高等医药院校教材

医用物理学

（医学、口腔、预防、妇幼、法医、影像、药学、生物医学工程专业用书）

胡运惠　主编

中国矿业大学出版社

内 容 简 介

本书介绍了物理学的基本定律及其在医学上的具体应用，是一本物理理论和医学应用相结合的教材。全书共20章，在保持大学普通物理学的基本内容的前提下，还编写了流体运动、几何光学、电子学基础、医用电子测量技术以及现代医学成像的物理基础等内容。

本书可供高等医药院校医学、口腔、预防、妇幼、法医、影像等专业的学生使用，又可供基础医学研究工作者、临床医生、医学研究生以及广大医务工作者参考。

责任编辑　安乃隽
责任校对　王建川

医 用 物 理 学
主编　胡运惠

中国矿业大学出版社出版
新华书店经销　中国矿业大学印刷厂印刷
开本 787×1092 毫米 1/16 印张 21.25 字数 517 千字
1996 年 3 月第一版　1996 年 3 月第一次印刷
印数　1—8800 册

ISBN 7-81040-483-0

O·34　　定价：17.50 元

前　言

本书是由西安医科大学、兰州医学院、新疆医学院、锦州医学院、宁夏医学院、石河子医学院、青岛大学医学院和延安医学院等院校，共同为适应教学改革和不断提高医用物理学的教学质量的需要，从培养跨世纪的高等医药人才出发，以卫生部曾经颁发的高等医药院校医用物理学教学大纲为基本依据，并考虑到医用物理学的迅速发展和各校学制、学时以及生源的不同等特点而编写的教材。参加编写的同志均为长期工作在教学第一线、具有丰富教学经验的教师，因此，本书可谓各校物理教学经验的总结。

这本教材在内容的选择和处理上具有一定的特色，既总结了多年的教学实践，又吸收了国内外同类教材的长处。其主要特点是：①在保持物理学本身系统的基础上，加强了与医学实际的联系，比较深入地介绍了物理学定律和知识在医学中的应用；②为适应医学科学的迅速发展和反映医学物理的新成就，本书对近年来异军突起的先进医学成像技术——超声、X—CT 和核磁共振成像的物理基础进行了介绍，为读者掌握这些高新技术提供了必备的基础；③在每章之后附有小结，这有助于读者简要而系统地掌握该章的基本内容。便于自学为本书编写的指导思想之一，编者力求叙述条理清楚，语言简洁生动，对于学生难于理解而又必须掌握的内容，尽量做到深入浅出。全书共 20 章，每章之后附有习题，书末列有供读者参考的附录。

西安医科大学胡运惠编写绪论、第 1、20 章，延安医学院叶向前、张延芳编写第 2 章，锦州医学院金宝荣编写第 3 章，刘新纯编写第 4 章，陈玉珂编写第 5 章，青岛大学医学院辛卫东编写第 6 章，胡运惠、陈玉珂编写第 7 章，新疆医学院李芳孝编写第 8、9 章，宁夏医学院张国光编写第 10、11 章，石河子医学院许昆编写第 12、13 章，兰州医学院亢效虎、陈天华编写第 14 章，陈天华、亢效虎编写第 15 章，青岛大学医学院李振江编写第 16 章，西安医科大学王曾珞、胡运惠编写第 17 章，何玉琴编写第 18 章，王芝云编写第 19 章，延安医学院韩继民绘制全部插图。全书由胡运惠教授修改统稿任主编，李芳孝、陈玉珂、张国光、金宝荣、许昆、亢效虎、叶向前、辛卫东任副主编。

第四军医大学杨春智、段新民教授参加了定稿会，上官丰和教授对本书某些章节的编写提供了宝贵的意见，参编各校的有关领导对本书的编写工作给予了大力的支持，在此，编者致以诚挚的谢意。

由于编者水平有限，书中不妥和错误之处在所难免，恳祈使用本书的同行、学生以及广大读者不吝指正。

编者

1995 年 12 月

目　　录

绪　论

物理学(Physics)是研究物质的普遍性质及其运动规律的科学。物质运动包括机械运动、分子热运动、电磁运动、微观粒子的运动等。物理学的研究方法和定律广泛地应用于化学、机械学、电子学、工程学、天文学等各个领域,其中也包括医学领域。

