LI
LUN
LI
XUE
JIAO
CHENG

理论力学

教程

山东科学技术出版社

理论力学教程

张瑞海
项仁寿 等编
焦恩夏

山东科学技术出版社
一九八七年·济南

理论力学教程

张瑞海
项仁寿　等编
焦恩夏

*

山东科学技术出版社出版
山东省新华书店发行
山东新华印刷厂潍坊厂印刷

*

787×1092毫米 32开本　10.375印张　189千字
1987年6月第1版　1987年6月第1次印刷
印数：1—10300

ISBN・7—5331—0088—3

O・4

书号 13195・172　定价 2.25元

前　言

根据教育部1983年修订的“中学教师进修高等师范物理专业教学大纲”，1985年全国理科教材编委会师专教学计划和教材讨论会精神，在山东省高等师范函授和师专编写的《理论力学》的基础上，总结了山东省20余所院校的教学经验，编写了这本《理论力学教程》。全书共分六章，可讲述54学时，内容包括：经典力学基础（6学时）；质点动力学（12学时）；质点系动力学（10学时）；刚体力学（12学时）；相对运动（6学时）；分析力学初步（8学时）。

本书由山东师范大学、曲阜师范大学、聊城师范学院、烟台师范学院、临沂师专、昌潍师专、菏泽师专、枣庄师专、德州师专、滨州师专、济宁师专、淄博师专、山东省教育学院、济南教育学院、青岛教育学院、烟台教育学院、胜利油田师专和烟台公安学校等20余所院校共同编写，书中积累了各校多年的教学经验和补充的新材料。本书的特点是：精选了教学内容，适当压缩了学时；为适应函授、夜大和教育学院成人教育的特点，知识面作了适当拓宽，内容由浅入深，便于阅读；突出物理思想与物理概念，联系中学教学和生产实际；适当介绍了一点物理学史和贡献突出的物理学家。

根据师专、教育学院和高师函授的教学特点，每章的编写结构分成如下几部分：正文部分，体现教学大纲的主要精神与要求，是教师讲授的主要部分；本章小结，指明重点，

以便于读者复习、掌握；思考题和习题，巩固和熟练基本内容，提高解题能力，习题附有答案；自我测验题，检验读者对本章内容的掌握情况。洪铭熙教授主编的《理论力学理论与题解》，可作本教程的配套用书，教程中许多例题和习题，都取自该题解。

本书第一、二、六章由项仁寿、许敬之、于大钧、滕天启、孙大典、张明伦、冯铭成编写，项仁寿执笔；第三、五章由张瑞海、王启玲、孔祥田、周美兴、王河、姜万禄编写，张瑞海执笔；第四章由焦恩夏、张佩玲、苑凤忠、黄新民、梁维林、陈世生、甄仁波、李义荣编写，焦恩夏执笔。全书在梅玉初、桂学同、王喜山指导下编写，由洪铭熙教授审稿，王喜山教授统稿。蒯孙美荣同志对全书插图做了大量的工作。

本书虽反复修改多次，仍难免有错误和不当之处，敬请读者批评指正。

编　者

1986年12月

目　　录

第一章　经典力学基础

§1·1　质点运动的描述

一、参照系与坐标系

要描述质点的位置以及它的运动，就必须首先选取另一个物体作为参考，此物体叫做参照物。在参照物上取不共面的三相交直线作为标架并与参照物相固连，这一标架可以代表参照物，称之为参照系。

参照物总是一个大小有限的物体，但装上标架以后，可认为这个标架能刚性地延伸到空间的无限远处。因此，**参照系是一个与参照物相固连的空间**。有了对于参照系的上述认识，在研究相对运动问题时，对于物体由于受参照系运动的“牵连”而具有的牵连运动，就容易理解得多了。

