● 湖南医学院育义学

● 湖南科学技术出版社

医用高等数学

YIYONG
GAODENG
SHUXUE

医用高等数学

湖南医学院青义学

湖南科学技术出版社

医用高等数学

湖南医学院育义学

责任编辑：张碧金　石　洪

*

湖南科学技术出版社出版

（长沙市展览馆路14号）

湖南省新华书店发行　湖南省新华印刷二厂印刷

*

1986年6月第1版第1次印刷

开本：850×1168毫米　1/32　印张：18.125　字数：478,000

印数：1——7,000

统一书号：13204·133　　定价：4.00元

征订期号：湖南新书目 86——2(23)

前　言

据联合国教科文组织的调查分析，目前科学研究工作有两个特点：一是各门学科的数学化，二是生物学研究的突飞猛进，而后者也必须与数学相互渗透。在医学领域，这两个特点都反映得十分明显。现代医学运用数学和生物学成果，已经取得了划时代的成就，正向着精确的定量的方向发展。因此，医学专业是否要学数学的问题已基本解决。诸如预防医学、基础医学、临床医学都可以通过建立数学模型去探索其数量规律。目前，人们已从“数学在生物学中等于零”的旧时代跃进到以电子计算机、生物技术、遗传工程等为主要标志的新时代。医学要现代化，医学科研要上去，都必须把数学作为基础和工具。

然而，对课程多、时间紧的医学专业来说，究竟要学哪些数学呢？编者参考了唐子东编《高等数学》(1961)，美国 Defares, Sneddon:《An introduction to the mathematics of medicine and biology》(1960), Rodney D. Gentry:《Introduction to calculus for biology and health sciences》(1978)，英国 David Machin:《Biomathematics an introduction》(1976)，以及杨纪柯等编译的《生物数学概论》(1982)，周怀梧编的《数理医药学》(1983)，结合我院1978年以来在研究生中开设《高等数学》课程的实践，认为医学专业应该学习微积分、微分方程、概率论、线性代数与模糊数学等，为学习医学与现代管理学打好数学基础。

目前医学专业开设《高等数学》的课时较少，所需知识既广且多，而数学又要求基础扎实、循序渐近，如何解决这一矛盾呢？按照常规教法是不行的。其出路不在于增加学时，而必须在教学上有所改革，编写符合时代要求的、内容先进的教材则是解决问题的关键。编者认为，编写教材的原则应该是：第一，医科院校的

高等数学必须为医学服务，以此尺度精选教材，破除成规，合则留不合则去，但作为学习阶梯的内容，仍应保留。第二，注意基础，重视概念与方法，理论可以适当放宽，但不能囫囵吞枣。特别要注意启发思维，培养科研和解决实际问题的能力。第三，面向现代化，既要讲有用的经典数学和统计数学（数理统计部分可以与已开设的卫生统计合并），也要学习新的、富有生命力的模糊数学。医学中的模糊概念最多，医疗诊断是从疑难中寻求确诊，从模糊中去找精确，要让学生接受新的知识，以开发他们的创造性思维。第四，删繁就简，去粗取精，以少胜多，教学结合，力争以最少的课时完成应学的内容。为了培养大学生独立工作能力，课堂只讲授主要的基本的内容，有些内容可留给学生课外阅读。对专有名词应附有英文原文，要配备适当的习题并给答案和必要的提示或解答，以培养学生的自学能力。本书就是按这些原则编写的。

该书虽为医学专业编写，实际上是一本比较精练的应用数学，也可供农科、生物、化学、地理、经济等专业采用，还可以作为中学教师与自学者的参考书。全书100课时可以讲完，除去标有星号(＊)的内容约需70课时。