医学是一门以人的生命运动为研究对象的生物科学。它以普遍的物理学和化学运动形态为基础,但并非这些运动形态的简单组合。因为生命现象是一种复杂、高级的物质运动形态,除了遵守有关简单的物质运动规律外,生命现象还有自己独特的运动规律,或者说,生命现象在遵从物理学和化学的基本规律的基础上,还遵从生物学的规律。所以,物理学知识是认识生命现象的重要基础之一,但它不能代替生命科学去全面深刻地解释生命现象。

为什么医科学生要学物理学?这是一个涉及到物理学与医学之间相互关系的问题。只有正确认识这个问题,才会学好这门课程。

如上所述,人体的生理过程或细胞的运动规律是一种高级的运动形态,其中包含着大量的物理现象,所以,我们要想全面、透彻地认识和科学地调控人体的生理过程,就必须具备一定的物理知识才行。众所周知,血液是给体内各组织器官供应营养的输送者。血液的生成是一个复杂的生物化学问题,但是血液在体内的运动,却遵从着物理学中流体力学的一些基本规律。如果血细胞或者血管发生某些异常,则会导致血液运动违背这些基本规律,从而使我们能够鉴别某些疾病。所以,只有具备一定的流体力学方面的知识,才能正确深刻地理解血液循环过程中发生的某些生理现象。再如,人体的肌肉、心脏和大脑的活动都伴有生物电的产生,我们要借助这些生物电现象认识肌肉、心脏和大脑的生理过程,或者说要正确深刻地理解代表这些生理过程的肌电图、心电图和脑电图的形成机理以及鉴别其正常与否,就必须牢固掌握一定的电学知识。喻为心灵之窗的眼睛是感光器官,我们用它看人观物。为什么眼睛能够看清远近不同的物体?为什么有些人要带不同的眼镜?如果不带眼镜,为什么有的人只能看清近物?而有的人只能看清远物?这些道理属于几何光学研究的范畴。耳朵是听觉器官,人们依靠它交流思想,欣赏音乐。为什么有人唱歌悦耳动听?要弄清这方面的问题,我们必须要具备一定的声学知识。人体的各种组织都是由不同的分子、原子组成的。这些分子、原子的运动规律必然反映出有关组织器官的生理学特征和提供更全面的信息,要认识这些规律,则更需要高深的数理化知识。可见,在人体生理过程中存在着大量的物理现象,我们要正确深刻地认识这些生理过程,而且要科学地鉴别和纠正某些非正常的生理过程,即诊断和治疗某些疾病,一定的物理知识则是我们研究生命现象的必要基础。

另一方面,随着人们认识生命现象的不断深入和物理学与工程技术的飞速发展,在诊断和治疗疾病方面,已经研制和使用了各种先进的物理仪器。光学显微镜对医学的贡献之大,不言而喻。人眼看不清的东西,如细胞、细菌等,利用它可以看得一清二楚。光学显微镜分辨不清的微小结构,现在可用电子显微镜进行观察。X 光机、心电图机、脑电图机、超声波诊断仪以及各种检验分析仪器等,在医院以及医学研究单位,使用极为普遍,而且一些崭新的医学仪器将不断涌现。作为一名素质高的合格医生,就应掌握这些仪器的基本原理和性能,才

能正确地使用它们，以利工作和研究。特别值得一提的是，几乎物理学上和技术科学上的每一新成就，都为医学研究开辟了新的途径，提供了新型的诊断和治疗仪器。X 射线发现不久，立即为人类提供了诊断和治疗某些疾病的科学手段；对发现放射性同位素作出卓越贡献的居里夫人，在她 1904 年的博士论文中记叙了把放射性镭放在她丈夫手上引起疼痛和溃疡的事实，便揭开了利用放射性诊断某些疾病和治疗癌症的序幕；伟大的科学家爱因斯坦 1916 年提出激光理论，但到 1956 年才被其他科学家着乎研制，1960 年第一台红宝石固体激光器问世，次年就开始用于治疗眼疾患者和进行医学研究；计算机的研制成功，不仅加速了医院现代化的科学管理，而且促使大量智能化的医学仪器应运而生，特别是在 70 年代 X—CT 机的问世，以及接踵而来的 MR—CT 机、SPE—CT 机和 PET 机等的研制成功，这都为医学科学的发展作出了开拓性的贡献。

保证学生牢固地掌握专业知识，具有一定的业务素质，以及培养学生分析问题和解决问题的能力，是各门课程的共同任务。然而由于课程的发展状况和特点各异，医用物理学在培养学生不断提高抽象思维和逻辑推理的能力以及探索创新的精神方面，不能不说具有独特的作用，所以，从这个意义上说，我们也必须重视物理学的学习。

