2001年最新版

最新
全国硕士研究生入学统一考试
专用教材

[理工数学（一）]

主编：北京大学 林朝祥 张静
审定：考研命题研究组

中国人民公安大学出版社

目　　录

第一篇　高等数学

第一章　函数、极限、连续

一、本章总括

1. 微积分中研究的对象是函数，函数的概念的实质是变量之间确定的对应关系，变量之间是否有对应关系，就看是否存在一种对应规则，使得其中一个量或几个量定了，另一个量也就被惟一确定，前者是一元函数，后者是多元函数.

函数这部分的重点是：复合函数、反函数和分段函数及函数记号的运算.

2. 极限是微积分的理论基础，研究函数的性质实质上是研究各种类型的极限，如连续、导数、定积分、级数等等，由此可见，极限的重要性.本章的重点内容是极限，既要准确理解极限的概念，性质和极限存在的条件，又要能准确地求出各种极限，求极限的方法很多，综合起来主要有：

① 利用极限的四则运算与幂指数运算法则　② 利用洛必达法则

③ 利用函数的连续性　④ 利用变量替换与两个重要极限

⑤ 数列极限转化为函数极限　⑥ 利用夹逼定理

⑦ 对递归数列先证明极限存在(常用到"单调有界数列有极限"的准则)，再利用递归关系求出极限

⑧ 利用定积分求和式的极限　⑨ 利用泰勒公式

⑩ 利用导数的定义求极限

3. 无穷小就是极限为零的变量，极限问题可归结为无穷小问题，极限方法的重要部分是无穷小分析，或说无穷小阶的估计与分析，要理解无穷小及其阶的概念，学会比较无穷小的阶及确定无穷小阶的方法，会用等价无穷小因子替换求极限.

4. 我们研究的对象是连续函数或除若干点外是连续的函数.由于函数的连续性是通过极限定义的，所以判断函数是否连续及函数间断点的类型等问题本质上仍是求极限，因此这部分也是本章的重点，要掌握判断函数连续性及间断点类型的方法，特别是分段函数在连接点外的连续性.

二、重要定理与公式

【定理 1】　$\lim f(x_0) = A \Leftrightarrow f_-(x_0) = f_+(x_0) = A$.

【定理 2】　$\lim f(x_0) = A \Leftrightarrow f(x_0) = A + \alpha(x)$ 其中$\lim\limits_{x\to x_0}\alpha(x) = 0$.

【定理 3】　(保号性定理)若$\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = A, A > 0$(或 $A < 0$)则存在一个 $\delta > 0$，当 $x \in$

$(x_0-\delta, x_0+\delta)$, $x \neq x_0$ 时，$f(x)>0$，或 $f(x)<0$.

【定理 4】 若 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A$，$f(x)>0$(或 $f(x)<0$)，则 $A\geqslant 0$(或 $A\leqslant 0$).

【定理 5】 单调有界数列必有极限.

【定理 6】 (夹逼定理) 设在 x_0 的邻域内，恒有 $\varphi(x)\leqslant f(x)\leqslant \psi(x)$，且 $\lim\limits_{x\to x_0}\varphi(x)=\lim\limits_{x\to x_0}\psi(x)=A$，则 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A$

[例 1.1] 求 $\lim\limits_{n\to\infty}\int_0^1 x^n\sqrt{x+3}\,\mathrm{d}x$

解 $\because 0\leqslant x\leqslant 1, \sqrt{3}\leqslant\sqrt{x+3}\leqslant 2$(把含 n 的项留下来)

$\therefore \sqrt{3}x^n\leqslant x^n\sqrt{x+3}\leqslant 2x^n$

$\therefore \int_0^1\sqrt{3}x^n\mathrm{d}x\leqslant\int_0^1 x^n\sqrt{x+3}\,\mathrm{d}x\leqslant\int_0^1 2x^n\mathrm{d}x$

而 $\lim\limits_{n\to\infty}\int_0^1\sqrt{3}x^n\mathrm{d}x=\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{3}\,\dfrac{x^{n+1}}{n+1}\Big|_0^1=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt{3}}{n+1}=0$

$\lim\limits_{n\to\infty}\int_0^1 2x^n\mathrm{d}x=\lim\limits_{n\to\infty}2\,\dfrac{x^{n+1}}{n+1}\Big|_0^1=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2}{n+1}=0$

$\therefore \lim\limits_{n\to\infty}\int_0^1 x^n\sqrt{x+3}\,\mathrm{d}x=0$

[例 1.2] 求 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{1+x^n+(\frac{x^2}{2})^n}\,(x\geqslant 0)$

解 1° 当 $0\leqslant x\leqslant 1$ 时

$$1\leqslant\sqrt[n]{1+x^n+(\frac{x^2}{2})^n}\leqslant\sqrt[n]{3}$$

$\because \lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{3}=1$

$\therefore$ 当 $0\leqslant x\leqslant 1$ 时，$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{1+x^n+(\frac{x^2}{2})^n}=1$

2° 当 $1<x\leqslant 2$ 时

$$x<\sqrt[n]{1+x^n+(\frac{x^2}{2})^n}\leqslant\sqrt[n]{3}x$$

又 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{3}x=x$

$\therefore$ 当 $1<x\leqslant 2$ 时，$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{1+x^n+(\frac{x^2}{2})^n}=x$

