高中数学复习指导

（理科用）

湖南教育出版社
广东教育出版社
河南教育出版社

GAOZHONGSHUXUE
FUXIZHIDAO

出 版 说 明

我国古代教育家孔丘说："温故而知新"，讲的是复习的重要性。为了帮助高中同学更好地复习所学知识，我们协作编辑出版了一套复习指导用书，计有政治、语文、英语、历史、地理、数学、物理、化学、生物等九册，欢迎大家选用。

复习功课还要指导吗？要的，因为许多同学复习很不得法。有的复习抓不住重点，眉毛胡子一把抓，时间花了不少，效果却不显著；有的复习缺乏系统性，东一耙子西一扫帚，杂乱无章，我们编辑的这套复习指导，就是针对高中一些同学复习中常见的缺点毛病，给予必要的提示和建议，使大家少走弯路。在复习内容上，每本书都根据学科的不同，列有重点、难点。对疑难问题设有《疑难解析》一栏，重点讲解，专供复习时参阅。书中提供的复习资料，也都经过了整理和归纳，不但简明扼要，而且保持了知识的系统性。在复习方法上，每本书都根据高中同学在学习中常出现的问题、易犯的错误，有的放矢地加强了某些基础知识和基本技能的训练，并且相应地提出了一些复习建议，供大家复习时参考。是故，名之为"指导"，以示与一般复习资料的不同。

湖南
河南教育出版社　广东人民出版社

一九八四年九月

目　　录

代　　数

立 体 几 何

三　角

平面解析几何

微积分初步

综合运用

谈怎样学好高中数学

数学，这门内容丰富、分支繁多、逻辑严谨、高度抽象而又应用广泛的学科，处处闪耀着人类智慧的光辉。她，奥妙无穷，令人神往；她，以无穷的力量推动着科学技术的发展，确实无愧于"自然科学的皇后"，"科学之母"的称号。

正因为数学有如此高的价值，所以许多中学生对学习数学有着浓厚的兴趣，并付出了辛勤的劳动。但是，有些人由于学习不甚得法，往往事倍功半，收效甚微。对于数学上一个个的概念，一条条的定理，一则则的公式，他们可以一字不差地背诵。但在演解一些具体的数学习题时，又往往无从下手，甚至束手无策。因此，不少人经常问我们"怎样才能学好高中数学"？特别在已经学完之后，又怎样有计划地、系统地进行全面复习，以便真正掌握高中数学的基本内容与基本方法。要回答这个问题不是一件容易的事。因为数学具有高度的抽象性和技巧性，所以，在学习上十分需要丰富的想象力和无穷的创造力，而不存在一个学习数学的模式，认为只要按照这个模式去做，就可以轻而易举地学好数学。然而，任何事物都具有一定的规律性，数学也自然如此，只要我们找到它，并掌握它，要学好数学，也并非难事。下面，我们根据数学的特点，并结合长期教学中的经验，就怎样学好高中数学谈谈体会，供学习时参考。

一、端正态度，不断进取

学习是一种艰苦的脑力劳动，人们称之为“锻炼人类思维的体操”的数学更是如此。因此，学习高中数学首先要有一股艰苦踏实、不断进取的顽强毅力。“在科学上面是没有平坦的大路可走的，只有那在崎岖小路上不畏劳苦，勇于攀登的人，才有可能从一个高峰达到另一个高峰。”马克思的这段名言是我们学习的最好座右铭。

“书山有路勤为径，学海无涯苦作舟”。学习是要吃苦的。当你在学习中遇到困难时，你也许会感到苦恼，但一旦战胜了这个困难，又向新的高度进军时，你一定会尝到那种胜利者所特有的欢乐。这就叫苦中有乐，乐在其中。如果你在学习中浅尝辄止，满足于一知半解，不愿多看书、多动脑，甚至为了应付考试，投机取巧，猜题押题，以这样的态度对待学习，没有不失败的。

