千题苦练后·金榜题名时

金榜多元题

综合素质训练

JINBANGDUOYUANTI

智能解题

ZhinengJieti

- 应试焦点
- 核心破释
- 纠错良师
- 技能发散
- 综合演练

高中数学

北京一线特高级教师编写

主编 郭福昌

南方出版社

千题苦练后·金榜题名时 无师通

金榜多元题

JINBANGDUOYUANTI

综合素质训练

智能解题

应试焦点

核心破释

纠错良师

技能发散

综合演练

高中数学

北京一线特高级教师编写

主编 郭福昌

审订 张定远 等

南方出版社

责任编辑：胡艳婷

图书在版编目(CIP)数据

综合素质训练．高中数学：金榜多元题智能解题/郭福昌主编．－海口：南方出版社，2002.3

ISBN 7－80609－993－X

Ⅰ．综…　Ⅱ．郭…　Ⅲ．数学课－高中－解题
Ⅳ．G634

中国版本图书馆CIP数据核字(2002)第009707号

综合素质训练

金榜多元题——智能解题(高中数学)

郭福昌　主编

*

南方出版社

(地址：海口市海府一横路19号化宇大厦12楼)

邮编：570203　电话：(0898)65327955　传真(0898)5371264

*

四川新华书店集团
北京蜀川新华书店图书发行有限责任公司　经销

电话：(010)85800377

北京金特印刷厂印刷

开本：850×1168　1/32　印张：17.5　字数：575千字

2002年5月第2版第2次印刷

ISBN 7－80609－993－X/G·698

定价：18.80元

代序

走进多元考试时代

20世纪80年代，美国教育家加德纳提出了“多元智能”理论。其核心思想就是：每个人都有8种不同的潜在智能，包含语言、数理逻辑、视觉空间智能等等。一旦开发出来，人人都将成为天才。

纵观近年中、高考命题的特点，多元化的趋势越来越明显。语文不单注重读与写，更加注重时空思维与情理表达；数学不单注重计算和演练，同时注重知识网络体系的理解与记忆、举一反三，解决与应用；英语不单强调发音与对话，更加强调流畅阅读与听力。跨学科的大小综合则穿梭五千年、纵横百科知识领域，特别强调课外能力迁移。由此看来，多元学习已成时尚和必然。

依据“多元智能”原理，我们精心编写了《金榜多元题——智能解题》综合素质训练丛书。丛书采用多元素、多视角、多程度、多走向的出题模式，收录中考和高考的各类题型和变式，选取聚焦、破释、发散等解析方法，结合纠错指导和综合演练，使优良生和中等生甚至较差学生都能从中获得对位的学习效果，从而增强应考实力，倍添胜考信念。

应试焦点 精确整合单元新知识、新架构，梳理应考中的要点和难点。

核心破释 披露题目题型的解析“题眼”，便于学生对题出招，多层次掌握破题解题的方法和技巧。

技能发散 侧重课内能力的课外迁移，使学生"解一题而知百题，得一法而通百法"，身怀绝技。

纠错良师 特选学生易错易混题进行典型分析，帮助学生提高纠错改错的本领。

综合演练 全面校验学生迎考意识和应试能力。指导学生适应仿真考场，完胜模拟训练。

总而言之，丛书的编写目的，就是让每个学生都能通过中考和高考的难关，实现心中梦想，成为一代英才。

让我们信心百倍地走进多元考试时代。

丛书编委会
2002年4月15日

目　　录

第一章　集合、幂函数、指数函数和对数函数

知识要点

知识内容	考试水平	知识内容	考试水平
1. 集合	B	8. 反函数	C
2. 子集、交集、并集、补集	C	9. 互为反函数的函数图象的关系	C
3. 映射	B	10. 指数函数	D
4. 函数(函数的记号、定义域、值域)	C	11. 对数函数	D
5. 幂函数	C	12. 换底公式	C
6. 函数的单调性	D	13. 简单的指数方程和对数方程	C
7. 函数的奇偶性	D		

第一单元　集合的概念及运算

【应试集点】

集合是现代数学中的基本概念，这个概念渗透到初等数学的各个领域.