3° 当 $x>2$ 时

$$\frac{x^2}{2}\leqslant\sqrt[n]{1+x^n+(\frac{x^2}{2})^n}\leqslant\sqrt[n]{3}\cdot\frac{x^2}{2}$$

又 $\because \sqrt[n]{3}\cdot\dfrac{x^2}{2}=\dfrac{x^2}{2}$

$\therefore$ 当 $x>2$ 时，$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{1+x^n+(\frac{x^2}{2})^n}=\dfrac{x^2}{2}$

综上所述 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{1+x^n+(\frac{x^2}{2})^n}=\begin{cases}1 & 0\leqslant x\leqslant 1\\ x & 1<x\leqslant 2\\ \dfrac{x^2}{2} & x>2\end{cases}$

【定理 7】 无穷小的运算性质

1° 有限个无穷小的代数和为无穷小.

2° 有限个无穷小的乘积仍为无穷小.

3° 无穷小乘以有界变量仍为无穷小.

【例 1.3】 $\lim\limits_{n\to\infty}\sin(\sqrt{n^2+1}\cdot\pi)$

解题提示 凡函数的表达式中含有 $a+\sqrt{b}$(或$\sqrt{a}+\sqrt{b}$)则在运算前通常要在分子分母乘以其共轭根式 $a-\sqrt{b}$(或$\sqrt{a}-\sqrt{b}$)反之亦然,然后再做有关分析运算.

解 $\lim\limits_{n\to\infty}\sin(\sqrt{n^2+1}\pi)=\lim\limits_{n\to\infty}\sin[(\sqrt{n^2+1}-n)\pi+n\pi]$

$$=\lim_{n\to\infty}(-1)^n\sin(\sqrt{n^2+1}-n)\pi$$

$$=\lim_{n\to\infty}(-1)^n\sin\frac{\pi}{\sqrt{n^2+1}+n}$$

$\because n\to\infty$ 时 $\sin\dfrac{\pi}{\sqrt{n^2+1}+n}\sim\dfrac{\pi}{\sqrt{n^2+1}+n}\to 0(n\to\infty)$

又 $\because |(-1)^n|=1$

$\therefore \lim\limits_{n\to\infty}\sin(\sqrt{n^2+1}\pi)=0$

【定理 8】 (无穷大与无穷小的关系定理)

在同一变化趋势下无穷大的倒数为无穷小,"非 0" 的无穷小量之倒数为无穷大.

【定理 9】 极限的运算法则

设 $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\(x\to\infty)}}f(x)=A$, $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\(x\to\infty)}}g(x)=B$

则1° $\lim[f(x)\pm g(x)]=\lim f(x)\pm\lim g(x)=A\pm B$

2° $\lim f(x)g(x)=\lim f(x)\cdot\lim g(x)=A\cdot B$

3° $\lim\dfrac{f(x)}{g(x)}=\dfrac{\lim f(x)}{\lim g(x)}=\dfrac{A}{B}\quad(B\neq 0)$

【定理 10】 洛必达法则

法则 Ⅰ ($\dfrac{0}{0}$ 型) 设函数 $f(x),g(x)$ 满足条件

1° $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=0,\lim\limits_{x\to x_0}g(x)=0$;

2° $f(x),g(x)$ 在 x_0 邻域内可导,(在 x_0 处可除外) 且 $g'(x)\neq 0$;

3° $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}$ 存在(或 ∞)

则 $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}$

法则 Ⅰ′ ($\dfrac{0}{0}$ 型) 设函数 $f(x),g(x)$ 满足条件

1° $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=0,\lim g(x)=0$;

2° $\exists$ 一个 $x>0$,当 $|x|>x$ 时,$f(x),g(x)$ 可导,且 $g'(x)\neq 0$;

3° $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}$ 存在(或 ∞).

法则 Ⅱ ($\dfrac{\infty}{\infty}$ 型),设函数 $f(x),g(x)$ 满足条件

1° $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=\infty, \lim\limits_{x\to x_0} g(x)=\infty$;

2° $f(x), g(x)$ 在 x_0 邻域内可导(在 x_0 处可除外),且 $g'(x)\neq 0$;

3° $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}$ 存在(或 ∞)

则 $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}$

法则 Ⅱ′ ($\dfrac{\infty}{\infty}$ 型) 仿法则 Ⅰ′ 可写出

用洛必达法则应注意的事项:

1° 只有$\dfrac{0}{0}$ 或$\dfrac{\infty}{\infty}$ 的未定式,才能用法则,只要是$\dfrac{0}{0}$ 或$\dfrac{\infty}{\infty}$ 则可一直用下去;

2° 每用完一次法则,要将式子整理化简;

3° 为简化运算经常将法则与等价无穷小结合使用;

4° $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ x\to\infty}}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}$ 不存在(非 ∞ 型)$\not\Rightarrow \lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ x\to\infty}}\dfrac{f(x)}{g(x)}$ 不存在;

5° 当 $x\to\infty$ 时,极限式中含有 $\sin x, \cos x$ 不能用法则

当 $x\to 0$ 时,极限式中含有 $\sin\dfrac{1}{x}, \cos\dfrac{1}{x}$ 不能用法则.