所以，要学好数学，一定要有一个正确的学习态度，这样，在学习中才能踏踏实实，一步一个脚印地前进。

二、基本概念，要学懂弄通

高中数学概念繁多。因为概念是赖以思维的基础，所以必须对概念有清晰透彻的理解，而决不能停留在一字一句的背诵上。

例如：一一映射、逆映射、反函数等等，这些概念的定义，字句较长且绕口，理解起来较为困难，所以必须在理解的基础上抓住关键的字句，才能把握其实质。例如：由集A到集B的一一映射的实质，是在映射的前提下再加上两条：1.原象不同，

象亦不同；2.B中的每个元素在A中都有原象。逆映射的实质在于它是一个由象“找”原象的映射，其前提是原映射是一个一一映射。反函数的实质是由逆映射建立的一种新的函数，其前提也是原映射为一一映射。由此可见，关键字句理解了，也就把握了概念的实质。

数学中所有的概念都是由几个原始概念(如点、集合等等)出发，再一个一个定义下来的，结构严谨，系统完整。不少学生在学习时，经常犯概念混淆、张冠李戴，甚至循环定义的逻辑错误。例如，常常有人用“成直角”来定义“两直线垂直”，反过来又用“两直线垂直”来定义“成直角”，这不就象回答一个问路的人：“张大爷住在李大爷对门，而李大爷呢，住在张大爷对门”一样荒谬可笑吗？

弄清概念的系统，抓住概念的实质以后，还要注意反映这个实质的各种表现形式。

例如等差数列，它的实质是每相邻两项“等差”，反映这个“等差”的形式可以用$a_2-a_1=a_3-a_2=\cdots\cdots=a_n-a_{n-1}$来表示，也可以把项表示为$a,a+d,\ a+2d,\cdots\cdots a+(n-1)d$，或$\cdots\cdots x-d,x,x+d,\cdots\cdots$。又如绝对值，在实数集内是 $|a|=\begin{cases}a, & a\geqslant 0\\ -a, & a<0,\end{cases}$ 而在复数集内是：若$z=x+yi\ (x,\ y\in R)$，则$|z|=\sqrt{x^2+y^2}$，两者实质都是由此数所表示的点到原点的距离。抓住了这个实质，就不难用代数、几何、三角等各种形式来表示一个数的绝对值。

三、基本知识，要归纳整理

读书有个由薄到厚，再由厚到薄的过程。在初学阶段，对新知识逐步充实，不断丰富，使原来的书越来越厚了；到后来逐步归纳整理，提纲挈领，又使原来的书越来越薄了。

例如，学过集合、映射、函数、不等式之后，对其知识系统可列成下表：

→方程

→不等式

集合→映射→函数→函数的性质→单调性、奇偶性、周期性

→几类常见的函数：
- 正比例函数，反比例函数
- 一次函数，二次函数、幂函数
- 指数函数，对数函数
- 三角函数，反三角函数

→一一映射→逆映射→反函数

经常不断地（尤其在总复习的时候）做这样的归纳整理工作，一方面能使知识条理化、系统化、精简化，同时又能彻底弄清知识的纵横联系。

四、基本运算，要严格训练

学习数学的重要目的之一就是培养自己具有迅速而准确的运算能力。要算得准，算得快，不通过严格的训练，是决不可能获得这种能力的。可是许多学生平时不愿在计算上用时间，花气力，一看题目，觉得似乎会做就丢手，或者草草划一下，不算出最后结果，以为满有把握。这些人一上考场，解题速度必然慢，答案也常常算错。

例如在一九八二年有一道高考题是：

抛物线$y^2=2px$的内接三角形，有两边与抛物线$x^2=2gy$相切，证明这个三角形的第三边也与抛物线$x^2=2gy$相切。

这道题按通常的解法，思路很简单，即把有两边与抛物线$x^2=2gy$相切的条件，转化为判别式$\Delta_1=0$及判别式$\Delta_2=0$；要证得第三边也与抛物线$x^2=2gy$相切，即转化为在$\Delta_1=0$，$\Delta_2=0$的情况下，推算第三个判别式$\Delta_3=0$。大多数考生，虽然思路清晰，然而真正能利用$\Delta_1=0$、$\Delta_2=0$算出$\Delta_3=0$的却为数极少！其原因就是平时太缺乏运算训练了。还有些学生，在平时做练习时，遇到计算就使用计算器，这将受害不浅！