由此可见，物理学和医学的关系是极其密切的。而且事实证明，历史上不少杰出的医学家也是著名的物理学家，或者反之亦然。特别是最近 20 多年来，物理学和许多工程技术由于自身的迅速发展而越来越多地应用到整个医学领域，使得医学上某些问题由粗浅的定性分析上升到严密的定量描述；由宏观的研究深化到微观的研究，从而形成了物理学、工程技术和医学相互渗透、相互促进的格局。无疑，这对加速医学的全面发展、使之达到更高的研究水平必将起到前所未有的积极作用。

第一章　物体的转动和物体的弹性

转动是物体机械运动的基本形式之一，大至星球，小至原子、电子等微观粒子都在不停息地转动着。在工农业生产和生命现象中，存在着大量的转动问题，例如，机床上的各种轮子、电机转子、仪表指针、手腕屈伸、血细胞、飞机和轮船上的推进器的转动以及拖拉机车轮的转动等，随处可见。

近20多年来，工程技术人员和医务工作者，对与生命有关的物质特性及其运动规律进行了深入的探索和研究，形成了一门新兴的边缘学科——生物力学。生物力学研究的内容极其复杂广泛，既包括各种形式的机械运动，其中就有转动，又包括高级的生命运动，或者说，它研究的对象是活的细胞、活的组织。这些活的研究对象既有自身独特的运动规律，又有对所处外界力学环境产生着特殊的反作用，遵循着一些独特的运动规律。从亚细胞、细胞、组织、器官到整个生物体的物质构成和运动及其与环境的相互关系，从植物到动物，从飞禽走兽到高等人类，在所有生命运动过程中，无不充满着大量的与生物力学密切相关的研究课题。

生物力学的迅速崛起，促进了解剖学、组织学和生理学等医学学科的迅速发展。使人们对于生命现象的认识由定性的描述逐步提高到定量的描述，从而对诊断和治疗某些疾病提供了理论依据和科学途径。本章只讨论刚体的转动、刚体的平衡以及一些与人体有关的力学基本概念和几个简单的力学问题。

§1-1　刚体的转动

一、角变量

1. 刚体　处于固态的物质，都有一定的形态和大小。任何固体如果受到外力作用，其形状和大小都要发生变化，这种变化不仅与外力的大小和方向有关，还与组成物体的质量和它的形状有关。为了使研究问题简便，我们引入刚体概念。所谓刚体(Rigid body)是指无论在多大的外力作用下，形状和大小都不发生变化的物体。也就是说，在刚体内部，各质点间的距离保持不变，或者各部分之间没有相对运动。显然，刚体并不存在，而是为了研究简便而建立的一个理想化的模型。

刚体最简单的运动形式是平动和转动。如果刚体运动时，内部任何一条给定的直线，在运动中始终保持它的方向不变，那么这种运动就称为平动(Translation)。所以，当刚体平动时，在任意一段时间内，刚体内部各点的位移都是相同的。而且在任何时刻，各点的速度和加速度也是相同的。如果刚体在运动过程中，构成刚体的各质点都绕某一条直线作圆周运动，那么，这种运动就称为转动(Rotation)。这条直线就称为转轴。如果转轴固定不动，则称定轴转动。一般来说，刚体的运动都可看成是平动和转动的合成。下面我们只讨论刚体的定轴转动问题。

2. 角变量　研究刚体绕定轴转动时，通常取任一垂直于定轴的平面作为转动平面，如图1-1所示。O为转轴与转动平面的交点。当刚体转动时，其上某质点P则在该转动平面内

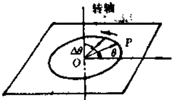

图1-1 刚体的转动

绕 O 作圆周运动。假设 OP 与参考方向 Ox 之间的夹角为 θ，如转动经过 Δt 之后，θ 的变化量为 $\Delta\theta$，则 $\Delta\theta$ 就称为刚体在 Δt 时间内的角位移（Angular displacement）。角位移用弧度(Radian)表示，其正负代表着刚体转动的方向。一般规定，刚体沿反时针方向转动，$\Delta\theta$ 取正；顺时针转动，$\Delta\theta$ 取负。角位移与相应的弧长 ΔS 的半径 r 的关系是

$$\Delta\theta = \frac{\Delta S}{r} \tag{1-1}$$

角位移 $\Delta\theta$ 与时间 Δt 之比，叫做刚体在 Δt 内的平均角速度(Average angular velocity)，用 $\overline{\omega}$ 表示

$$\overline{\omega} = \frac{\Delta\theta}{\Delta t} \tag{1-2}$$

当 Δt 趋近于零时，以上的比值就趋近某一极限值

$$\omega = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\theta}{\Delta t} = \frac{d\theta}{dt} \tag{1-3}$$

