高等学校教材

材料力学

（第二版）

下册

武汉水利电力学院建筑力学教研室 编

粟一凡 主编

赠阅
高等教育出版社

高等教育出版社

本书是以武汉水利电力学院建筑力学教研室一九六〇年编的《材料力学教程》为蓝本，根据一九八〇年审订的高等工业学校《材料力学教学大纲(草案)(四年制机械、土建、水利、航空等类专业试用)》(120学时)的要求重新编写的。

本书分上、下两册，上册内容包括：绪论，基本概念，轴向拉伸和压缩，材料在拉伸和压缩时的力学性质，受拉(压)杆连接的实用计算，扭转和剪切，梁的内力——剪力和弯矩，梁的应力，梁的变形等九章以及附录(平面图形的几何性质、型钢表)；下册内容包括：应力状态与应变状态分析，强度理论，用变形能法计算杆的位移，组合变形，压杆稳定，考虑材料塑性的强度计算，动荷载，交变应力等八章以及附录(参考专题：平面曲杆在纯弯曲时的正应力，三向应力状态下的应力分析，混凝土重力坝中应力的近似分析，材料力学性质的进一步介绍)。在绝大多数章后附有思考题和习题。

本书主要用作高等工业院校土建、水利类各专业多学时类型材料力学课程的教材，也可作为其它专业多学时类型材料力学课程的教材和供有关工程技术人员参考。

高等学校教材

材 料 力 学

(第 二 版)

下　　册

武汉水利电力学院建筑力学教研室 编

粟一凡 主编

*

高等教育出版社出版

新华书店北京发行所发行

咸宁地区印刷厂印刷

*

开本 850×1168 1/32　印张 10.125　字数 243,000

1960年2月第1版　1984年1月第2版　1984年8月湖北第1次印刷

印数 00,001—16,390

书号 15010·0564　　定价 1.60 元

目　录

此为试读，需要完整PDF请访问：www.ertongbook.com

第十章　应力状态与应变状态分析

§10-1　应力状态的概念

通过以前有关各章的介绍，我们已经知道，为了对构件进行强度计算，必须了解构件受力后在通过它的哪一点的哪一个截面上的应力最大。因此必须研究通过受力构件内任一点的各个不同截面上的应力情况，即必须研究一点的应力状态。

为了研究某点的应力状态，可围绕该点取出一微小的正六面体或单元体。因单元体的边长是无穷小的量，可以认为：作用在单元体的各个面上的应力都是均匀分布的；在任意一对平行平面上的应力是相等的、且代表着通过所研究的点并与上述平面平行的面上的应力。因此单元体三对平行平面上的应力就代表通过所研究的点的三个互相垂直截面上的应力，只要知道了这三个面上的应力，则其它任意截面上的应力都可通过截面法求出，这样，该点的应力状态就完全确定了。因此，可用单元体的三个互相垂直平面上的应力来表示一点的应力状态。

图 10-1 表示一轴向拉伸杆，若在 A、B 两点处各取出一单元体，因在它们的三对平行平面上作用的应力都可用第三章中的式(3-2)或式(3-4)、(3-5)算出，故可以说 A、B 两点的应力状态是完全确定了的。又如图 10-2 表示一受横力弯曲的梁，若在 A、B、C、D 等点各取出一单元体，因在它们的三对平行平面上的应力都可用第八章中的式(8-2)和(8-7)算出，故这些点的应力状态也是完全确定了的。