在有些情况下，可能只有参照系，而不一定有真实的参照物。例如，设想从地球中心出发，引出三条直线($O\xi$,$O\eta$,$O\zeta$)分别指向三个恒星，这个标架的原点与地心一起运动，而标架的三个轴的方向不变，这也构成一个参照系，叫做地心参照系(图 1-1)。研究人造卫星的运动时就常常采用这一参照系。若原点仍在地心，取三条不共面的直线(Ox,Oy,Oz)作为标架但却固连于地球，随地球一起运动，这样建立的参照系叫做地球参照系。必须将地心参照系与地球参照系区别开来。在处理一般力学问题时，如不特别声明，一般均

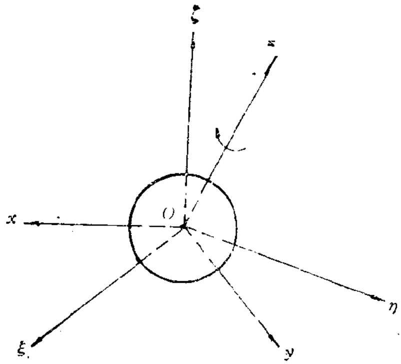

图 1-1

以地球为参照系。

参照系选定以后，物体作什么样的运动就有了确定的意义。然而，要想精确地描写质点的运动，还要从数学上确定质点相对于参照系的位置、速度和加速度。这就需要在参照系上建立适当的坐标系。经常采用的坐标系有：直角坐标系、柱面坐标系、球面坐标系和自然坐标系。坐标系选择得恰当，可以简化计算并便于描述。坐标系是固定在参照系上的，因而坐标系实质上是参照系的数学抽象。指明坐标系不仅是指明了参照系，而且能定量地描述质点的运动规律。

二、运动方程和轨道

为了确定质点的位置，先确定参照系。然后，在参照系上选定坐标系的原点和坐标轴（图 1-2），质点 P 的位置可以用由原点 O 到 P 点的有向线段 $\boldsymbol{r}$ 来确定，矢量 $\boldsymbol{r}$ 称为位置矢量，简称位矢。在直角坐标系中，x、y、z 正是 $\boldsymbol{r}$ 在相应坐标轴上的投影，故

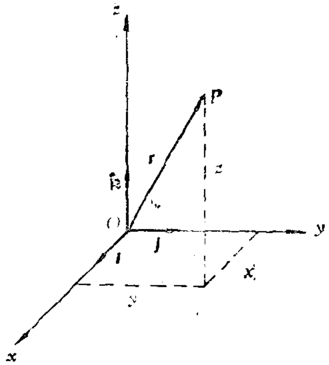

图 1-2

$$\boldsymbol{r}=x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j}+z\boldsymbol{k} \tag{1·1·1}$$

质点的机械运动是质点的空间位置随时间变化的过程。当运动质点由一点运动到另一点时，必然要经过轨道上该两点之间的所有点，所以质点的坐标(x,y,z)以及位矢$\boldsymbol{r}$都应该是时间t的单值连续函数。因而有

$$x=x(t),\quad y=y(t),\quad z=z(t) \tag{1·1·2}$$

或

$$\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(t) \tag{1·1·3}$$

以上两式叫做质点的运动方程，它们是完全等价的。知道了运动方程，就能够确定任一时刻质点的位置，从而确定质点的运动。

正因为运动方程确定了运动质点任一时刻在空间的位置，因而也就确定了运动质点的轨道。(1·1·2)式实际上是以时间t为参数的轨道参数方程。从这些方程中消去t，则运动质点的轨道方程为

$$\left.\begin{aligned}F_1(x,y)=0\\F_2(y,z)=0\end{aligned}\right\}\tag{1·1·4}$$

这两个方程分别描述两个曲面，其交线即是运动质点的轨道.