[例 1.4] 求$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-1-\sin x}{(\arcsin x)^2}$ ($\dfrac{0}{0}$ 型)

解 $\because \arcsin x\sim x$

$\therefore$ 原极限 $=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-\sin x-1}{x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-\cos x}{2x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x+\sin x}{2}=\dfrac{1}{2}$ ($\dfrac{0}{0}$ 型)

【定理 11】 初等函数在其定义域的区间内连续.

重要公式:

1. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1 \quad \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{\sin x}=1$,

该极限的特点 $\begin{cases}① \dfrac{0}{0} \text{ 型未定式}.\\ ② \sin\square \text{ 与分数线另一侧的变量 } \square \text{ 形式一致}.\end{cases}$

注意:$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1\left(\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sin x}{x}\neq 1, \because \text{ 非}\dfrac{0}{0} \text{ 型未定式}\right)$

[例 1.5] 求 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^2\sin\frac{1}{x}}{\sqrt{2x^2-1}}$

解 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^2\sin\frac{1}{x}}{\sqrt{2x^2-1}}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sin\frac{1}{x}}{\frac{1}{x}}\cdot\dfrac{x}{\sqrt{2x^2-1}}$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{\sin\frac{1}{x}}{\frac{1}{x}}\cdot\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{\sqrt{2x^2-1}}=1\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$$

2. $\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=e$

注意：$\lim\limits_{x\to\infty}(1+\dfrac{1}{x})^x=e$，该极限的特点$\begin{cases}①1^\infty \text{ 型未定式} \\ ② \text{ 括号中 1 后的变量(包括符号) 与幂互为倒数}\end{cases}$

解题提示

1° 若极限呈 1^∞ 型，但第二个特点不具备，则通常凑指数幂使 ② 成立.

2° 凡是 1^∞ 型未定式，其结果：底必定是 e，幂可这样确定

设 $\lim u(x)=0,\lim v(x)=\infty$，则

$\lim(1\pm u(x))^{v(x)}=\lim e^{v\ln(1\pm(u(x))}=e^{\lim v(x)\ln(1\pm u(x))}=e^{\lim v(x)[\pm u(x)]}=e^{\pm\lim v(x)u(x)}$

这是因为 $\ln(1\pm u(x))\sim\pm u(x)$

用语言叙述即括号中 1 后的变量(包括符号) 与幂乘积的极限，就是 1^∞ 型未定式极限的幂

[例 1.6] 求下列极限

(1) $\lim\limits_{x\to0}(1+\sin x^2)^{\frac{1}{1-\cos x}}$ (2) $\lim\limits_{x\to0}(1-2x)^{\frac{3}{\sin x}}$

(3) $\lim\limits_{x\to0}(\dfrac{1+\operatorname{tg}x}{1+\sin x})^{\frac{1}{x^3}}$

解 (1) 该极限为 1^∞ 型，因此其底必定为 e，其幂求之，

$\lim\limits_{x\to0}\sin x^2\dfrac{1}{1-\cos x}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin x^2}{1-\cos x}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x^2}{\frac{1}{2}x^2}=2$， ∴ 其原极限 $=e^2$

(2) $\lim\limits_{x\to0}(-2x)\dfrac{3}{\sin x}=-6$， ∴ 其原极限 $=e^{-6}$

(3) 原式 $=\lim\limits_{x\to0}(1+\dfrac{\operatorname{tg}x-\sin x}{1+\sin x})^{\frac{1}{x^3}}$

$\because \lim\limits_{x\to0}\dfrac{\operatorname{tg}x-\sin x}{(1+\sin x)}\cdot\dfrac{1}{x^3}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin x}{x}\cdot\dfrac{1-\cos x}{x^2}\cdot\dfrac{1}{\cos x(1+\sin x)}$

$$=\lim_{x\to0}\frac{\sin x}{x}\cdot\frac{\frac{1}{2}x^2}{x^2}\cdot\frac{1}{\cos x(1+\sin x)}=\frac{1}{2}$$

∴ 原极限 $=e^{\frac{1}{2}}$

[例 1.7] 求 $\lim\limits_{x\to\infty}(\cos\dfrac{1}{x}+\sin\dfrac{1}{x})^x$

解 原式 $=\lim\limits_{x\to\infty}[(\cos\dfrac{1}{x}+\sin\dfrac{1}{x})^2]^{\frac{x}{2}}=\lim\limits_{x\to\infty}(1+\sin\dfrac{2}{x})^{\frac{x}{2}}$

$\because \lim\limits_{x\to\infty}\sin\dfrac{2}{x}\cdot\dfrac{x}{2}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sin\frac{2}{x}}{\frac{2}{x}}=1$

∴ 原极限 $=e$

[例 1.8] 求 $\lim\limits_{x\to0}\left(\dfrac{e^x+e^{2x}+\cdots+e^{nx}}{n}\right)^{\frac{1}{x}}$

解 原式 $=\lim\limits_{x\to0}\left(1+\dfrac{e^x+e^{2x}+\cdots+e^{nx}-n}{n}\right)^{\frac{1}{x}}$