1. 集合的概念

(1)集合的涵义

集合是数学中不定义的概念，但它有一定的涵义，把具有某种属性的一些对象看作一个整体，便形成一个集合.每一个集合都有确定的对象和具有一定的属性.

(2)集合的特征

对于给定的一个集合，集合中的元素具有确定性、互异性和无序性.

(3)集合的表示方法

对于一个确定的元素 a 和一个确定的集合 A，a 和 A 之间的关系是 $a\in$

A 或 $a \notin A$.

表示集合的方法通常有列举法和描述法.

(4)集合的分类

集合一般分为有限集和无限集.

这里要注意理解单元素集、空集和非空集合的概念.$\{0\}$、$\{1\}$是单元素集,把一个点(a,b)看成一个元素,$\{(a,b)\}$也是单元素集;空集 $\varnothing$ 是不含有任何元素的集合;至少含有一个元素的集合称为非空集合.

$\varnothing$ 和$\{0\}$不是一个集合,0 和$\{0\}$是 $0\in\{0\}$的关系.$\{0\}$和$\{(0,0)\}$不是一个集合.

2. **集合与集合之间的关系**

(1)子集:集合 A 与 B,如果集合 A 中每一个元素都属于集合 B,集合 A 叫集合 B 的子集.记作 $A\subseteq B$ 或 $B\supseteq A$.

(2)真子集:集合 A 与 B.如果集合 A 中的每一个元素都属于 B,但集合 B 中至少有一个元素不属于 A.集合 A 叫集合 B 的真子集,记作 $A\subset B$ 或 $B\supset A$.

(3)相等:集合 A 和 B,如果 $A\subseteq B$,同时有 $B\supseteq A$,称集合 A 和 B 相等.记作 $A=B$.

3. **集合的运算**

(1)并集:$A\cup B=\{x\mid x\in A$ 或 $x\in B\}$.

(2)交集:$A\cap B=\{x\mid x\in A$ 且 $x\in B\}$.

(3)补集:设 I 是全集.$A\subseteq I$,A 的补集$\overline{A}$,则$\overline{A}=\{x\mid x\in I$ 且 $x\notin A\}$.

【精要解析】

例 1 指出下列集合是否是同一集合:

$A=\{x\mid x^2+1=0,x\in R\}$,$B=\{x\mid x>5$ 且 $x<4\}$,

$C=\{x\mid x^2+|x|=0,x\in R\}$,$D=\{x\mid x^2\leqslant 0,x\in R\}$,

$E=\{(x,y)\mid x^2+y^2=0,x,y\in R\}$.

分析 $A=\varnothing$,$B=\varnothing$,$C=\{0\}$,$D=\{0\}$,$E=\{(0,0)\}$.故有 $A=B$,$C=D$,但 E 与 C、D 不是同一个集合.

例 2 已知$A=\{x\mid x=2k+1,k\in Z\}$,$B=\{x\mid x=4m\pm1,m\in Z\}$.

求证 $A=B$.

证明 对集合 A 中任一元素 $x_1=2k_1+1$,$k_1\in Z$.若 k_1 是偶数,

设 $k_1=2m_1,(m_1\in Z)$.

则 $x_1=2(2m_1)+1=4m_1+1$, $\therefore\ x_1\in B$.

若 k_1 是奇数,设 $k_1=2m_1+1(m\in Z)$.

则 $x_1=2(2m_1+1)+1=4m_1+3=4(m_1+1)-1$.

$\because\ m_1\in Z$. $\therefore\ m_1+1\in Z$. $\therefore\ x_1\in B$.

综合上述情况,则有 $A\subseteq B$.

对于集合 B 的任一元素 y_1.