为了提高运算速度，保证运算准确，必须牢记各条法则，各个公式及其变形。对于常用的数据，例如：$\sqrt{2}\approx1.414$，$\sqrt{3}\approx1.732$，$\sqrt{5}\approx2.236$，$\lg2\approx0.3010$，$\lg3\approx0.4771$，20以内的整数的平方数，6以内的整数的阶乘，30°，45°，60°，15°，22.5°，75°的三角函数值，以a为边长的正三角形的高、边心距、半径和面积等等，都要记得烂熟。而对于一些容易记错的法则，公式（例如把$\lg ab$错记为等于$\lg a\cdot\lg b$，或把$\lg(a+b)$误认为等于$\lg a+\lg b$等等），更要认真对待，反复练习，方能加深理解，强化记忆。

五、推理论证，要简明严谨

严密的逻辑性，是数学的显著特征之一。培养严密的逻辑思维能力，是学习数学的又一个重要目的。所谓推理，就是从已知的条件（题设）出发，依据已知的定义、公理、定理，运用逻辑方法，推演出所需的结论。推理的一般方法有分析法和综合法，归纳法和演绎法，直接证法和间接证法。这些方法，

必须因题而异，灵活运用。

在逻辑推理上，最容易发生这样或那样的错误。常见的有：以特殊验证代替一般证明；不自觉地把已知条件扩大；凭直观或“想当然”代替证明；为了证明的需要作出实际上不可能存在的辅助线、面；循环论证；等等。例如，我们常常看到一些学生在解立体几何题时，出现“过一条直线作一个平面与另一条直线垂直”的错误。事实上，当这两条直线不互相垂直时，这样的平面是根本不存在的。又如，一九七九年有一道高考题是证明勾股定理，有的学生用余弦定理来证明；有的学生用“$\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$”来证明；有的学生用两点间的距离公式来证明。须知，按照通常的系统，这些定理及公式都是由勾股定理推演出来的，从而不自觉地犯了循环论证的逻辑错误。

为了防止证题中的逻辑错误，在证题过程中，我们必须注意：第一，每一步推演是否有据？是凭直观或“想当然”得来的，还是确实有公理、定理、公式、法则作依据？第二，所作的辅助线、面是否存在？第三，是否用了由要证的命题推演出来的结论作依据，即是否犯了循环论证的错误？最后还要看看证明途径是否绕了弯子？叙述是否清晰？做到了这几条，才能使证明过程简明严谨。

六、数形结合，扬长避短

十七世纪法国数学家笛卡尔把变量引进了数学，同时通过建立坐标系，用代数方程来研究几何图形。这种方法，把数学研究的两大主要对象——数与形结合起来，从而使辩证法进入了数学，所以它是数学上的一场伟大变革。

有了这个方法，不但许多几何题的证明、计算，可以通过建立坐标系，找出适合图形中某些曲线（直线）的方程，通过方程的演算而使问题得到解决，而且，就是许多纯代数题目，结合图形来求解，有时也显得特别容易。例如，求适合$|Z-\sqrt{2}+i|=2$的Z，使Z的模最大。这个题目如果用纯代数方法来求解，需设$Z=x+yi(x,y\in R)$，代入已知条件，再求$|Z|$的最大值，比较繁琐。如果我们用解析法，就可以转化为在复平面内，以$Z_0=\sqrt{2}-i$所在的点为圆心，2为半径的圆上求一点，使这一点到原点的距离最大，而这一点所表示的复数即为所求。这样，问题就简单得多了。