$\therefore \lim\limits_{x\to0}\dfrac{e^x+e^{2x}+\cdots+e^{nx}-n}{n}\cdot\dfrac{1}{x}\ \underline{\underline{\text{用洛必达法则}}}\ \lim\limits_{x\to0}\dfrac{e^x+e^{2x}+\cdots+ne^{nx}}{n}=$
$\dfrac{1+2+\cdots+n}{n}=\dfrac{1}{2}(n+1)$

[例1.9]　求 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{(x+a)^{x+b}(x+b)^{x+a}}{(x+a+b)^{2x+a+b}}$

解　原式 $=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{(x+a)^{x+b}(x+b)^{x+a}}{(x+a+b)^{x+a}(x+a+b)^{x+b}}$

$=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1}{(1+\dfrac{b}{x+a})^{x+b}(1+\dfrac{a}{x+b})^{x+a}}$

$\because \lim\limits_{x\to\infty}(1+\dfrac{b}{x+a})^{x+b}=e^{b},\lim\limits_{x\to\infty}(1+\dfrac{a}{x+b})^{x+a}=e^{a}$

$\therefore$ 原极限 $=\dfrac{1}{e^{b}\cdot e^{a}}=e^{-(a+b)}$

3° $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_{n-1}x+a_n}{b_0x^n+b_1x^{n-1}+\cdots+b_{m-1}+b_m}=\begin{cases}\dfrac{a_0}{b_0} & n=m\\ 0 & n<m\\ \infty & n>m\end{cases}$

求 $x\to0$ 时的极限，通常用"抓大头"的方法处理，所谓"抓大头"就是抓住关于 x 的最高次数的项，而把其余的项省略掉，例如：

$$\lim_{x\to\infty}\frac{a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_n}{b_0x^m+b_1x^{m-1}+\cdots+b_m}=\lim_{x\to\infty}\frac{a_0x^n}{b_0x^m}$$

[例1.10]　已知 $\lim\limits_{x\to\infty}(\dfrac{x^2+1}{x+1}-ax+b)=3$，求常数 a,b.

解　原极限 $=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{(1-a)x^2+(b-a)x+1+b}{x+1}=3$

由公式3°有 $\begin{cases}1-a=0\\ b-a=3\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a=1\\ b=4\end{cases}$

4°　函数 $f(x)$ 在 $x=x_0$ 处连续 $\Leftrightarrow f_-(x_0)=f_+(x_0)=f(x_0)$，

[例1.11]　设 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{A(\cos2x-\cos3x)}{x^2} & x<0\\ 4 & x=0\\ \dfrac{B\sin x+\int_0^x\cos t^2\mathrm{d}t}{x} & x>0\end{cases}$ 在 $x=0$ 处连续，试确定 A,B.

解　$f_-(0)=\lim\limits_{x\to0^-}\dfrac{A(\cos2x-\cos3x)}{x^2}=\lim\limits_{x\to0^-}\dfrac{A(-\sin2x+3\sin3x)}{2x}$

$=\lim\limits_{x\to0^-}\dfrac{A(-4\cos2x+9\cos3x)}{2}=\dfrac{5}{2}A$

$f_+(0)=\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{B\sin x+\int_0^x\cos t^2\mathrm{d}t}{x}=\lim\limits_{x\to0^+}(B\cos x+\cos x^2)=1+B$

$\because f(x)$ 在 $x=0$ 处连续，$\therefore f_-(0)=f_+(0)=f(0)$

即 $\dfrac{5}{2}A=1+B=4\Rightarrow A=\dfrac{8}{5},B=3$

5°　当 $x\to+\infty$ 时，以下各函数趋于 $+\infty$ 的速度

$\xrightarrow[\text{由慢到快}]{\ln x,\ x^{a}(a>0),\ a^{x}(a>1),\ x^{x}}$

当 $n \to \infty$ 时,

$$\xrightarrow[\text{由慢到快}]{\ln n,\ n^{\alpha}(\alpha>0),\ a^{n}(a>1),\ n!,\ n^{n}}$$

知道了函数趋于无穷($+\infty$)的速度后,即可求出一些极限　例

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a^n}{n^n}=0,\ \lim_{n\to\infty}\frac{n!}{\ln n}=\infty$$

6° 几个常用极限

$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a}\,(a>0)=1$,特例 $\lim\limits_{n\to\infty}n^{\frac{1}{n}}=1$

$\lim\limits_{x\to+\infty}\operatorname{arctg}x=\dfrac{\pi}{2}$, $\lim\limits_{x\to-\infty}\operatorname{arctg}x=-\dfrac{\pi}{2}$

$\lim\limits_{x\to+\infty}\operatorname{arccot}x=0$ $\lim\limits_{x\to-\infty}\operatorname{arccot}x=\pi$

$\lim\limits_{x\to-\infty}e^x=0$, $\lim\limits_{x\to+\infty}e^x=\infty$

$\lim\limits_{x\to0}x^x=1$

三、题型分析

(一) 求反函数

[例1.12] 求 $y=\sqrt[3]{x+\sqrt{1+x^2}}+\sqrt[3]{x-\sqrt{1+x^2}}$ 的反函数,并求其定义域.