若 $y_1=4m_1+1(m_1\in Z)$. 故 $y_1=2(2m_1+1)$, $2m_1$ 仍是整数,

$\therefore\ y_1\in A$.

若 $y_1=4m_1-1(m\in Z)$,故 $y_1=2(2m_1)-1=2(2m_1-1)+1$, $2m_1-1$ 仍是整数, $\therefore\ y_1\in A$.

综合上述情况,则 $B\subseteq A$.

由已知 $A\subseteq B$ 且 $B\subseteq A$、$\therefore\ A=B$.

说明 证两个集合 A、B 相等,需根据定义证 $A\subseteq B$,再证 $B\subseteq A$. 若已知集合是空集合,一般采用反证法,如证 $A\cap\phi=\phi$.

例3 已知 $I=R$,集合 $A=\{x\mid x^2\geqslant 4\}$, $B=\left\{x\mid\frac{6-x}{1+x}\geqslant 0\right\}$

$$C=\{x\mid |x-3|<3\}.$$

求 (1)$A\cap B$ 及 $A\cup C$;(2)$A\cap(\overline{B\cap C})$;(3)用列举法表示:$A$中的整数集合 D;B 中能被 3 整除的整数集合 E,C 中的质数集合 F.

解 $A=\{x\mid x\leqslant -2$ 或 $x\geqslant 2\}$, $B=\{x\mid -1<x\leqslant 6\}$. $C=\{x\mid 0<x<6\}$.

(1)$A\cap B=\{x\mid 2\leqslant x\leqslant 6\}$, $A\cup C=\{x\mid x\leqslant -2$ 或 $x>0\}$;

(2)$\because\ B\cap C=\{x\mid 0<x<6\}=C$, $\overline{B\cap C}=\{x\mid x\leqslant 0$ 或 $x\geqslant 6\}=\overline{C}$.

$\therefore\ A\cap(\overline{B\cap C})=A\cap\overline{C}=\{x\mid x\leqslant -2$ 或 $x\geqslant 6\}$.

(3)$\because\ \overline{A}=\{x\mid -2<x<2\}$. $\therefore\ D=\overline{A}$ 中的全体整数 $=\{-1,0,1\}$;

又 $B=\{x\mid -1<x\leqslant 6\}$,故 $E=\{0,3,6\}$;

又 $C=\{x\mid 0<x<6\}$,故 $F=\{2,3,5\}$.

例4 已知 A、B 是以某些实数为元素的两个集合,其中

$A=\{-4,a+3,a^2-2a-2,a^3+a^2+3a+7\}$

$B=\{2,4,a^3-2a^2-a+7\}$. 且 $A\cap B=\{2,5\}$.

求实数 a,并求 $A\cup B$.

解 $\because$ $A\cap B=\{2,5\}$，$\therefore$ $a^3-2a^2-a+7=5$.

即 $a^3-2a^2-a+2=0$，$(a-2)(a^2-1)=0$.

$\therefore$ $a=2$，$a=1$，或 $a=-1$，$B=\{2,4,5\}$.

当 $a=2$ 时，$A=\{-4,5,2,25\}$，$A\cap B=\{2,5\}$.

当 $a=1$ 时，$A=\{-4,4,1,12\}$，$A\cap B=\{4\}$.

当 $a=-1$ 时，$A=\{-4,2,5,4\}$，$A\cap B=\{2,4,5\}$.

$\therefore$ 实数 $a=2$，$A=\{-4,5,2,25\}$才符合题意.

故 $A\cup B=\{-4,2,4,5,25\}$.

说明 在求出 $a=2$，$a=1$ 或 $a=-1$ 之后.要注意验证是否符合题意.不合题意的要舍去.

例 5 已知集合 $A=\{x\mid x^2-ax+a^2-19=0\}$

$B=\{x\mid \log_2(x^2-5x+8)=1\}$，$C=\{x\mid x^2+2x-8=0\}$，

且 $A\cap C=\phi$，$A\cap B\neq\phi$，求 a 的值.