容易知道，在图 10-1 中的点 A 及图 10-2 中的 A、C 两点处所取的单元体的各对平行平面上的剪应力都等于零，我们把这些没

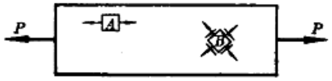


图 10-1　轴向拉伸杆中点的应力状态

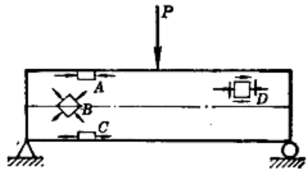


图 10-2　横力弯曲杆中点的应力状态

有剪应力作用的平面称为主平面，而把作用在主平面上的正应力称为主应力。在弹性力学中已经证明，通过受力构件的每一点，都可以取出一个由三对主平面包围的单元体。我们通常用字母 σ_1、σ_2 和 σ_3 代表分别作用在这三对主平面上的主应力，其中 σ_1 代表数值最大的主应力，σ_3 代表数值最小的主应力。例如当三个主应力的数值为 100MPa、50MPa、-150MPa 时，按照规定应是：$\sigma_1=100$MPa，$\sigma_2=50$MPa，$\sigma_3=-150$MPa。当三个主应力的数值为 $+100$MPa、0、-150MPa 时，按照规定应是：$\sigma_1=+100$MPa；$\sigma_2=0$；$\sigma_3=-150$MPa。

由主平面围成的单元体称为主应力单元体。

实际上，在受力构件内所取出的主应力单元体上，不一定在每个主平面上都存在有主应力，故应力状态又可分下列三类：

(1) 单向应力状态　其三个主应力中只有一个主应力不等于零。如图 10-1 中点 A 和图 10-2 中 A、C 两点的应力状态都属于单向应力状态。

(2) 二向应力状态（平面应力状态）　其三个主应力中有两个主应力不等于零。如图 10-2 所示 B、D 两点的应力状态。

(3) 三向应力状态（空间应力状态）　其三个主应力都不等于零。例如列车车轮与钢轨相接触处附近的材料就是处在三向应力状态下（图 10-3）。

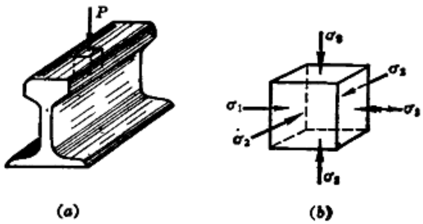


图 10-3 三向应力状态的例子

通常我们也将单向应力状态称为简单应力状态，而将二向应力状态及三向应力状态统称为复杂应力状态。

本章主要研究当构件内的一点是处在复杂应力状态时，如何确定该点的最大正应力、最大剪应力、最大线应变和最大剪应变的问题。

§ 10-2 平面应力状态下的应力分析

图 10-4*a* 表示一从某构件中取出的单元体，因它处于平面应力状态，可用如图 10-4*b* 所示的简图表示。假定在其竖向平面上的正应力 σ_x、剪应力 τ_x 和在其水平平面上的正应力 σ_y、剪应力 τ_y 的大小和方向都已求出，要求求出在此单元体的任一斜截面 ef 上的应力的大小和方向。因习惯上常用 α 表示斜截面 ef 的外法线 n 与 x 轴间的夹角，故常简称此斜截面为“α 截面”，并以 σ_α 和 τ_α 表示作用在此截面上的应力。

对应力 σ、τ 和角度 α 的正负号，作这样的规定：正应力 σ 以拉应力为正，压应力为负；剪应力 τ 以对单元体内的任一点是顺时针转向时为正，是反时针转向时为负（与第七章中对剪力 Q 所作的规定是一致的）；角度 α 以从 x 轴出发量到截面的外法线 n 是反时针转时为正，是顺时针转时为负。按照上述正负号的规定可以判断，在图 10-4 中的 σ_x 和 σ_y 是正值，τ_x 是正值，τ_y 是负值，α 是正