分析 求 $f(x)$ 的反函数的一般方法是:由 y 从方程 $f(x)=y$ 中解出 $x=\varphi(y)$ 由本题的特点,应考察它的等价方程即等式两端三次方.

解 将等式两端三次方并化简得 $y^3=2x-3y$ 则 $x=\dfrac{1}{2}(y^3+3y)$,因此反函数为 $y=\dfrac{1}{2}(x^3+3x)$,它的定义域为 $(-\infty,+\infty)$.

[例1.13] 求 $y=\dfrac{1}{2}(x+\dfrac{1}{x})$ 在 $|x|\geqslant1$ 上的反函数.

解 考察方程 $y=\dfrac{1}{2}(x+\dfrac{1}{x})$,即 $x^2-2xy+1=0$,它有解 $\Leftrightarrow y^2\geqslant1$,解为 $x=y\pm\sqrt{y^2-1}$

当 $y\geqslant1$ 时,$x=y+\sqrt{y^2-1}\geqslant1$(另一要舍去,因 $y-\sqrt{y^2-1}\leqslant1$)

当 $y\leqslant-1$ 时 $x=y-\sqrt{y^2-1}\leqslant-1$($-1\leqslant y+\sqrt{y^2-1}<0$)

因此所求反函数为 $y=\begin{cases}x+\sqrt{x^2-1} & x\geqslant1\\ x-\sqrt{x^2-1} & x\geqslant-1\end{cases}$

注 ① 不要把上例中的反函数写成 $y=x+\sqrt{x^2-1}(x\geqslant1)$ 和 $y=x-\sqrt{x^2-1}(x\leqslant-1)$ 这样容易误解为有两个反函数.

② 若能确定 Y,$\forall y\in Y$,则 $y=f(x)$ 可惟一解出 x,$\forall y\overline{\in} Y$,方程 $y=f(x)$ 无解,则不仅求出了反函数,而且也求出了反函数的定义域 Y.

(二) 求复合函数

[例1.14] 设 $f(x)=\dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}$ 求 $\underbrace{f(f(f\cdots f(x)))}_{n\text{次复合}}\triangleq f_n(x)$

解 $f_2(x) \triangleq f(f(x)) = \dfrac{f(x)}{\sqrt{1+f^2(x)}} = \dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}} \Big/ \sqrt{1+\dfrac{x^2}{1+x^2}} = \dfrac{x}{\sqrt{1+2x^2}}$

若 $f_k(x) = \dfrac{x}{\sqrt{1+kx^2}}$ 则 $f_{k+1}(x) = \dfrac{f_k(x)}{\sqrt{1+kf_k^2(x)}} = \dfrac{x}{\sqrt{1+kx^2}} \Big/ \sqrt{1+\dfrac{x^2}{1+kx^2}}$

$= \dfrac{x}{\sqrt{1+(k+1)x^2}}$

[例 1.15] 填空或选择填空.

① 设 $f(x) = \begin{cases} 1 & |x| \leqslant 1 \\ 0 & |x| > 1 \end{cases}$ 则 $f(f(x)) =$ ________.

② 设 $f(x) = \begin{cases} x^2 & x \leqslant 0 \\ x^2 + x & x > 0 \end{cases}$ 则 $f(-x) =$ ________.

A. $\begin{cases} -x^2 & x \leqslant 0 \\ -(x^2+x) & x > 0 \end{cases}$　　B. $\begin{cases} -(x^2+x) & x < 0 \\ -x^2 & x \geqslant 0 \end{cases}$

C. $\begin{cases} x^2 & x \leqslant 0 \\ x^2 - x & x > 0 \end{cases}$　　D. $\begin{cases} x^2 - x & x < 0 \\ x^2 & x \geqslant 0 \end{cases}$

解 1° $\forall x$, 有 $|f(x)| \leqslant 1 \therefore f(f(x)) = 1$, $(\forall x \in (-\infty, +\infty))$

2° 直接计算

当 $x \geqslant 0$ 时, $-x \leqslant 0, f(-x) = (-x)^2 = x^2$;

当 $x < 0$ 时, $-x > 0, f(-x) = (-x)^2 + (-x) = x^2 - x$,

$\therefore f(-x) = \begin{cases} x^2 & x \geqslant 0 \\ x^2 - x & x < 0 \end{cases}$

注 对分段函数,求复合函数的关键是:对内层函数,确定区间段使得它的值域属于外层函数的某段定义域中.

(三) 利用函数概念求函数表达式

[例 1.16] 已知 $f(x) = e^{x^2}$, $f(\varphi(x)) = 1 - x$ 且 $\varphi(x) \geqslant 0$, 求 $\varphi(x)$ 并写出它的定义域.

分析 这里已知 $f(u)$ 及 $f(u)$ 与某 $u = \varphi(x)$ 的复合函数 $f(\varphi(x))$, 求中间变量 $u = \varphi(x)$, 实质是求 f 的反函数。

解 $\because f(\varphi(x)) = e^{\varphi^2(x)} = 1 - x$, 则 $\varphi^2(x) = \ln(1-x)$

$\therefore \varphi(x) = \sqrt{\ln(1-x)}$

$\because \ln(1-x) \geqslant 0$, 知 $x \leqslant 0$, $\therefore \varphi(x)$ 的定义域为 $x \leqslant 0$

[例 1.17] 已知 $f(e^x) = 1 + x + \sin x$, 求 $f(x)$.