分析 $B=\{x\mid \log_2(x^2-5x+8)=1\}$

$=\{x\mid x^2-5x+6=0\}=\{2,3\}$.

$C=\{x\mid x^2+2x-8=0\}=\{2,-4\}$.

$\because$ $A\cap C=\phi$，$\therefore$ 2 和 -4 都不是 A 的元素.

$\because$ $A\cap B\neq\phi$，$2\notin A$，故 $3\in A$.

也就是说，3 是方程 $x^2-ax+a^2-19=0$ 的根.

$\therefore$ $3^2-3a+a^2-19=0$.即 $a^2-3a-10=0$，故 $a=-2$，$a=5$.

当 $a=5$ 时，则 $A=\{x\mid x^2-5x+6=0\}=\{2,3\}$.

故有 $A\cap C=\{2\}\neq\phi$，与已知矛盾，故 $a\neq5$.

当 $a=-2$ 时，则 $A=\{x\mid x^2-2x-15=0\}=\{3,-5\}$.

故有 $A\cap C=\phi$，$A\cap B=\{3\}\neq\phi$，符合题意，$\therefore$ $a=-2$ 为所求.

例 6 设集合 $A=\{x\mid x^2-3x+2=0\}$，$B=\{x\mid x^2-ax+2=0\}$，若 $A\cup B=A$，求实数 a 的取值范围.

分析 $\because$ $A\cup B=A$，$\therefore$ $B\subseteq A$，而 $A=\{1,2\}$.因此 B 可能为$\{1,2\}$、$\{1\}$、$\{2\}$或 ϕ.

当 $B=\{1,2\}=A$ 时，显然有 $a=3$.

当 $B=\{1\}$，$\{2\}$或 $B=\phi$ 时，即要求二次方程 $x^2-ax+2=0$ 有等根或无实根，$\therefore$ $\Delta\leqslant0$，即 $a^2-8\leqslant0$，解得 $-2\sqrt{2}\leqslant a\leqslant2\sqrt{2}$.

但是,当 $\Delta=0$,即 $a=\pm 2\sqrt{2}$时,得到 $B=\{\sqrt{2}\}$或$\{-\sqrt{2}\}$,不满足 $B\subseteq A$,故 $a\neq\pm 2\sqrt{2}$.

故所求 a 的范围是$\{3\}\cup\{a\mid -2\sqrt{2}<a<2\sqrt{2}\}$.

说明 解答本题时常见的错误是遗漏掉 $B=\phi$,即 $A\cup\phi=A$ 的情况,因此只得到 $a=3$.

解题时要注意空集 ϕ 的特性,即 $\phi\cup A=A,\phi\cap A=\phi,\phi\subseteq A,\phi=\overline{A}\cap A$, $\phi\subseteq A\cap B,\phi=\overline{I},\overline{\phi}=I$ 等.

例 7 设 $f(x)=x^2+ax+b$,a、$b\in R$,且集合 $A=\{x\mid x=f(x)\}$. 集合$B=\{x\mid x=f[f(x)]\}$,若 $A=\{-1,3\}$,求集合 B 的元素.

分析 解此题时,关键是理解其中有关复合的意义,求出 a 和 b,再求 B.

由已知 $A=\{x\mid x=x^2+ax+b\}=\{-1,3\}$.

故 $-1,3$ 是方程 $x=x^2+ax+b$ 的根.

当 $x=-1$ 时,有 $-1=(-1)^2+a\cdot(-1)+b$,即

$$-a+b=-2. \quad ①$$

当 $x=3$ 时,有 $3=3^2+3a+b$,即 $3a+b=-6$. ②

由①、②,求得 $a=-1,b=-3$,$\therefore$ $f(x)=x^2-x-3$.

由 $B=\{x\mid x=f[f(x)]\}$,得 $x=(x^2-x-3)^2-(x^2-x-3)-3$.

即$(x^2-x-3)^2=x^2$,$\therefore$ $x^2-x-3=x$ 或$x^2-x-3=-x$.