又如，“设x、y满足关系$x^2+y^2=1$，且$y\geqslant0$，求$k=\dfrac{y-2}{x-1}$的取值范围。”此题如果用纯代数法，必须消去y，整理成含x的二次方程，令判别式$\Delta\geqslant0$，解含k的不等式而得k的取值范围。如果用解析法，就转化为过点P $(1,2)$作半圆$x^2+y^2=1(y\geqslant0)$的两条切线，而k的值就介于这两条切线的斜率之间。两法相比，前者何其繁琐呆板，后者多么简单巧妙！因此，我们必须善于通过数形结合，互相转化，扬长避短，选取较好的方法去解题。

七、认真分析，全面考虑

不少学生在解数学题时，经常不事先认真分析，不对各种情况全面考虑，或者忽视一个式子成立的条件，顾此失彼，从而得出不完善的解答，甚至造成谬误。

请看一九八四年高考第五题：

"设c、d、x为实数，$c\neq 0$，x为未知数．讨论方程$\log_{(cx+\frac{d}{x})}x=-1$在什么情况下有解。有解时求出它的解。"

不少考生，由于不能认真分析，全面考虑，得出如下的解法：

化为指数式：$\left(cx+\dfrac{d}{x}\right)^{-1}=x$，

解之，得　$x=\pm\sqrt{\dfrac{1-d}{c}}$。

因为真数必须大于零，所以负根应舍去，于是$x=\sqrt{\dfrac{1-d}{c}}$。

又因为x为正实数，所以$\dfrac{1-d}{c}>0$。

于是当$c>0$，$d<1$，或$c<0$，$d>1$时，此方程有唯一解：

$x=\sqrt{\dfrac{1-d}{c}}$。

显然，这个解答是欠严谨、欠完整的。它仅仅考虑了真数x是正实数的已知条件，而丢弃了对数式成立的其它条件。正确的解法如下：

把原方程化为下述与它等价的混合组：

$$
\begin{cases}
x>0 & (1)\\
cx+\dfrac{d}{x}>0 & (2)\\
cx+\dfrac{d}{x}\neq 1 & (3)\\
\left(cx+\dfrac{d}{x}\right)^{-1}=x & (4)
\end{cases}
$$

由(1)、(4)及$c\neq0$，当且仅当$\frac{1-d}{c}>0$时有解

$$x=\sqrt{\frac{1-d}{c}}$$

易知，(2)已包含在(1)及(4)中，再由(3)可得：

当$c>0$，$d<1$且$c\neq1-d$时，或者$c<0$，$d>1$且$c\neq1-d$时，原方程有解，它的解都是$x=\sqrt{\frac{1-d}{c}}$。

把$x=\sqrt{\frac{1-d}{c}}$代入$\log_{(cx+\frac{d}{x})}x=-1$中验算，可知$x=\sqrt{\frac{1-d}{c}}$确是原方程的解。

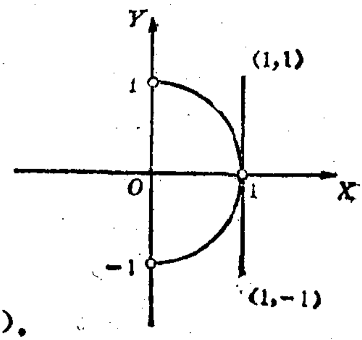
我们还看一个例子：

"求适合关系$\log_{1+y}x+\log_{1-y}x=2(\log_{1+y}x)(\log_{1-y}x)$的动点轨迹"。

不少人通过换底，整理，得动点轨迹为圆：

$$x^2+y^2=1.$$

然而这样做就忽视了题目中作为底数和真数应满足的隐在条件。



其正确解答应该是

1) 若 $x\neq1\Longrightarrow x^2+y^2=1$
$(-1<y<1$且$y\neq0$，$x>0$且$x\neq1)$；

2) $x=1$ $(-1<y<1$且$y\neq0)$。

其轨迹如图。

八、多读多写，多思多练

许多中学生，没有读数学书的良好习惯．课后拿了题目就做，做不出来就去翻翻书上类似的例题，然后照葫芦画瓢地去解题．至于到了总复习的时候，则以全部精力埋在“题海”之中，不愿去钻研教材．有的人虽然也看看教材，但象读语文、外语一样，一字一句去背诵那些定义、定理、法则，而不去消化理解．这些都是学习数学的不良习惯．

