN}{AM}=\dfrac{1}{2}$. 可设 $MN=x$，则 $AM=2x$. 由勾股定理，得

$$AN=\sqrt{AM^2+MN^2}=\sqrt{(2x)^2+x^2}=\sqrt{5}x.$$

$\therefore \quad \cos\alpha = \dfrac{AM}{AN} = \dfrac{2x}{\sqrt{5}x} = \dfrac{2}{5}\sqrt{5}$.

答 选 A.

例 6 如图 6-6，$BC \perp AC$，设 $AD = a$，$BD = b$，$\angle A = \alpha$，$\angle B = \beta$. 求证：$BC = a\sin\alpha + b\cos\beta$.

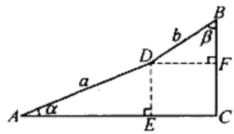


图 6-6

分析 问题涉及到 $\sin\alpha$、$\cos\beta$，因此要找到分别以 α、β 为内角的直角三角形.

证明 过点 D 分别作 $DE \perp AC$，$DF \perp BC$，垂足分别为 E、F，则四边形 $DECF$ 为矩形.

在 $\mathrm{Rt}\triangle AED$ 中，$AD = a$，$\angle A = \alpha$，由 $\sin A = \dfrac{DE}{AD}$，得 $DE = a\sin\alpha$，即 $CF = a\sin\alpha$.

在 $\mathrm{Rt}\triangle BFD$ 中，$BD = b$，$\angle B = \beta$，

由 $\cos B = \dfrac{BF}{BD}$，得 $BF = b\cos\beta$.

$\therefore \quad BC = CF + BF = a\sin\alpha + b\cos\beta$.

【开拓创新】

最优化设计

由于水资源缺乏，B、C 两地不得不从黄河上游的扬水站 A 处引水，这就需要在 A、B、C 之间铺设地下输水管道. 有人设计了三种铺设方案：如图 6-7 中的(1)、(2)、(3)，图中实线表示管道铺设线路，在图(2)中，$AD \perp BC$ 于 D；在图(3)中，$OA = OB = OC$. 为减少渗漏，节约水资源，并降低工程造价，铺设线路应尽量缩短. 已知 $\triangle ABC$ 恰好是一个边长为 a 的等边三角形，请你通过计算，判断哪种铺设方案最好？

分析 先分别计算出三种方案铺设线路的长度，进而再根据计算出结果做出判断.

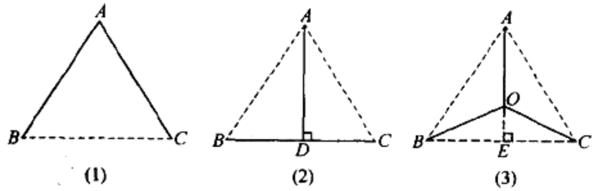


图 6-7

解 图(1)所示方案的线路总长为 $AB+AC=2a$.

如图(2)，在 Rt△ABD 中，$AD=AB\sin 60°=\frac{\sqrt{3}}{2}a$，

∴ 图(2)所示方案的线路总长为 $AD+BC=\left(\frac{\sqrt{3}}{2}+1\right)a$.

如图(3)，延长 AO 交 BC 于 E.

∵ $AB=AC$，$OB=OC$，

∴ $OE\perp BC$，$BE=EC=\frac{a}{2}$.

在 Rt△OBE 中，$\angle OBE=30°$，$OB=\frac{BE}{\cos 30°}=\frac{\sqrt{3}}{3}a$，

∴ 图(3)所示方案的线路总长为

$$OA+OB+OC=3\cdot OB=\sqrt{3}a.$$

比较可知 $\sqrt{3}a<\left(\frac{\sqrt{3}}{2}+1\right)a<2a$，

∴ 图(3)所示的方案最好.