ω 叫做刚体在 t 时刻的瞬时角速度或角速度(Angular velocity)。如果刚体作匀速转动，则角速度为一恒量。角速度的单位是弧度/秒(rad/s)。

刚体作变速转动时，如果在 t_1 时刻，代表刚体转动的半径 OP 的角速度为 ω_1，而在 $t_2 = t_1 + \Delta t$ 时刻的角速度为 ω_2，则角速度的增量 $\Delta\omega = \omega_2 - \omega_1$ 与时间 Δt 之比，叫作刚体在 Δt 时间内的平均角加速度(Average angular acceleration)，用 $\overline{\beta}$ 表示

$$\overline{\beta} = \frac{\Delta\omega}{\Delta t} \tag{1-4}$$

当 Δt 趋近于零时，则

$$\beta = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\omega}{\Delta t} = \frac{d\omega}{dt} = \frac{d^2\theta}{dt^2} \tag{1-5}$$

刚体作匀速转动时，角加速度为一恒量。角加速度的单位是弧度/秒²(rad/s²)。

刚体作匀速和匀变速转动时，其运动方程与质点作匀速和匀变速直线运动的运动方程完全相似。匀速转动的运动方程为

$$\theta = \omega t \tag{1-6}$$

匀变速转动的运动方程为

$$\left.\begin{aligned} \omega &= \omega_0 + \beta t \\ \theta &= \omega_0 t + \frac{1}{2}\beta t^2 \\ \omega^2 &= \omega_0^2 + 2\beta\theta \end{aligned}\right\} \tag{1-7}$$

式中，θ、ω_0、ω 和 β 分别为角位移、初角速度、角速度和角加速度。它们描述代表整个刚体转动时某一条半径的运动状况，统称为角变量或角量。

3. 角量和线量的关系　刚体转动时，组成刚体的各个质点都作圆周运动，显然，描述它们运动状况的位移、速度和加速度是不相同的，人们称之为线量。角量和线量都是描述刚体转动的物理量，它们之间必然存在着一定的联系。

根据式(1-1),角位移 $\Delta\theta$ 和相应线量弧长 ΔS 的关系为

$$\Delta S = r\theta \tag{1-8}$$

用 Δt 除上式两边,当 Δt 趋近于零时,则线速度和角速度的关系为

$$v = r\omega \tag{1-9}$$

设 P 点在 Δt 时间内速率的增量是 Δv,角速度的增量是 $\Delta\omega$,由上式得

$$\Delta v = r\Delta\omega$$

上式两边同除以 Δt,取极限,便得到切向加速度 a_t 和角加速度的关系

$$a_t = r\beta \tag{1-10}$$

将 $v=r\omega$ 代入法向加速度公式 $a_n=v^2/r$,可得质点的法向加速度和角速度的关系式

$$a_n = \frac{v^2}{r} = r\omega^2 \tag{1-11}$$

4. 角速度和角加速度矢量　在物理学中,经常遇到两个矢量相乘的情况。而两矢量相乘的结果有两种情况:其结果是一个标量,这种情况就叫做矢量的标积(或点积);或结果是一个矢量,这种情况就叫做矢量的矢积(或叉积)。

设 $\boldsymbol{A}$、$\boldsymbol{B}$ 为任意两个矢量,它们的夹角为 θ,则它们的标识通常用 $\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B}$ 表示,定义为

$$\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B}=AB\cos\theta$$

上式说明,标积 $\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B}$ 的数值等于矢量 $\boldsymbol{A}$ 在矢量 $\boldsymbol{B}$ 方向上的投影 $A\cos\theta$ 与矢量 $\boldsymbol{B}$ 的模 B 的乘积(图 1-2a),或者反之亦然(图 1-2b)。引入矢量标积的概念之后,功就可以用力矢量 $\boldsymbol{f}$ 和位移矢量 $\boldsymbol{S}$ 的标积表示

$$W=\boldsymbol{f}\cdot\boldsymbol{S}$$

矢量 $\boldsymbol{A}$ 和矢量 $\boldsymbol{B}$ 的矢积用 $\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B}$ 表示,相乘结果仍是一矢量 $\boldsymbol{C}$,则

$$\boldsymbol{C}=\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B}$$

其定义如下:矢量 $\boldsymbol{C}$ 的数值大小(模)为

$$C=AB\sin\theta$$

式中,θ 为 $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 的夹角。矢量 $\boldsymbol{C}$ 的方向垂直于 $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 两矢量所组成的平面,其具体指向由**右手螺旋法则确定,即伸展右手掌,让大拇指与其余四个指头垂直,然后四个指头从 A 经由小于 180°的夹角握向 B 时,大拇指所指的方向就是 C 的方向。**如图 1-3 所示。