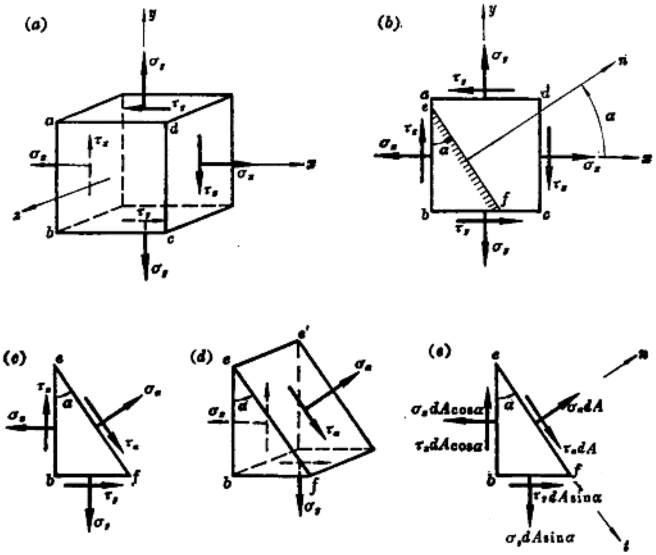


图 10-4 在平面应力状态下的单元体任一斜截面上的应力

值。

取 bef 为脱离体如图 10-4c 所示。先假定作用于斜截面 ef 上的未知应力 σ_α 和 τ_α 都是正值。脱离体 bef 的立体图和其上的应力作用情况如图 10-4d 所示。设斜截面 ef 的面积为 dA，则截面 eb 和 bf 的面积分别为 $dA\cos\alpha$ 和 $dA\sin\alpha$。脱离体 bef 的受力图如图 10-4e 所示。

取 n 轴和 t 轴如图 10-4e 所示，列出脱离体的静力平衡方程如下：

由 $\Sigma n=0$，得

$$\sigma_\alpha dA+(\tau_x dA\cos\alpha)\sin\alpha-(\sigma_x dA\cos\alpha)\cos\alpha+(\tau_y dA\sin\alpha)\cos\alpha-(\sigma_y dA\sin\alpha)\sin\alpha=0 \tag{a}$$

由 $\Sigma t=0$, 得

$$\tau_\alpha dA-(\tau_x dA\cos\alpha)\cos\alpha-(\sigma_x dA\cos\alpha)\sin\alpha+(\tau_y dA\sin\alpha)\sin\alpha+(\sigma_y dA\sin\alpha)\cos\alpha=0 \qquad (b)$$

根据式(a)和(b)即可分别推导出 σ_α 和 τ_α 的计算公式。

首先利用剪应力互等定理 $\tau_x=\tau_y$, 将式(a)改写为

$$\sigma_\alpha+2\tau_x\sin\alpha\cos\alpha-\sigma_x\cos^2\alpha-\sigma_y\sin^2\alpha=0$$

代入以下的三角函数关系:

$$\cos^2\alpha=\frac{1+\cos2\alpha}{2};\ \sin^2\alpha=\frac{1-\cos2\alpha}{2};\ 2\sin\alpha\cos\alpha=\sin2\alpha$$

可得

$$\sigma_\alpha+\tau_x\sin2\alpha-\sigma_x\left(\frac{1+\cos2\alpha}{2}\right)-\sigma_y\left(\frac{1-\cos2\alpha}{2}\right)=0$$

经过整理后, 即为

$$\sigma_\alpha=\frac{\sigma_x+\sigma_y}{2}+\frac{\sigma_x-\sigma_y}{2}\cos2\alpha-\tau_x\sin2\alpha \qquad (10\text{-}1)$$

同理, 可由式(b)导得

$$\tau_\alpha=\frac{\sigma_x-\sigma_y}{2}\sin2\alpha+\tau_x\cos2\alpha \qquad (10\text{-}2)$$

式(10-1)和(10-2)就是对处于平面应力状态下的单元体, 根据σ_x、σ_y、τ_x 求 σ_α 和 τ_α 的**解析法公式**。

例题 10-1 图 10-5a 表示一简支梁, 试计算在点 k 处, $\alpha=-30°$的斜截面上, 应力的大小和方向。

解:

(1) 计算截面 m-m 上的内力

支座反力 $V_A=V_B=10\text{kN}$, 画出内力图如图 10-5b 所示, 截面 m-m 上的内力为:

$$M=10\times10^3\times300\times10^{-3}=3000\text{N}\cdot\text{m}=3\text{kN}\cdot\text{m}$$