解 令 $e^x = t$, 则 $x = \ln t \therefore f(t) = 1 + \ln t + \sin(\ln t)$, $\therefore f(x) = 1 + \ln x + \sin(\ln x)$.

注 设 $f(\varphi(x)) = \psi(x)$ 其中 $\psi(x)$ 是已知函数, 那么有两类问题, 一是已知 f 求 φ, 另一是已知 φ 求 f.

若 f 已知, 并存在反函数, 则 $\varphi(x) = f^{-1}(\psi(x))$, 若 φ 已知, 并存在反函数令 $t = \varphi(x)$, 则 $x = \varphi^{-1}(t)$, 从而 $f(t) = \psi(\varphi^{-1}(t))$, 即 $f(x) = \psi(\varphi^{-1}(x))$ 因此这两类实质上都是求反函数问题.

[例 1.18] 设 $f(\dfrac{x+1}{2x+1}) = 2f(x) + x$, 求 $f(x)$.

解　令 $t=\frac{x+1}{2x-1}$，则 $2tx-t=x+1$ 即 $x=\frac{t+1}{2t-1}$，从而 $f(t)=2f\left(\frac{t+1}{2t-1}\right)+\frac{t+1}{2t-1}$，即 $f(x)=2f(\frac{x+1}{2x-1})+\frac{x+1}{2x-1}$，将原式代入得

$f(x)=2(2f(x)+x)+\frac{x+1}{2x-1}$ 即 $-3f(x)=2x+\frac{x+1}{2x-1}$ 亦即 $f(x)=\frac{4x^2-x+1}{3(1-2x)}$

注　设 $f(\frac{\alpha_1 x+\beta_1}{\alpha_2 x+\beta_2})=af(x)+\varphi(x)$，其中 $\alpha_1,\alpha_2,\beta_1,\beta_2,a$ 为已知常数，$\varphi(x)$ 为已知函数，只要 $\beta_2=-\alpha_1, a\neq 1$. 就可利用例 1.18 中的方法求 $f(x)$.

(四) 求 $\frac{0}{0}$ 型或 $\frac{\infty}{\infty}$ 型的极限

解题思路　求 $\frac{0}{0}$ 型或 $\frac{\infty}{\infty}$ 型的极限方法有：

1° 通过恒等变型约去分子、分母中极限为 0 或 ∞ 的因子，然后用极限四则运算法则.

2° 用洛必达法则

3° 用泰勒公式

4° 用变量替换与重要极限公式

[例 1.19]　求下列极限.

(1) $W=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+\operatorname{tg}x}-\sqrt{1+\sin x}}{x(1-\cos x)}$　　(2) $W=\lim\limits_{x\to -\infty}\frac{\sqrt{4x^2+x-1}+x+1}{\sqrt{x^2+\sin x}}$

(3) $W=\lim\limits_{x\to 0}\frac{3\sin x+x^2\cos\frac{1}{x}}{(1+\cos x)\ln(1+x)}$

解　(1) 恒等变形：分子、分母同乘 $\sqrt{1+tgx}+\sqrt{1+\sin x}$ 得

$$W=\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{tg}x-\sin x}{x(1-\cos x)(\sqrt{1+\operatorname{tg}x}+\sqrt{1+\sin x})}=\frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{tg}x(1-\cos x)}{x(1-\cos x)}=\frac{1}{2}$$

(2) 恒等变形：分子、分母同除以 $-x$，$(x<0,\ -x=|x|=\sqrt{x^2})$，得

$$W=\lim_{x\to -\infty}\frac{\sqrt{4+\frac{1}{x}-\frac{x}{x^2}}-1-\frac{1}{x}}{\sqrt{1+\frac{\sin x}{x^2}}}=\frac{2-1}{1}=1$$

(3) 恒等变形，分子分母同除以 x，得

$$W=\frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\frac{3\frac{\sin x}{x}+x\cos\frac{1}{x}}{\frac{\ln(1+x)}{x}}=\frac{1}{2}\cdot 3=\frac{3}{2}$$

注　① 这几题均是作简单恒等变形后，消去极限为 0 或 ∞ 的因子，或直接相削或等价无穷小取极限取消.

② 这几题均为 $\frac{0}{0}$ 型或 $\frac{\infty}{\infty}$ 型的极限，有的也可用洛必达法则，但并不简单，而题(3) 不能用洛必达法则因为 $\frac{(3\sin x+x^2\cos\frac{1}{x})'}{x'}$ 的极限不存在.

[例 1.20]　求下列极限.