由 $x^2-x-3=x$,得 $x^2-2x-3=0$,$\therefore$ $x_1=-1,x_2=-3$.

由 $x^2-x-3=-x$,得 $x^2-3=0$,$\therefore$ $x_3=\sqrt{3},x_4=-\sqrt{3}$

$\therefore$ $B=\{-\sqrt{3},-1,\sqrt{3},3\}$.

【纠错良师】

1. 已知集合 $E=\left\{x\mid x=m+\frac{1}{6},m\in Z\right\}$, $F=\left\{y\mid y=\frac{n}{2}-\frac{1}{3},n\in Z\right\}$, $G=\left\{z\mid z=\frac{p}{2}+\frac{1}{6},p\in Z\right\}$,则 E、F、G 的关系是(　　)

A. $E=F\subset G$　　B. $E\subset F=G$　　C. $E\subset F\subset G$　　D. $F\subset G\subset E$

参考答案 B

对错辨析

正解:对 E、F、G 进行变形:

$$x=\frac{6m+1}{6}\quad(m\in Z)$$

$$y=\frac{3n-2}{6}=\frac{3(n-1)+1}{6}\quad(n\in Z)$$

$$z=\frac{3p+1}{6}\quad(p\in Z)$$

显然，y、z 的表达式所代表的数是一致的，从而 $F=G$，故选 B。

错解 1：四个选项都不对，此解的错误是不理解集合的元素与它的代表字母 x、y、z 无关，于是把它们当成不同的集合。

错解 2：选 A。此解的错误在于仅观察了一些特例，如令 $m=0$，设 $x=\frac{1}{6}$，$n=1$，$y=\frac{1}{6}$，于是认为 E、F 所含元素相同，进行了错选。

这类问题考查了集合之间的包含与相等的关系，一般应从元素的表达式化简变形入手，才能做出正确的选择。

2. 设集合 $A=\{a,b\}$，$B=\{b,c\}$，则 $\{x|x\subseteq A\}\cap\{y|y\subseteq B\}=$ ______。

参考答案 $\{\varnothing,\{b\}\}$

对错辨析

正解：因为 $\{x|x\subseteq A\}=\{\varnothing,\{a\},\{b\},\{a,b\}\}$

$\{y|y\subseteq B\}=\{\varnothing,\{b\},\{c\},\{a,c\}\}$

所以 填入 $\{\varnothing,\{b\}\}$

错解：$\varnothing$。此解错在认为 x、y 均是集合，而集合是不能成为集合的元素的，所以交集为空集。事实上，集合的元素可以是集合，如集合{等腰三角形}，这个集合的元素是一个个等腰三角形，而等腰三角形本身是一个点集。

【单元知能检测】(1－1)

一、选择题(有且只有一个答案正确)

1. 设全集 I 为自然数集 N，$E=\{2n|n\in N\}$，$F=\{4n|n\in N\}$，那么集合 N 可以表示成 ( )

A. $E\cap F$　　B. $E\cup F$　　C. $E\cup\overline{F}$　　D. $\overline{E}\cup\overline{F}$

2. 设集合 $M=\{x|m\leqslant\sqrt{10}\}$，又 $a=\sqrt{3}+\sqrt{2}$，那么 ( )

A. $a\subset M$　　B. $a\notin M$　　C. $\{a\}\in M$　　D. $\{a\}\subset M$

3. 集合 $M=\left\{x|x=\frac{k\pi}{2}+\frac{\pi}{4},k\in Z\right\}$，$N=\{x|=\frac{k\pi}{4}+\frac{\pi}{2},k\in Z\}$，则 ( )

A. $M=N$　　B. $M\supset N$　　C. $M\subset N$　　D. $M\cap N=\phi$

4. 设 S,T 是两个非空集合,且 $S\not\subseteq T$,$T\not\subseteq S$,令 $X=S\cap T$,那么 $S\cup X$ 等于　　（　）