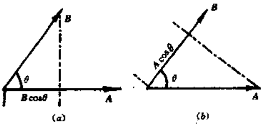

图 1-2　矢量的标积

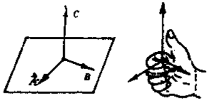

图 1-3　矢量的矢积

引入矢量矢积的概念后,力矩矢量 $\boldsymbol{M}$ 就可用力的作用点的位置矢量 $\boldsymbol{r}$ 和力 $\boldsymbol{f}$ 的矢积表示

$$\boldsymbol{M}=\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{f}$$

力矩的数值 $M=fr\sin\theta$,θ 为 $\boldsymbol{r}$ 和 $\boldsymbol{f}$ 的夹角,$\boldsymbol{M}$ 的方向由右手螺旋法则确定。标积、矢积和右

手螺旋法则在物理学和工程学中使用非常普遍，同学们务必理解掌握。

有了矢量的基本概念，就可以把刚体的转动描述得更加充分了。前面讨论的角速度和角加速度是仅从数值而言的，如果要把它们的数值和方向结合起来讨论，则需使用矢量表示。

角速度矢量 ω 的表示方法是这样的：在转轴上按一定比例取一有向线段表示角速度的大小，而 ω 的方向与刚体转动方向之间的关系由右手螺旋法则确定，如图 1-4 所示。

角加速度矢量 β 也是按右手螺旋法则表示的，如图 1-5 所示。在转轴上按一定比例取一有向线段表示角加速度的大小。当 $\omega_2>\omega_1$，即 $\beta>0$ 时，β 的方向与刚体转动方向之间的关系由右手螺旋法则确定；如果 $\omega_2<\omega_1$，即 $\beta<0$ 时，则 β 的方向与上述方向相反。

至于角速度和线速度在大小和方向上的关系，可以用矢积表示为

$$\boldsymbol{v}=\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{r} \tag{1-12}$$

式中，$\boldsymbol{v}$ 和 $\boldsymbol{r}$ 分别表示刚体中任一质点 P 的线速度和矢径，$\boldsymbol{\omega}$ 为刚体的角速度矢量。这三个矢量之间的关系如图 1-6 所示。

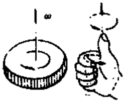

图 1-4 角速度矢量表示法

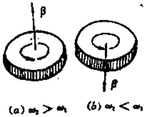

图 1-5 角加速度矢量表示法

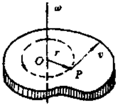

图 1-6 角速度和线速度之间的矢量关系

【例题 1-1】 一飞轮作匀加速转动，经过 3s 转了 234rad，在 3s 末时，它的角速度为 108rad/s，求它的角加速度和初角速度。

解 由匀变速转动公式

$$\omega=\omega_0+\beta t \quad 和 \quad \theta=\omega_0 t+\frac{1}{2}\beta t^2$$

消去 ω_0，代入数字，得角加速度

$$\beta=\frac{2(\omega t-\theta)}{t^2}=\frac{2\times(108\times 3-234)}{3^2}=20\ \mathrm{rad/s^2}$$

而初角速度
$$\omega_0=\omega-\beta t=108-20\times 3=48\ \mathrm{rad/s}$$

二、刚体的转动动能 转动惯量

1. **转动动能** 转动着的物体都具有能量。这种能量是由于物体处于转动状态而具有的，故称为**转动动能**。其大小等于组成物体的各个质点的动能的总和。假设以角速度 ω 转动的某一刚体由 $m_1,m_2,m_3,\cdots,m_i$ 个质点组成，各质点离开转轴的距离分别为 $r_1,r_2,r_3,\cdots,r_i$，速度分别为 $v_1,v_2,v_2,\cdots,v_i$。再考虑到 $v_i=r_i\omega$，不难得出刚体的转动动能

$$E_k=\frac{1}{2}m_1v_1^2+\frac{1}{2}m_2v_2^2+\cdots+\frac{1}{2}m_iv_i^2$$
$$=\frac{1}{2}(m_1r_1^2+m_2r_2^2+\cdots+m_ir_i^2)\omega^2=\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}m_ir_i^2\omega^2$$