(1) $W=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\ln(1+\frac{1}{x})}{\operatorname{arccot}x}$;　　(2) $W=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-e^{\sin x}}{x-\sin x}$

(3) $W=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{1-\sqrt{\cos x}}{x(1-\cos\sqrt{x})}$;　　(4) $W=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\arcsin x-\sin x}{\operatorname{arctg}x-\operatorname{tg}x}$

解　(1) 属$\frac{0}{0}$型,先用等价无穷小因子替代,再用洛必达法则,$\ln(1+\frac{1}{x})\sim\frac{1}{x}(x\to\infty)$

$$W=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{1}{x}}{\operatorname{arccot}x}=\lim_{x\to\infty}\frac{-\frac{1}{x^2}}{-\frac{1}{1+x^2}}=\lim_{x\to\infty}\frac{1+x^2}{x^2}=1$$

(2) 属$\frac{0}{0}$型,看其特点不要马上用洛必达法则,先用恒等变形与变量替换后再用,即

$$W=\lim_{x\to 0}\frac{e^x(1-e^{\sin x-x})}{x-\sin x}=\lim_{x\to 0}e^x\lim_{t\to 0}\frac{1-e^{-t}}{t}=\lim_{t\to 0}\frac{e-t}{1}=1$$

(3) 先作恒等变形,并作等价无穷小因子替换:$1-\cos x\sim\frac{1}{2}x^2$,$1-\cos\sqrt{x}\sim\frac{1}{2}x(x\to 0^+)$,

$$W=\lim_{x\to 0^+}\left(\frac{1-\cos x}{x(1-\cos\sqrt{x})}\cdot\frac{1}{1+\cos\sqrt{x}}\right)=\frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{2}x^2}{x\cdot\frac{1}{2}x}=\frac{1}{2}$$

(4) 直接用洛必达法则,得

$$W=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}-\cos x}{\frac{1}{1+x^2}-\frac{1}{\cos^2 x}}=\lim_{x\to 0}\frac{1-\sqrt{1-x^2}\cos x}{\sqrt{1-x^2}}\cdot\frac{(1+x^2)\cos^2 x}{\cos^2 x-(1+x^2)}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{(1+x^2)\cos^2 x}{\sqrt{1-x^2}}\lim_{x\to 0}\frac{1-\sqrt{1-x^2}\cos x}{\cos^2 x-(1+x^2)}=\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1-x^2}\sin x+\frac{x\cos x}{\sqrt{1-x^2}}}{-2\cos x\sin x-2x}$$

$$=-\frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1-x^2}\,\frac{\sin x}{x}+\frac{\cos x}{\sqrt{1-x^2}}}{\cos x\,\frac{\sin x}{x}+1}$$

$$=-\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{2}=-\frac{1}{2}$$

[**例** 1.21]　用泰勒公式求极限 $W=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+x+x^2)+\ln(1-x+x^2)}{x\sin x}$

解　$\ln(1+x+x^2)+\ln(1-x+x^2)$

$$=x+x^2-\frac{1}{2}(x+x^2)^2+0(x^2)+(-x+x^2)-\frac{1}{2}(-x+x^2)^2+0(x^2)$$

$$=x^2+0(x^2)$$

也可如下求展开式:

$$\ln(1+x+x^2)+\ln(1-x+x^2)=\ln\frac{1-x^3}{1-x}+\ln\frac{1+x^3}{1+x}$$

$$\ln(1-x^3)-\ln(1-x)+\ln(1+x^3)-\ln(1+x)$$

$$= -x^3 + 0(x^3) - [(-x) - \frac{1}{2}x^2 + 0(x^2) + x^3 + 0(x^3) - (x - \frac{1}{2}x^2 + 0(x^2))]$$

$$= x^2 + 0(x^2)$$

$$\therefore W = \lim \frac{x^2 + 0(x^2)}{x\sin x} = 1$$

注 ①$(x + x^2)^2 = x^2 + 2x^3 + x^4 = x^2 + 0(x^2) \quad (x \to 0)$

② 本题中的题目是$\frac{0}{0}$型的,也可用洛必达法则,若对泰勒公式不熟练,也可考虑不用泰勒公而用洛必达法则来求解.

[例 1.22] 试求 $W = \lim\limits_{x \to 0} \frac{1}{x} / e^{-1/x^2}$

分析 将欲求的极限看成$\frac{0}{0}$型,便有$\frac{e^{\frac{-1}{x^2}}}{x} = \lim\limits_{x \to 0} \frac{2\frac{1}{x^3}e^{-1/x^2}}{1} = \lim\limits_{x \to 0} \frac{2}{x^3}e^{-1/x^2}$ 易见等式右端的极限变得更复杂了,若将欲求之极限看成$\frac{\infty}{\infty}$型,即 $W = \lim\limits_{x \to 0} \frac{\frac{1}{x}}{e^{\frac{1}{x^2}}}$ 再用洛必达法则得答案.

解 $W = \lim\limits_{x \to 0} \frac{\frac{1}{x}}{e^{-1/x^2}} = \lim\limits_{x \to 0} \frac{-\frac{1}{x^2}}{-\frac{2}{x^3}e^{1/x^2}} = \lim\limits_{x \to 0} \frac{x}{2e^{1/x^2}} = 0$ 事实上,这里也可通过变量替换把$\frac{0}{0}$型变成$\frac{\infty}{\infty}$型,

即$\lim\limits_{x \to 0} \frac{1}{x}e^{-1/x^2} \xlongequal{t = \frac{1}{x}} \lim\limits_{t \to \infty} \frac{t}{e^{t^2}} = \lim\limits_{t \to \infty} \frac{1}{2te^{t^2}} = 0$

注 ① 若是$\lim\limits_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)}$是$\frac{0}{0}$型未定式,那么$\lim\limits_{x \to 0} \frac{(\frac{1}{g(x)})}{(\frac{1}{f(x)})}$便是$\frac{\infty}{\infty}$型未定式,因此在求它的极限时,将它看成$\frac{0}{0}$型用洛必达法则好呢?还是看成$\frac{\infty}{\infty}$型用洛必达法则好呢?答案是视情况而定,二种方式都去试,通常有一个能成功.