A. X　　B. T　　C. ϕ　　D. S

5. 集合{1,2,3,4}的子集总共有　　（　）

A.30 个　　B.32 个　　C.15 个　　D.16 个

6. 设全集为实数集 R,$f(x)=\sin x$,$g(x)=\cos x$,$M=\{x|f(x)\neq0\}$,$N=\{x|g(x)\neq0\}$,那么集合$\{x|f(x)g(x)=0\}$等于　　（　）

A. $\overline{M}\cap\overline{N}$　　B. $\overline{M}\cup N$　　C. $M\cup\overline{N}$　　D. $\overline{M}\cup\overline{N}$

7. 如果 $I=\{a,b,c,d,e\}$,$M=\{a,c,d\}$,$N=\{b,d,e\}$,其中 I 是全集,那么$\overline{M}\cap\overline{N}$等于　　（　）

A. ϕ　　B. $\{d\}$　　C $\{a,c\}$　　D $\{b,e\}$

8. 设 $M=\{x|x=n,n\in Z\}$,$N=\left\{x|x=\frac{n}{2},n\in Z\right\}$,

$$P=\left\{x|x=n+\frac{1}{2},n\in Z\right\},$$

那么　　（　）

A. $N\subset M$　　B. $N\subset P$　　C. $N=M\cup P$　　D. $N=M\cap N$.

9. 设全集 $I=\{(x,y)|x,y\in R\}$,$M=\{(x,y)|\frac{y-3}{x-2}=1\}$,$N=\{(x,y)|y\neq x+1\}$,那么$\overline{M\cup N}$等于　　（　）

A. ϕ　　B. $\{(2,3)\}$　　C. $(2,3)$　　D. $\{(x,y)|y=x+1\}$

10. 已知 $M=\{x|x\leqslant1\}$,$N=\{x|x>P\}$,要使 $M\cap N\neq\phi$,则 P 所满足的条件是　　（　）.

A. $P>1$　　B. $P\geqslant1$　　C. $P<1$　　D. $P\leqslant1$

二、填空题

1. 已知元素 $(1,2)\in(A\cap B)$,且 $A=\{(x,y)|y^2=ax+b\}$,$B=\{(x,y)|x^2-ay-b=0\}$,则 $a=$____,$b=$____.

2. 已知 $I=\{$小于 20 的质数$\}$,$\overline{A}\cap\overline{B}=\{3,7,11,17\}$,则 $A\cup B=$____.

3. 已知 $A=\{x|-2<x<-1$ 或 $x>1\}$,$B=\{x|a\leqslant x\leqslant b\}$,且 $A\cup B=\{x|x>-2\}$,$A\cap B=\{x|1<x\leqslant3\}$,则集合 $B=$________.

4. 已知 $I=R$,$A=\{x|x^2-x-6<0\}$,$B=\{x||x|=y+2,y\in A\}$,

则 $\overline{B}=$ ______.

三、解答题

1. 已知 $A=\{x|2x^2+px+q=0\}$, $B=\{x|6x^2+(2-p)x+5+q=0\}$, 且 $A\cap B=\left\{\frac{1}{2}\right\}$,求集合 $A\cup B$.

2. 已知 $A=\{1,a,a^2\}$, $B=\{1,a,b\}$, 且 $A\cap B=\{1,3\}$, $A\cup B=\{1,a,2a,3a\}$,求 a、b 的值.

3. 已知 $I=\{x|x=3n,x<30,n\in N\}$, $\overline{A}\cap B=\{6,15\}$, $A\cap\overline{B}=\{3,21\}$, $\overline{A}\cap\overline{B}=\{9,18,24\}$,求集合 A, B.

4. 已知 $A=\{-1,a^2+1,a^2-3\}$, $B=\{a-3,a-1,a+1\}$, 且 $A\cap B=\{-2\}$,求实数 a 的值.