如果令 $I=\sum_{i=1}^{n} m_i r_i^2$，则

$$E_k=\frac{1}{2}I\omega^2 \tag{1-13}$$

2. 转动惯量　在式(1-13)中，$I=\sum_{i=1}^{n} m_i r_i^2$ 叫做刚体的**转动惯量**(Rotational inertia)。它是刚体转动惯性大小的量度。在数值上，转动惯量等于刚体中每个质点的质量与该质点到给定转轴距离的平方的乘积的总和。对于质量连续分布的刚体，它的转动惯量可以写成积分形式

$$I=\int r^2 \mathrm{d}m=\int r^2 \rho \mathrm{d}V$$

式中，$\mathrm{d}V$ 是对应于质量元 $\mathrm{d}m$ 的体积元，ρ 是体积元中的物质密度。转动惯量的单位是千克·米^2($\mathrm{kg \cdot m^2}$)。几种几何形状简单的物体的转动惯量如表 1-1 所示。

表 1-1　转动惯量公式

物　体　和　转　轴		转动惯量
细　棒 (质量 m，长 l) 通过中心与棒垂直的轴		$I=\frac{1}{12}ml^2$
细　棒 (质量 m，长 l) 通过一端与棒垂直的轴		$I=\frac{1}{3}ml^2$
细　圆　环 (质量 m，半径 R) 通过中心与盘面垂直的轴		$I=mR^2$
薄　圆　盘 (质量 m，半径 R) 通过中心与盘面垂直的轴		$I=\frac{1}{2}mR^2$
薄　圆　盘 (质量 m，半径 R) 以任一直径为轴		$I=\frac{1}{4}mR^2$
球　体 (质量 m，半径 R) 通过球心的任一直径为轴		$I=\frac{2}{5}mR^2$

从转动惯量的表达式可以看出，刚体的转动惯量取决于刚体各部分的质量相对给定轴的分布情况。具体地说，刚体的转动惯量与下列三个因素有关：①与刚体的质量有关；②在质量一定的情况下，还与质量的分布有关，例如质量相等的同质料的空心圆柱和实心圆柱，以圆柱的轴为转轴时，前者的转动惯量比较大；③与转轴的位置有关。

【例题 1-2】　求质量为 m，长为 l 的均匀细棒的转动惯量：(1) 对于通过棒的中心并与棒垂直的转轴；(2) 对于通过棒的一个端点并与棒垂直的转轴。

解　如图 1-7 所示，设棒的线密度(单位长度的质量)为 λ。在距转轴为 x 处取一长度元 $\mathrm{d}x$，其质量则为 $\mathrm{d}m=\lambda\mathrm{d}x$。

(1) 对于通过棒的中心的垂直转轴

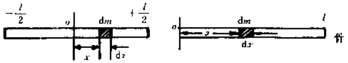

图 1-7

$$I=\int x^2\mathrm{d}m=\int_{-\frac{l}{2}}^{+\frac{l}{2}}x^2\lambda\mathrm{d}x=\frac{1}{3}x^3\lambda\Big|_{-\frac{l}{2}}^{+\frac{l}{2}}=\frac{l^3}{12}\lambda=\frac{l^3}{12}\frac{m}{l}=\frac{1}{12}ml^2$$

（2）对于通过棒的一端的垂直转轴

$$I=\int x^2\mathrm{d}m=\int_0^l x^2\lambda\mathrm{d}x=\frac{1}{3}x^3\lambda\Big|_0^l=\frac{l^3}{3}\lambda=\frac{l^3}{3}\frac{m}{l}=\frac{1}{3}ml^2$$

由此可见，对于同一刚体来说，转轴的位置不同，转动惯量也不同。

引入转动惯量的概念之后，对于转动动能，就可以这样叙述：**刚体绕定轴转动的转动动能，等于刚体的转动惯量与角速度平方的乘积的一半**。这与物体的平动动能 $E_k=\frac{1}{2}mv^2$ 在形式上是完全相似的。