② 类似方法可以证明 $\lim \frac{e^{-1/x^2}}{x^k} = 0$

(五)求 $0 \cdot \infty$ 或 $\infty - \infty$ 型的极限

[例 1.23] 求下列极限

(1) $W = \lim\limits_{x \to 1}(1 - x)\mathrm{tg}\frac{\pi x}{2}$ (2) $W = \lim\limits_{x \to +\infty} x(a^{\frac{1}{x}} - b^{\frac{1}{x}}) \quad (a, b > 0)$

(3) $W = \lim\limits_{x \to 1-0} \sqrt{1 - x^2}\cot\sqrt{\frac{1 - x}{1 + x}}$

解 (1) 属 $0 \cdot \infty$ 型可化为$\frac{0}{0}$型,则 $W = \lim\limits_{x \to 1} \frac{1 - x}{\cot\frac{\pi x}{2}} = \lim\limits_{x \to 1} \frac{-1}{-\frac{\pi}{2}\csc^2\frac{\pi x}{2}} = \frac{2}{\pi}$

注 本题也可化为$\frac{\infty}{\infty}$型.

(2) 属 $\infty \cdot 0$ 型,可化为$\frac{0}{0}$型,则

$$W = \lim_{x\to+\infty}\frac{a^{\frac{1}{x}} - b^{\frac{1}{x}}}{\frac{1}{x}} \xlongequal{t=\frac{1}{x}} \lim_{t\to0}\frac{a^t - b^t}{t}$$

$$= \lim_{t\to0}(a^t\ln a - b^t\ln b) = \ln\frac{a}{b}$$

注 本题化为$\frac{0}{0}$是自然的，若化为$\frac{\infty}{\infty}$型，即$\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x}{\frac{1}{(a^{\frac{1}{x}} - b^{\frac{1}{x}})}}$，再用洛必达法则就繁了.

(3) 属 $0\cdot\infty$ 型，按题目特点应做恒等变形与等价无穷小因子替换，则

$$W = \lim_{x\to1-0}\left[\frac{\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}}{\sin\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}}(1+x)\cos\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}\right]$$

$$= \lim_{x\to1-0}\frac{\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}}{\sin\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}}\cdot\lim_{x\to1-0}\left((1+x)\cos\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}\right) = 2$$

[**例 1.24**] 求下列极限

(1) $W = \lim\limits_{x\to0}\left(\frac{1}{\sin^2 x} - \frac{1}{x^2}\right)$

(2) $W = \lim\limits_{x\to\infty}x\left[\sin\left(\ln\left(1+\frac{3}{x}\right)\right) - \sin\left(\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)\right)\right]$

解 (1) 属 $\infty\cdot\infty$ 型，先化成$\frac{0}{0}$型，即 $W = \lim\limits_{x\to0}\frac{x^2 - \sin^2 x}{x^2\sin^2 x}$，做等价无穷小因子替换与恒等变形得

$$W = \lim_{x\to0}\frac{x - \sin x}{x^3}\cdot\lim_{x\to0}\frac{x + \sin x}{x}$$

$$= 2\lim_{x\to0}\frac{x - \sin x}{x^3} \xlongequal{*} 2\lim_{x\to0}\frac{\frac{1}{6}x^3 + 0(x^3)}{x^3} = \frac{1}{3}$$

注 用洛必达法则可求出结果，而这里(*)用了 $\sin x$ 的泰勒展开式

$$x - \sin x = x - \left(x - \frac{1}{6}x^3 + 0(x^3)\right) = \frac{1}{6}x^3 + 0(x^3) \quad (x\to0)$$

(2) 把原式改写成

$$x\left[\sin\left(\ln\left(1+\frac{3}{x}\right)\right) - \sin\left(\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)\right)\right] = 2\frac{\sin\left(\ln\left(1+\frac{3}{x}\right)\right) - \sin\left(\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)\right)}{\left(1+\frac{3}{x}\right) - \left(1+\frac{1}{x}\right)}$$

$$= 2\left[\frac{f\left(1+\frac{3}{x}\right) - f\left(1+\frac{1}{x}\right)}{\left(1+\frac{3}{x}\right) - \left(1+\frac{1}{x}\right)}\right]$$

其中 $f(t) = \sin(\ln(t))$ 因而可用微积分中值公式得

$W = 2\lim\limits_{x\to\infty}f'(\xi)$，$\xi$ 在$\left(1+\frac{3}{x}\right)$与$\left(1+\frac{1}{x}\right)$之间，$x\to\infty$ 时 $\xi\to1$，从而

$$W = 2\lim_{x\to\infty}\cos(\ln\xi)\cdot\frac{1}{\xi} = 2\lim_{\xi\to1}\cos(\ln\xi)\cdot\frac{1}{\xi} = 2$$