$$Q=10\text{kN}$$

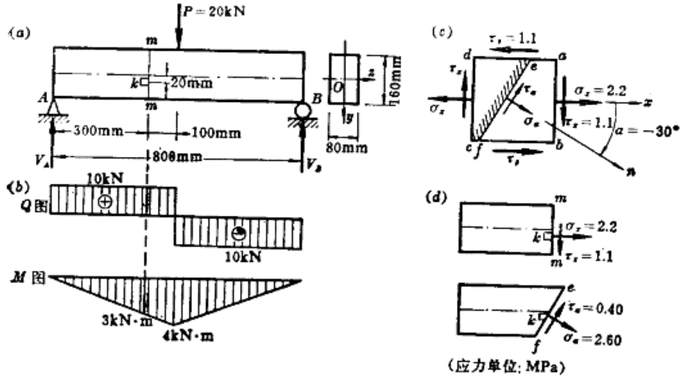


图 10-5　例题 10-1 图

(2) 计算截面 m-m 上点 k 处的正应力 σ_x、σ_y 和剪应力 τ_x、τ_y

由式(8-2)计算 σ_x:

$$I=\frac{bh^3}{12}=\frac{80\times160^3}{12}=27.3\times10^6\text{mm}^4=27.3\times10^{-6}\text{m}^4$$

$$\sigma_x=\frac{My}{I}=\frac{3\times10^3\times20\times10^{-3}}{27.3\times10^{-6}}=2.2\,\text{MPa}$$

根据梁纯弯曲时的单向受力假设,可近似地认为

$$\sigma_y=0$$

由式(8-7)计算 τ_x 和 τ_y:

$$\tau_x=\frac{QS}{Ib}=\frac{10\times10^3(60\times80\times50\times10^{-9})}{27.3\times10^{-6}\times80\times10^{-3}}=1.1\times10^6\text{N/m}^2$$

$$=1.1\text{MPa}$$

$$\tau_y=-\tau_x=-1.1\text{MPa}$$

在点 k 处取出单元体,并将 σ_x、σ_y、τ_x、τ_y 的代数值表示在单元体上,如图 10-5c 所示。

(3) 计算点 k 处 $\alpha=-30°$ 的斜截面上的应力

此为试读,需要完整PDF请访问: www.ertongbook.com

将上面已求出的 σ_x、σ_y、τ_x、τ_y 的代数值和 $\alpha=-30°$ 代入式(10-1)和(10-2)即可求得:

$$\sigma_\alpha=\frac{2.2}{2}+\frac{2.2}{2}\cos 2(-30°)-1.1\sin 2(-30°)$$

$$=1.1+1.1\times\frac{1}{2}+1.1\times\frac{\sqrt{3}}{2}=2.60\text{MPa}$$

$$\tau_\alpha=\frac{2.2}{2}\sin 2(-30°)+1.1\cos 2(-30°)$$

$$=1.1\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)+1.1\times\frac{1}{2}=-0.40\text{ MPa}$$

将求得的 σ_α 和 τ_α 表示在单元体上,如图 10-5*c* 所示。

(4) 若将图 10-5*c* 所示单元体上的应力情况反映到梁 *AB* 上去,则将如图 10-5*d* 所示。

§ 10-3 应 力 圆

在本章中我们将介绍一种确定 σ_α 和 τ_α 的图解法。

若对式(10-1)作如下的变动:

$$\sigma_\alpha-\frac{\sigma_x+\sigma_y}{2}=\frac{\sigma_x-\sigma_y}{2}\cos 2\alpha-\tau_x\sin 2\alpha$$

并将上式和式(10-2)分别平方后相加,即可得到

$$\left(\sigma_\alpha-\frac{\sigma_x+\sigma_y}{2}\right)^2+\tau_\alpha^2=\left(\frac{\sigma_x-\sigma_y}{2}\cos 2\alpha-\tau_x\sin 2\alpha\right)^2+\left(\frac{\sigma_x-\sigma_y}{2}\sin 2\alpha+\tau_x\cos 2\alpha\right)^2$$