三、转动定律　动量矩守恒定律

1. 力矩　经验告诉我们，要使物体转动，不仅与力的大小有关，而且还与力的作用方向和作用点的位置有关。例如，要想打开门窗，如果所用的力是通过转轴或与转轴平行时，即使用多大的力也是不能打开门窗的。要打开门窗，就必须对于转轴施加一定的力矩才行。

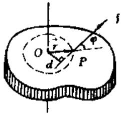

图 1-8　力矩

图 1-8 表示刚体受到力的作用发生转动的情况。刚体所受的外力 f 在垂直于转轴的转动平面内，力的作用点 P 离转轴的距离为 r（相应的矢径 $\boldsymbol{r}$），力和转轴间的距离为 d，即力对转轴的力臂（Moment arm）。力和力臂的乘积，叫做力对转轴的力矩（Moment of force），用 M 表示，所以

$$M=fd=fr\sin\varphi$$

式中，φ 是矢径 $\boldsymbol{r}$ 与力 $\boldsymbol{f}$ 之间的夹角。显然，当 $\varphi=0$ 时，即力通过转轴时，力矩为零。

力矩是矢量，可用矢径 $\boldsymbol{r}$ 和力 $\boldsymbol{f}$ 的矢积表示

$$\boldsymbol{M}=\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{f} \tag{1-14}$$

如前述，力矩的方向由右手螺旋法则确定。

如果刚体所受的力不在垂直于转轴的转动平面内，那么，可把这个力分解为相互垂直的两个分力：一个在转动平面内，另一个与转动平面垂直。垂直转动平面的分力平行于转轴，因此，对刚体不产生转动效果。对刚体产生转动效果的则是在转动平面内的不通过转轴的分力。

力矩的单位是牛（顿）米（N · m）。它只能用牛（顿）米表示，不能用功的单位焦尔表示；因为力矩和功的物理意义完全不同。力矩是矢量，是使物体产生角加速度的原因；功是标量，是物体能量变化的量度。

2. 力矩的功　设物体在力 f 的作用下，在 Δt 时间内绕转轴转过的角度为 $\Delta\theta$（图 1-9），P 点的位移为 $\Delta\theta$ 所对应的弧长 $\Delta S=r\Delta\theta$。如果 Δt 很小，则 $\Delta S\perp OP$，$\theta+\varphi=90°$。根据功的定义，力 f 做的功为

$$\Delta A=f\Delta S\cos\theta=f\cos\theta r\Delta\theta$$

而力 f 相对转轴所产生的力矩为

$$M=fr\sin\varphi=fr\sin(90°-\theta)=fr\cos\theta$$

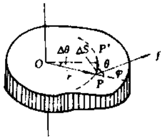

图 1-9　力矩的功

比较上述两式，可以看到，力矩在使刚体产生角位移 $\Delta\theta$ 的过程中所做的功为

$$\Delta A = M\Delta\theta \tag{1-15}$$

即**力矩所做的功等于力矩和角位移的乘积。**

如果刚体在恒力矩作用下转过 θ 角，那么力矩的功为

$$A=M\theta$$

如果作用在刚体上的力矩不是恒定的而是变化的，那么计算力矩的功就是一个积分过程，即

$$A = \int \mathrm{d}A = \int M\mathrm{d}\theta$$

3. *转动定律* 设刚体在合外力矩 M 的作用下，经过 Δt 时间之后，转过的角位移为 $\Delta\theta$，并且开始和终末时的角速度分别是 ω_0 和 ω，显然，角位移

$$\Delta\theta=\frac{\omega_0+\omega}{2}\Delta t$$

而合外力矩的功

$$\Delta A=M\cdot\Delta\theta=M\,\frac{\omega_0+\omega}{2}\Delta t$$

在此过程中，刚体转动动能的增量为

$$\Delta E_k=\frac{1}{2}I\omega^2-\frac{1}{2}I\omega_0^2$$

根据功能原理，合外力矩对刚体所做的功等于刚体转动动能的增量，即

$$M\,\frac{\omega_0+\omega}{2}\Delta t=\frac{1}{2}I\omega^2-\frac{1}{2}I\omega_0^2$$

所以

$$M=\frac{I}{2}(\omega^2-\omega_0^2)\frac{2}{(\omega_0+\omega)\Delta t}$$

$$=I\,\frac{\omega-\omega_0}{\Delta t}=I\,\frac{\Delta\omega}{\Delta t}$$

当 $\Delta t\to 0$ 时，$\frac{\Delta\omega}{\Delta t}$ 就是刚体的瞬时角加速度 β，所以上式可以写成

$$M = I\beta \tag{1-16}$$

式(1-16)表明，**刚体在合外力矩的作用下，所获得的角加速度与合外力矩的大小成正比，与转动惯量成反比。**这个关系就叫做**刚体的转动定律**(Rotational law)。