【反馈评估】

1. 选择题

(1) $\sin\alpha$ 表示 ( )

A. 一个角　　　　B. 一个角的度数

C. 一条线段的长度　D. 一个比值

(2) 已知△ABC 的三边 a、b、c 满足条件 $a:b:c=5:12:13$，

则 sinA 等于 ( )

A. $\frac{5}{13}$ B. $\frac{12}{13}$ C. $\frac{5}{12}$ D. $\frac{12}{5}$

(3) 如果 α 是锐角，且 $\cos\alpha=\frac{4}{5}$，那么 $\cos(90^\circ-\alpha)$的值是

( )

A. $\frac{3}{5}$ B. $\frac{4}{5}$ C. $\frac{3}{4}$ D. $\frac{1}{5}$

(4) 已知 $\cos\alpha<0.5$，那么锐角 α 的取值范围是 ( )

A. $60^\circ<\alpha<90^\circ$ B. $0^\circ<\alpha<60^\circ$

C. $30^\circ<\alpha<90^\circ$ D. $0^\circ<\alpha<30^\circ$

2. 填空题

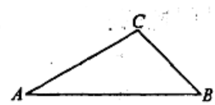
(1) 在 Rt△ABC 中，$\angle C=90^\circ$，$a=8$，$c=17$，则 $\sin B=$ ________.

(2) 在 Rt△ABC 中，$\angle C=90^\circ$，且 $3a=\sqrt{3}\,b$，则 $\cos A=$ ________.

(3) 计算 $2\sin30^\circ-\frac{1}{2}\cos^2 45^\circ-\sin^2 60^\circ=$ ________.

(4) 已知 $\sin42^\circ54'=0.6807$，如果 $\cos\alpha=0.6807$，则 $\alpha=$ ________.

(5) 如图，在△ABC 中，若$\angle A=30^\circ$，$\angle B=45^\circ$，$AC=\frac{\sqrt{2}}{2}$，则 $BC=$ ________.



第 2(5)题

(6) 等腰△ABC 中，底边 $BC=20$，$\sin C=\frac{3}{5}$，则△ABC 的周长= ________.

3. 已知 $a=\sin60^\circ$，$b=\cos45^\circ$，求$\frac{a+2b}{a-b}+\frac{b}{b-a}$的值.

4. 求下列各式中的锐角 α：

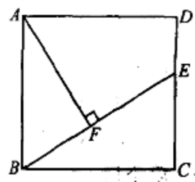
(1) $\cos\alpha=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$;

(2) $2\sin\alpha-1=0$;

(3) $\sin\left(\dfrac{\alpha}{2}+10^\circ\right)=\dfrac{1}{2}$;

(4) $2\cos^2\alpha+3\cos\alpha-2=0$.

5. 如图，已知正方形 $ABCD$ 中，E 是 CD 边上一点，且 $DE=1$，$CE=2$，$AF\perp BE$，垂足为 F.
求 $\sin\angle BAF$ 的值.



第 5 题

6. 已知等腰 $\triangle ABC$ 中，$AB=AC$，$BC=20$，$S_{\triangle ABC}=\dfrac{100\sqrt{3}}{3}$，
求 $\sin B$ 及 $\cos B$ 的值.

7. 已知 $\angle A$、$\angle B$ 均为锐角，并且 $\sin A$ 是方程 $6x^2-11x+3=0$ 的根，$\cos B$ 是方程 $6x^2-x-2=0$ 的根，试求 $\cos^2 A+\sin^2 B$ 的值.

6.2 正切和余切

【目标浏览】

1. 能够正确地应用 $\tan\alpha$、$\cot\alpha$ 表示直角三角形中两边的比.
2. 熟记特殊角的正切、余切值并能准确地运用.
3. 熟练地运用正切、余切定义解决有关实际问题.

重点　正切、余切的定义.

难点　正确理解正切、余切函数的基本性质.

【点拨引导】

1. 正切、余切

在 Rt$\triangle ABC$ 中，$\angle C=90^\circ$，我们把锐角 A 的对边与邻边之