假如质点始终在一个平面上运动，设此平面为 xOy 平面，则方程(1·1·2)成为

$$\left.\begin{aligned}x=x(t)\\y=y(t)\end{aligned}\right\}\tag{1·1·5}$$

其轨道方程为

$$F_1(x,y)=0\tag{1·1·6}$$

若采用平面极坐标，质点的位置由下式确定

$$r=r(t),\quad \theta=\theta(t)\tag{1·1·7}$$

r、θ 分别为极径和极角，而轨道方程为

$$\Phi(r,\theta)=0\tag{1·1·8}$$

三、位移、速度和加速度

设质点沿着任意曲线运动，在时刻 t 质点位于 A 点，位矢为 $\boldsymbol{r}_1$；经过 Δt 时间后，运动到 B 点，位矢为 $\boldsymbol{r}_2$. $\Delta\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}_2-\boldsymbol{r}_1$ 称为质点在 Δt 时间内的位移矢量. 位移矢量 $\Delta\boldsymbol{r}$ 描述了质点在 Δt 时间内位矢的变化(图 1-3).

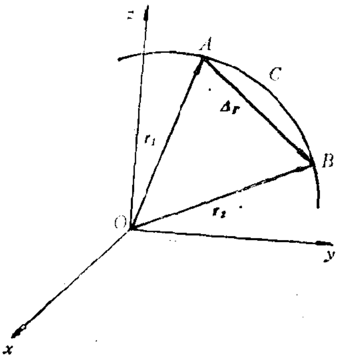

图 1-3

质点在 Δt 时间内经过的路径的长度 Δl (如图 1-3 中曲线 ACB 的长度)称为路程，它是一个标量. 位移与

路程是两个不同的概念，必须加以区别。在曲线运动中位移的大小可以和路程相差很大，但当 $\Delta t\to 0$ 时，即在极限情况下，有 $|d\boldsymbol{r}|=dl$。

质点在 Δt 时间内，由 A 点运动到 B 点的平均速度记作

$$\boldsymbol{v}^*=\frac{\Delta\boldsymbol{r}}{\Delta t} \qquad (1\cdot1\cdot9)$$

显然，平均速度只能粗略地说明质点在 Δt 时间内的运动情况，但时间 Δt 取得越短，平均速度 $\boldsymbol{v}^*$ 就越能反映质点在 A 点处的真实运动情况。

令 $\Delta t\to 0$，$B\to A$，则 $\Delta\boldsymbol{r}\to 0$，$\Delta\boldsymbol{r}$ 的极限方向乃是轨道上 A 点的切线方向。此时平均速度趋于 t 时刻质点在 A 点的瞬时速度 $\boldsymbol{v}$，即

$$\boldsymbol{v}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\boldsymbol{r}}{\Delta t}=\frac{d\boldsymbol{r}}{dt} \qquad (1\cdot1\cdot10)$$

瞬时速度简称为质点在 t 时刻的速度，其量值称为速率，其方向取决于 $d\boldsymbol{r}$ 的方向，即沿轨道上 A 点的切线方向。速度真实而又细致地描写了质点在 t 时刻的运动情况（运动的方向与快慢），用牛顿的记法，$\frac{d\boldsymbol{r}}{dt}$ 还可记作 $\dot{\boldsymbol{r}}$，只有对时间的导数可以这样写。同样地，$\ddot{\boldsymbol{r}}$ 表示 $\boldsymbol{r}$ 对时间的二阶导数。

类似地可以得到加速度的定义。设时刻 t 质点的速度为 $\boldsymbol{v}_1$，经过 Δt 时间后，其速度变为 $\boldsymbol{v}_2$，故速度的改变量为 $\Delta\boldsymbol{v}=\boldsymbol{v}_2-\boldsymbol{v}_1$。$\boldsymbol{a}^*=\frac{\Delta\boldsymbol{v}}{\Delta t}$ 称作质点在 Δt 时间内的平均加速度，描写质点在 Δt 时间内速度变化的平均状态。令 $\Delta t\to 0$，平均加速度趋向于 t 时刻质点的瞬时加速度（简称加速度），即

$$a = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{dv}{dt} = \dot{v} \qquad (1\cdot1\cdot11)$$

上式也可以表示为

$$a = \frac{d}{dt}\left(\frac{dr}{dt}\right) = \frac{d^2 r}{dt^2} = \ddot{r} \qquad (1\cdot1\cdot12)$$