4. *动量矩守恒定律* 根据转动定律，即

$$M=I\beta=I\,\frac{\Delta\omega}{\Delta t}$$

可以写成下面的形式

$$M\Delta t=I\Delta\omega$$

在一般情况下，I 恒定不变，故上式又可写成

$$M\Delta t=\Delta(I\omega)$$

式中，$M\Delta t$ 是描述刚体转动状态的物理量，叫做**力矩的冲量**或**冲量矩**；$I\omega$ 叫刚体的**动量矩**(Moment of momentum)或者**角动量**(Angular momentum)，也是描述刚体转动状态的又一物理量，它等于转动惯量和角速度的乘积，一般用 L 表示。于是

$$M\Delta t = \Delta L \tag{1-17}$$

即**转动刚体所受的冲量矩等于该刚体在相同时间内动量矩的增量。**这是刚体转动时所遵循

的另一条定律，叫**动量矩原理**(Principle of moment of momentum)。

如果刚体所受的合外力矩 $M=0$，则

$$\Delta L = 0, \quad 或者 \quad I\omega = 恒量 \tag{1-18}$$

亦即**当刚体所受的合外力矩等于零时，刚体的角动量保持不变**。这一结论就称为**动量矩守恒定律**(Principle of the conservation of moment of momentum)。

动量矩守恒定律是力学中的基本定理之一。根据这条定律，如果 I 增大则 ω 减小，I 减小则 ω 增大。这在日常生活中，应用甚广。例如，舞蹈演员、花样溜冰运动员等，在旋转的时候，往往先把两臂张开旋转，然后迅速把两臂靠拢身体，使转动惯量迅速减小，从而加快转速，使表演获得最佳效果。动量矩守恒定律是自然界中的一条普遍规律，即使在原子内部，也都严格遵循着这条规律。

§1-2 刚体的平衡

一、刚体的平衡条件

一般来说，刚体的运动可以看成是平动和转动的合成，或者也可以这样理解，当几个外力同时作用在刚体上时，从它们产生的效果来看，无非是产生这样两种作用：某些力使刚体平动；某些力相对一定的转轴产生力矩而使之转动。因此，要使刚体静止不动而处于平衡状态的必要和充分条件则是：使刚体平动的合外力等于零和使刚体转动的合外力矩等于零．即

$$\sum f_i = 0, \quad \sum M_i = 0 \tag{1-19}$$

为了研究简便，我们通常选用直角坐标系，把外力写成分力平衡的形式

$$\sum f_{x_i} = 0, \quad \sum f_{y_i} = 0 \tag{1-20}$$

研究刚体平衡，实际上是属于静力学的研究范畴。这在工程建筑和人体平衡等方面都有许多应用。现在我们介绍一下解决这类问题的基本步骤。

(1) 分析刚体平衡时的受力情况，正确画出受力图，清楚标出刚体所受各力的方向和作用点。对于未知力用适当的符号表示。

(2) 选用合适的直角坐标系，然后将各力分解在 x 轴和 y 轴上，并写出受力平衡方程 $\sum f_{x_i} = 0$ 和 $\sum f_{y_i} = 0$。

(3) 选取合适的转轴，力求更多的力通过转轴。然后求出各个力矩并写出各力矩的平衡方程 $\sum M_i = 0$。

(4) 对于上述方程联立求解。

刚体的平衡条件，对于人体中的某些情况也是适用的，但在解决具体问题时应当考虑肌肉、骨骼的力学特性。

解剖学告诉我们，组成人体的骨头共 206 块，它们借助关节形成一幅完整的骨架。附着在骨头上的肌肉在神经系统的支配之下，进行适度的收缩或舒张致使关节活动，或者说使骨架的相应部分发生局部形变，从而协调地完成各种有目的的动作。肌肉收缩的主要作用是使骨骼绕轴旋转，实际上这是一个转动问题。

【例题 1-3】 图 1-10 为脚的解剖学示意图，并标出了作用力及有关尺寸。单足站立时，设跟腱中的张力为 F_T，胫骨和腓骨作用在距骨上的力为 F_B，地面向上的支持力等于人体的重量 W。试求小腿三头肌通过跟腱作用在跟骨上的力 F_T 以及 F_B。