或

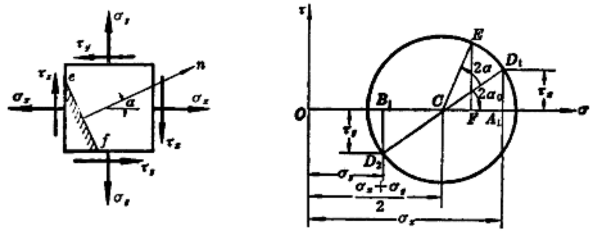
$$\left(\sigma_\alpha-\frac{\sigma_x+\sigma_y}{2}\right)^2+\tau_\alpha{}^2=\left(\frac{\sigma_x-\sigma_y}{2}\right)^2+\tau_x^2 \tag{10-3}$$

对所研究的单元体(例如图 10-6*a* 所示的单元体),σ_x、σ_y、τ_x 都是已知量,故式(10-3)的右端为一常量。由解析几何可知,式(10-3)为一圆的方程。若取直角坐标系并以横轴为 σ 轴,纵轴为 τ

轴，则式(10-3)所代表的圆的圆心在σ轴上，且离坐标原点的距离为$\frac{\sigma_x+\sigma_y}{2}$；圆的半径为$\sqrt{\left(\frac{\sigma_x-\sigma_y}{2}\right)^2+\tau_x^2}$。我们把这种圆叫做**应力圆**或**莫尔**(O·Mohr)圆。

下面介绍怎样根据已知单元体上的σ_x、σ_y、τ_x、τ_y作出应力圆，以及怎样应用应力圆求单元体任意斜截面上的应力σ_α、τ_α。

取直角坐标系$\sigma O\tau$，并以横坐标代表σ(向右为正)，以纵坐标代表τ(向上为正)，在坐标轴上按比例量取$\overline{OA_1}=\sigma_x$，$\overline{A_1D_1}=\tau_x$，得到点D_1。量取$\overline{OB_1}=\sigma_y$，$\overline{B_1D_2}=\tau_y$得到点D_2。作直线连接点D_1、D_2并与σ轴交于点C，以点C为圆心，D_1D_2为直径作一圆如图10-6b所示。它就是表示图10-6a所示单元体的平面应力状态的应力圆。



(a)　　　　　　(b)

图10-6　应力圆

下面证明，所作出的圆是否满足式(10-3)。

圆心C在σ轴上，$\overline{OC}=\frac{\overline{OA_1}+\overline{OB_1}}{2}=\frac{\sigma_x+\sigma_y}{2}$，故此圆的圆心到原点$O$的距离为$\frac{\sigma_x+\sigma_y}{2}$。在直角三角形$CA_1D_1$中，因$\overline{CA_1}=\frac{\overline{OA_1}-\overline{OB_1}}{2}=\frac{\sigma_x-\sigma_y}{2}$，$\overline{A_1D_1}=\tau_x$，故$\overline{CD_1}=\sqrt{\left(\frac{\sigma_x-\sigma_y}{2}\right)^2+\tau_x^2}$即为圆的半径。它们都满足式(10-3)。

利用应力圆可求得单元体任意斜截面上的应力。例如我们要

求图 10-6a 所示单元体的任意斜截面ef(它的外向法线和 σ_x 间的夹角为α)上的应力 σ_α 和 τ_α。从式(10-1)和(10-2)可以看出，σ_α和τ_α都随 2α 的正弦和余弦而变。故当单元体上斜截面的角度为 α 时，在应力圆中应从点 D_1 开始，按单元体上 α 的转动方向量一弧长，并使其所对应的圆心角为 2α 而得到点 E，点 E 的横坐标和纵坐标就分别代表 ef 斜截面上的σ_α 和 τ_α。证明如下：

$$\begin{aligned}\overline{OF}&=\overline{OC}+\overline{CF}=\overline{OC}+\overline{CE}\cos(2\alpha_0+2\alpha)\\&=\overline{OC}+\overline{CE}\cos 2\alpha_0\cos 2\alpha-\overline{CE}\sin 2\alpha_0\sin 2\alpha\\&=\overline{OC}+(\overline{CD_1}\cos 2\alpha_0)\cos 2\alpha-(\overline{CD_1}\sin 2\alpha_0)\sin 2\alpha\\&=\overline{OC}+\overline{CA_1}\cos 2\alpha-\overline{A_1D_1}\sin 2\alpha\\&=\frac{\sigma_x+\sigma_y}{2}+\frac{\sigma_x-\sigma_y}{2}\cos 2\alpha-\tau_x\sin 2\alpha\end{aligned}$$