加速度 $\boldsymbol{a}$ 给出了速度在 t 时刻的时间变化率，即描述了 t 时刻质点运动速度变化的状态。

§1·2 速度与加速度的分量表示式

在解决力学问题时，往往需要求出速度和加速度在坐标系规定的方向上的分量。本节将研究速度、加速度在最常见的几种坐标系（直角坐标系、极坐标系、自然坐标系）中的分量表示法。

一、直角坐标系

由于沿 x、y、z 轴的单位矢量 $\boldsymbol{i}$、$\boldsymbol{j}$、$\boldsymbol{k}$ 的方向是恒定的，因而有

$$\frac{d\boldsymbol{i}}{dt} = \frac{d\boldsymbol{j}}{dt} = \frac{d\boldsymbol{k}}{dt} = 0 \qquad (1\cdot2\cdot1)$$

这正是直角坐标系与其他坐标系的主要区别。由于质点的位置由位矢 $\boldsymbol{r} = x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j} + z\boldsymbol{k}$ 来描述，故其速度矢量为

$$\boldsymbol{v} = \frac{d\boldsymbol{r}}{dt} = \frac{dx}{dt}\boldsymbol{i} + \frac{dy}{dt}\boldsymbol{j} + \frac{dz}{dt}\boldsymbol{k} = \dot{\boldsymbol{r}} \qquad (1\cdot2\cdot2)$$

速度分量

$$v_x = \dot{x}, \quad v_y = \dot{y}, \quad v_z = \dot{z} \qquad (1\cdot2\cdot3)$$

这表明，运动质点的速度在各坐标轴的分量等于它的各

相应坐标对时间的一阶导数。因此，如果已知质点的运动方程(1·1·2)式，则由(1·2·3)式即可求得其速度的大小和方向

$$v=\sqrt{v_x^2+v_y^2+v_z^2}=\sqrt{\dot{x}^2+\dot{y}^2+\dot{z}^2} \qquad (1\cdot2\cdot4)$$

$$\cos(\widehat{\boldsymbol{v},\boldsymbol{i}})=\frac{\dot{x}}{v};\ \cos(\widehat{\boldsymbol{v},\boldsymbol{j}})=\frac{\dot{y}}{v};\ \cos(\widehat{\boldsymbol{v},\boldsymbol{k}})=\frac{\dot{z}}{v} \qquad (1\cdot2\cdot5)$$

反过来，如果知道质点在各时刻的速度分量以及质点在初始时刻的坐标 x_0、y_0、z_0，就可以通过积分运算求得质点的运动方程

$$\left.\begin{aligned} x&=x_0+\int_0^t v_x\cdot dt\\ y&=y_0+\int_0^t v_y\cdot dt\\ z&=z_0+\int_0^t v_z\cdot dt \end{aligned}\right\} \qquad (1\cdot2\cdot6)$$

现在来求加速度的分量式。将(1·2·3)代入(1·1·11)式即得加速度矢量

$$\boldsymbol{a}=\frac{dv_x}{dt}\boldsymbol{i}+\frac{dv_y}{dt}\boldsymbol{j}+\frac{dv_z}{dt}\boldsymbol{k}=\frac{d^2x}{dt^2}\boldsymbol{i}+\frac{d^2y}{dt^2}\boldsymbol{j}+\frac{d^2z}{dt^2}\boldsymbol{k} \qquad (1\cdot2\cdot7)$$

故

$$\boldsymbol{a}=\ddot{\boldsymbol{r}}\ ;\ a_x=\ddot{x},\ \ a_y=\ddot{y},\ \ a_z=\ddot{z} \qquad (1\cdot2\cdot8)$$