对于数学教材，不但要认真读，而且要有正确的方法．那就是在读的同时，还要勤于动笔，多思多练．例如，某条定理是怎样叙述的？又是怎样证明的？先合上书，想一想，自己动笔推演推演，然后再打开书看看书上与自己想的、写的是否一致？如果自己错了，原因在哪里？应该怎样更正？有了这样一个过程，你就对这条定理的实质及其证明方法彻底弄通了．在动脑动笔的过程中，既加深了理解，又强化了记忆．所以有人说："不动笔墨不看书"，是很有道理的．

在搞通基本概念，掌握基本定理、法则、公式的同时，还必须加强练习．我们一方面反对忽视基础知识的“题海战术”，另一方面同时强调必须演解一定数量的习题．因为只有这样，才能熟悉、巩固所学的知识，才能获得解题技巧，也才能综合地运用知识．在解题之后应回顾一下，解这道题用到了哪些知识，采用了哪些方法？解题的关键在哪里？还有没有其它方法？再进一步考虑，这道题与过去哪些题有关联或相似？然后归纳对比，串联沟通，总结提高．经常这样做，就会收到举一反三、

触类旁通的效果，这对提高综合分析能力，总结概括能力和逻辑推理能力也是有帮助的。

“世上无难事，只要肯登攀”，让这光辉的名句激励我们攀登数学上一个又一个的高峰吧！

长沙大学　邓国栋

一九八五年五月

<u>代　　数</u>

第一章　数

基本内容

1. 数的系统表

- 复　数（$a+bi$，a、b为实数）
  - 实　数（$a+bi, b=0$）
    - 有理数
      - 整数
        - 自然数（正整数）
        - 零
        - 负整数
      - 分数
        - 有限小数（正、负）
        - 无限循环小数（正、负）
    - 无理数——无限不循环小数
  - 虚　数（$a+bi, b\neq 0$）
    - 纯虚数（$a+bi$，当$a=0, b\neq 0$时）
    - 混合虚数（$a+bi$，当$a\neq 0, b\neq 0$时）

2．自然数：任意自然数均可用$a_0 10^n + a_1 10^{n-1} + \cdots + a_{n-1} \cdot 10 + a_n$表示，其中$a_0$，$a_1$，…$a_n$分别是0，1，2，…9中的一个($a_0 \neq 0$)。对质数、合数、约数、倍数、公约数、公倍数、最大公约数与最小公倍数的概念一定要清楚。

3．整数

(1) 整数可按被某一正整数p除所得余数分类：$pn, pn+1, pn+2 \cdots\cdots pn+(p-1)$。若$p=2$，整数可分为奇数，偶数两类。连

续整数可表成$n, n+1, n+2, \cdots\cdots$。

(2)被2、3、5、7、9、11整除的整数的特征：

被 n 整除	特　　　征
2，5	这个数末位数字能被2或5整除
3，9	这个数各位上数字的和能被3或9整除
7	这个数末三位数字所表示的数与末三位以前数字所表示的数的差能被7整除
11	这个数奇数位上数字之和与偶数位上数字之和的差能被11整除

4．有理数：任何有理数都可以表示为$\frac{p}{q}$(p、q为互质的整数，$q \neq 0$)。若$\sqrt{a}$为有理数，则a为完全平方数。

5．无理数：无理数不能表成$\frac{p}{q}$的形式(p, q为互质整数)，故不可能等于任何有理数。不尽根数都是无理数。

若 $a+b\sqrt{A}=c+d\sqrt{A}$，(a, b, c, d是有理数，$\sqrt{A}$是无理数)则$a=c, b=d$。

6．实数

(1) 实数与数轴上的点一一对应。实数具有连续性。两个实数可以比较大小。

(2) 实数a的绝对值 $|a| = \begin{cases} a & (a \geqslant 0) \\ -a & (a < 0) \end{cases}$.

(3) 实数的平方是非负数。若$\sqrt{a}$是实数，则$a \geqslant 0$，由此推出