上式的右边部分与式(10-1)的右边部分完全相同，即$\overline{OF}=\sigma_\alpha$。同样可证明$\overline{EF}=\tau_\alpha$。故应力圆圆周上点$E$的坐标即代表 ef 斜截面上的应力情况。

注意，表示一点应力状态的单元体和应力圆之间有着相互的对应关系，即：单元体任一截面上的应力值与应力圆上一点的坐标值相对应；单元体上二截面的外向法线所夹的角为 α 时，则在应力圆上与此二截面相对应的两点之间的圆弧所对的圆心角为 2α，且它们的转向相同。

例题 10-2 试用图解法计算图 10-5c 所示单元体在 ef 截面上的应力，ef 面和 ab 面的外向法线之间的夹角为 $\alpha=-30°$ (图 10-7a)。

解:

(1) 取直角坐标系 $\sigma O\tau$。

(2) 在横坐标轴上按比例量取$\overline{OA_1}=\sigma_x=2.2\text{MPa}$，再沿纵坐标轴方向量取$\overline{A_1D_1}=\tau_x=1.1\text{MPa}$ 得到点 D_1；同样根据 $\sigma_y=0$,

$\tau_y=-1.1$MPa 在 τ 轴上沿负方向量取 $\overline{OD_2}=\tau_y=-1.1$ MPa 得到点 D_2。

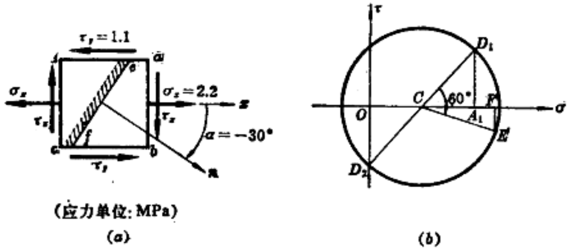


图 10-7　例题 10-2 图

(3) 作联接点 D_1、D_2 的直线，它交 σ 轴于点 C。以点 C 为圆心，以直线 D_1D_2 为直径作出应力圆如图 10-7b 中所示。

(4) 从应力圆圆周上的点 D_1 开始，沿着与 α 转向相同的方向 ($\alpha=-30°$，负号代表顺时针转向)量一弧长 $\overset{\frown}{D_1E}$(其所对应的中心角为$2\alpha=-60°$)，得到圆周上的一点 E，点 E 的横坐标和纵坐标即代表σ_α 和 τ_α。按相同的比例量得:

$$\sigma_\alpha=\sigma_{-30°}=2.6\text{MPa}$$

$$\tau_\alpha=\tau_{-30°}=-0.4\text{MPa}$$

此结果和由数解法得到的非常接近。

例题 10-3　试分别用数解法及图解法求图 10-8a 所示单元体在 $\alpha=30°$ 的斜截面上的应力。

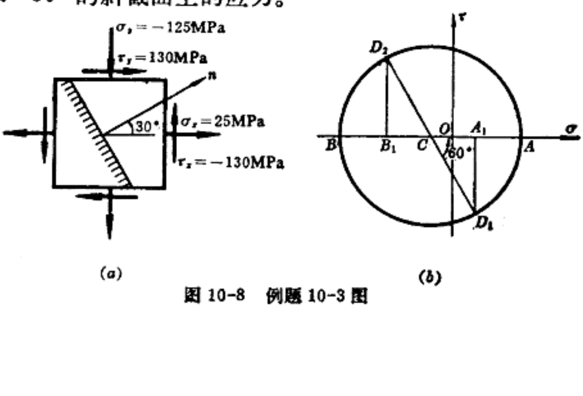


图 10-8　例题 10-3 图

解:

1. 数解法

用公式(10-1)、(10-2)求 α 截面上的应力

$$\sigma_\alpha=\frac{\sigma_x+\sigma_y}{2}+\frac{\sigma_x-\sigma_y}{2}\cos 2\alpha-\tau_x\sin 2\alpha$$

$$=\frac{25+(-125)}{2}+\frac{25-(-125)}{2}\cos 60°-(-130)\sin 60°$$

$$=-50+\frac{150}{4}-(-130)\frac{\sqrt{3}}{2}=-50+37.5+112.5=100\text{MPa}$$

$$\tau_\alpha=\frac{\sigma_x-\sigma_y}{2}\sin 2\alpha+\tau_x\cos 2\alpha$$

$$=\frac{25-(-125)}{2}\sin 60°+(-130)\cos 60°$$

$$=75\times\frac{\sqrt{3}}{2}-65=0$$

2. 图解法

由 $\sigma_x=25\text{MPa}$、$\tau_x=-130\text{MPa}$ 作出点 D_1，由 $\sigma_y=-125\text{MPa}$，$\tau_y=130\text{MPa}$ 作出点 D_2。作连接 D_1、D_2 的直线交 σ 轴于点 C。以点 C 为圆心、$\overline{D_1D_2}$ 为直径作出应力圆如图 10-8b所示。

从点 D_1 开始沿反时针转向（和 α 的转向相同）量一弧长 $\widehat{D_1A}$ 并使它所对应的圆心角为 $2\alpha=60°$，得到的点 A 刚好落在 σ 轴上，其横坐标即为 σ_α，纵坐标即为 τ_α。量得

$$\sigma_\alpha=100\text{MPa},\qquad \tau_\alpha=0$$

§10-4 主 应 力

根据上面介绍的方法，对构件上处于平面应力状态下的任意一点，只要知道作用在通过该点的 x 截面和 y 截面上的应力 σ_x、τ_x、σ_y、τ_y，即可计算出其任意斜截面上的应力 σ_α 和 τ_α。对构件的强度计算来说，最关键的问题是要求出在构件中出现的最大正应

力 σ_{max} 和最大剪应力 τ_{max}。下面介绍求 σ_{max} 和 τ_{max} 的方法。

一、主应力和主平面

1. 确定主应力和主平面的数解法

由式(10-1)和(10-2)可以看出，因 σ_x、τ_x 和 σ_y、τ_y 都是已知常量，故 σ_α 和 τ_α 都为 α 的函数。随着斜截面位置(即 α)的不同，σ_α 和 τ_α 的大小和方向也不同。下面用求函数极值的方法求 σ_α 和 τ_α 的极大值，极小值，以及它们所在截面的位置。

由 $\frac{d\sigma_\alpha}{d\alpha}=0$ 可得

$$\frac{d\sigma_\alpha}{d\alpha}=-(\sigma_x-\sigma_y)\sin 2\alpha-2\tau_x\cos 2\alpha=0$$

即

$$\frac{\sigma_x-\sigma_y}{2}\sin 2\alpha+\tau_x\cos 2\alpha=0 \qquad (c)$$

但由式(10-2)知

$$\tau_\alpha=\frac{\sigma_x-\sigma_y}{2}\sin 2\alpha+\tau_x\cos 2\alpha$$

即有 $\tau_\alpha=0$

式(c)说明，在剪应力 $\tau_\alpha=0$ 的平面上，正应力 σ_α 是极值，即它比单元上任何其它截面上的正应力都要大(或都要小)。在§10-1 中已经提到，我们通常把这种剪应力等于零的平面叫做**主平面**，而把作用在主平面上的正应力叫做**主应力**。

将式(c)进一步简化为

$$\frac{\sigma_x-\sigma_y}{2}\mathrm{tg}2\alpha+\tau_x=0$$

若用 α_0 表示在主平面的外向法线 n 与 x 轴之间的夹角，并代入上式，即可得到

$$\mathrm{tg}2\alpha_0=-\frac{2\tau_x}{\sigma_x-\sigma_y} \qquad (10\text{-}4)$$

由式(10-4)可确定主平面的位置，其中的 α_0 有两个根。因

此为试读，需要完整PDF请访问：www.ertongbook.com