这表明，运动质点的加速度在直角坐标系各坐标轴上的分量，等于其速度的相应分量对时间的一阶导数或其相应坐标对时间的二阶导数。因此，若已知运动方程或速度的分量

表达式，就可以通过微分运算，求得加速度的大小和方向

$$a=\sqrt{\dot{v}_x^2+\dot{v}_y^2+\dot{v}_z^2}=\sqrt{\ddot{x}^2+\ddot{y}^2+\ddot{z}^2} \quad (1\cdot2\cdot9)$$

$$\left.\begin{aligned}\cos(\widehat{\boldsymbol{a},\boldsymbol{i}})&=\frac{\dot{v}_x}{a}=\frac{\ddot{x}}{a}\\ \cos(\widehat{\boldsymbol{a},\boldsymbol{j}})&=\frac{\dot{v}_y}{a}=\frac{\ddot{y}}{a}\\ \cos(\widehat{\boldsymbol{a},\boldsymbol{k}})&=\frac{\dot{v}_z}{a}=\frac{\ddot{z}}{a}\end{aligned}\right\} \quad (1\cdot2\cdot10)$$

反过来，如果已知质点的加速度以及它在初始时刻的速度，运用积分运算可以求得质点的速度并进而求得运动方程

$$\left.\begin{aligned}v_x&=v_{x0}+\int_0^t a_x dt\\ v_y&=v_{y0}+\int_0^t a_y dt\\ v_z&=v_{z0}+\int_0^t a_z dt\end{aligned}\right\} \quad (1\cdot2\cdot11)$$

二、极坐标系

极坐标系只适用于描述质点的平面运动。在解平面曲线问题时，例如研究质点在有心力场中的运动，运用极坐标系往往较用直角坐标系方便。

在极坐标系中，质点 P 的位置，可以用极径 r 和极角 θ 确定(图 1-4)。规定 $\boldsymbol{r}^0$ 为径向单位矢量，方向沿 $\overrightarrow{op}$；$\boldsymbol{\theta}^0$ 为横向单位矢量，$\boldsymbol{\theta}^0\perp\boldsymbol{r}^0$ 并指向 θ 增加的方向。显然，当质点沿曲线轨道运动时，$\boldsymbol{r}^0$、$\boldsymbol{\theta}^0$ 的方向是改变的，这与直角坐标系单位矢量方向恒定的情形完全不同。

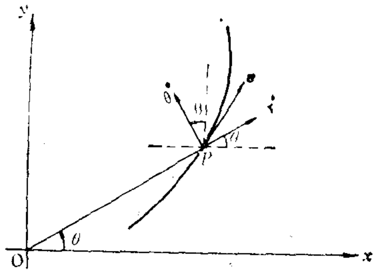

图 1-4

由图 1-4 可见，$\boldsymbol{r}^0$、$\boldsymbol{\theta}^0$ 在直角坐标系中的分量为

$$\left.\begin{aligned}\boldsymbol{r}^0 &= \cos\theta\boldsymbol{i} + \sin\theta\boldsymbol{j}\\ \boldsymbol{\theta}^0 &= -\sin\theta\boldsymbol{i} + \cos\theta\boldsymbol{j}\end{aligned}\right\} \tag{1·2·12}$$

对(1·2·12)求导，得

$$\left.\begin{aligned}\dot{\boldsymbol{r}}^0 &= (-\sin\theta\boldsymbol{j} + \cos\theta\boldsymbol{j})\dot{\theta}\\ \dot{\boldsymbol{\theta}}^0 &= -(\cos\theta\boldsymbol{i} + \sin\theta\boldsymbol{j})\dot{\theta}\end{aligned}\right\} \tag{1·2·13}$$

比较式(1·2·12)和(1·2·13)即得

$$\left.\begin{aligned}\dot{\boldsymbol{r}}^0 &= \dot{\theta}\boldsymbol{\theta}^0\\ \dot{\boldsymbol{\theta}}^0 &= -\dot{\theta}\boldsymbol{r}^0\end{aligned}\right\} \tag{1·2·14}$$

在此基础上可以求出速度和加速度在极坐标系中的分量式。

极坐标系中质点的位矢可表为

$$\boldsymbol{r} = r\boldsymbol{r}^0 \tag{1·2·15}$$

故