5. 已知 $A=\{x|x^2-ax+a^2=19\}$, $B=\{2,3\}$, $C=\{x|x^2+2x=8\}$, 且 $A\cap C=\phi$, $A\cap B\neq\phi$,求实数 a 的值.

第二单元　映射、函数与反函数

【应试焦点】

本单元的主要内容有映射与函数的概念,函数的定义域、值域与对应法则.反函数.

1. 映射与函数

设 A、B 是两个集合,如果按照某种对应法则 f,对于集合 A 中的任何一个元素,在集合 B 中都有唯一的元素和它对应,这样的对应叫做从集合 A 到集合 B 的映射,记作

$$f:A\to B.$$

函数实际上就是集合 A 到集合 B 的映射,其中 A、B 都是非空的数的集合,对于自变量 x 在定义域 A 内的任何一个值,在集合 B 中都有唯一的函数值和它对应,自变量的值相当于原象,和它对应的函数值相当于象,函数值的集合 C 就是函数的值域.显然有

$$C\subseteq B.$$

2. 反函数

函数 $y=f(x)$,定义域为 A,值域为 C,从 $y=f(x)$ 解出 x,得到式子 $x=\varphi(y)$.如果对于 y 在 C 中的任何一值,通过式子 $x=\varphi(y)$, x 在 A 中都有

唯一确定的值和它对应，那么式子 $x=\varphi(y)$ 就表示 x 是自变量 y 的函数，把函数 $x=\varphi(y)$ 叫做 $y=f(x)$ 的反函数，记作

$$x=f^{-1}(y).$$

在 $x=f^{-1}(y)$ 中，y 是自变量，x 表示函数，但习惯上，一般用 x 表示自变量，用 y 表示函数，于是将 $x=f^{-1}(y)$ 改写成 $y=f^{-1}(x)$，称 $y=f^{-1}(x)$ 为函数 $y=f(x)$ 的反函数.

函数 $y=f(x)$ 的定义域、值域分别是它的反函数 $y=f^{-1}(x)$ 的值域、定义域.

在同一个直角坐标系下，函数 $y=f(x)$ 的图象与它的反函数 $y=f^{-1}(x)$ 的图象关于直线 $y=x$ 对称.

这里要注意的是 $y=f(x)$ 的图象和 $x=\varphi(y)$ 的图象是同一个图象.

3. 函数的定义域、值域和对应法则

这里要注意归纳求函数定义域、函数值域的一般方法；由函数的对应法则如何求出函数的解析式.这些问题，在下面通过一些例题加以分析和归纳.

【精要解析】

例1 已知 $A=N,B=\left\{\frac{1}{3},\frac{3}{5},\frac{5}{7}\cdots\right\}$.

（Ⅰ）建立从 A 到 B 的映射的对应法则 f；

（Ⅱ）在（Ⅰ）中 f 的作用下，求象 $\frac{99}{101}$ 的原象.

分析 因为 $A=N$，为自然数集、B 中的元素实际上是一个数列 $\frac{1}{3},\frac{3}{5},\frac{5}{7}\cdots$.故映射 $f:n\to\frac{2n-1}{2n+1}(n\in N)$.

求象 $\frac{99}{101}$ 的原象，由 $\frac{2n-1}{2n+1}=\frac{99}{101}$，求得 $n=50$，故象 $\frac{99}{101}$ 的原象为 50.

例2 已知 $A=\{1,2,3,k\}$，$B=\{4,7,a^4,a^2+3a\}$，且 a、$k\in N$、$x\in A$，$y\in B$，$f:x\to y=3x+1$ 是从 A 到 B 上的一个映射，求 a 和 k 的值.

分析 由 $f:x\to y=3x+1$，可知 $1\to4,2\to7$.

下面是 $\{3,k\}$ 与 $\{a^4,a^2+3a\}$ 的映射关系.

若 $3\to a^4$，则 $a^4=3\times3+1=10$，此时 a 不可能是正整数，与 $a\in N$ 矛盾.

于是 $3\to a^2+3a=3\times3+1=10$.