作为医用高等数学，在编写结构上的这些调整，尚属初试，敬希读者批评指正，使之不断臻于完善。

育义学

一九八五年于湖南医学院

目　录

第一章　一元函数微分法……………………………………………（1）
§1.1　集合…………………………………………………（1）
§1.2　函数…………………………………………………（6）
§1.3　极限…………………………………………………（15）
§1.4　连续…………………………………………………（30）
§1.5　导数…………………………………………………（34）
§1.6　微分…………………………………………………（55）
§1.7　中值定理与不定式的极限……………………………（64）
§1.8　函数图象的研究………………………………………（73）
§1.9　函数的展开式…………………………………………（99）
习题一（1.1～1.79）……………………………………………（110）
第二章　一元函数积分法……………………………………………（117）
§2.1　不定积分……………………………………………（117）
§2.2　积分法………………………………………………（122）
§2.3　定积分………………………………………………（141）
§2.4　两类广义积分…………………………………………（165）
§2.5　Γ函数与B函数………………………………………（170）
§2.6*　拉普拉斯变换………………………………………（174）
习题二（2.1～2.80）……………………………………………（179）
第三章　微分方程……………………………………………………（184）
§3.1　一般概念……………………………………………（184）
§3.2　分离变量法与代换法…………………………………（186）
§3.3　一阶线性微分方程……………………………………（199）
§3.4　可降阶的微分方程……………………………………（207）
§3.5　二阶线性微分方程……………………………………（211）

习题三（3.1～3.55）……………………………………………………(232)
第四章　多元函数微积分……………………………………………(235)
§4.1　多元函数………………………………………………………(235)
§4.2　二元函数的极限与连续………………………………………(239)
§4.3　偏导数…………………………………………………………(242)
§4.4　全微分…………………………………………………………(246)
§4.5　复合函数与隐函数的微分……………………………………(253)
§4.6　二元函数的极值………………………………………………(264)
§4.7　经验公式与最小二乘法………………………………………(271)
§4.8　二重积分………………………………………………………(281)
§4.9*　三重积分……………………………………………………(299)
§4.10*　空间解析几何概述（供参考用）……………………………(303)
习题四（4.1～4.64）……………………………………………………(309)
第五章　概率论………………………………………………………(314)
§5.1　随机事件………………………………………………………(314)
§5.2　概率的定义……………………………………………………(316)
§5.3　概率的加法公式………………………………………………(319)
§5.4　概率的乘法公式………………………………………………(322)
§5.5　全概公式与逆概公式…………………………………………(325)
§5.6　重复独立试验概型……………………………………………(332)
§5.7　随机变量及其分布……………………………………………(333)
§5.8　随机变量的数字特征…………………………………………(345)
§5.9*　排列与组合(供参考用)………………………………………(359)
习题五（5.1～5.41）……………………………………………………(363)
第六章　线性代数……………………………………………………(369)
§6.1　行列式…………………………………………………………(369)
§6.2　向量……………………………………………………………(376)
§6.3　矩阵……………………………………………………………(383)
§6.4　线性方程组……………………………………………………(401)
习题六（6.1～6.28）……………………………………………………(419)

第七章　模糊数学……………………………………………(423)
§7.1　模糊数学产生的背景…………………………… (423)
§7.2　模糊集与隶属函数……………………………… (426)
§7.3　模糊集的运算…………………………………… (434)
§7.4　模糊关系………………………………………… (441)
§7.5　综合评判………………………………………… (454)
§7.6　模糊聚类分析…………………………………… (458)
§7.7　模式识别………………………………………… (474)
§7.8　模糊数学与医学………………………………… (479)
§7.9　模糊数学与管理科学…………………………… (486)
习题七（7.1～7.24）……………………………………(499)
复习题（1～56）…………………………………………(503)
附录
一、积分表……………………………………………………(509)
二、泊松分布$\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}$数值表……………………………………(521)
三、泊松分布$\sum\limits_{k\leq x}\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}$数值表………………………… (522)
四、标准正态分布表…………………………………………(523)
五、习题解答（共427题）……………………………………(529)

第一章　一元函数微分法

本章内容包含函数、极限、连续、导数、微分、中值定理、不定式、函数图象与函数的展开式。其中有些内容已在中学学过，这里可以看作是它们的浓缩、复习与提高。可以根据学生实际情况予以取舍，但它是高等数学的基础，是进一步学习的必由之路，没有它，以后的章节则是寸步难行的。

§1.1　集　　合

1.1.1　集合的概念

自然数1,2,3,……把它看成一个整体,形成一自然数集,记为

$$N=\{1,\ 2,\ 3,\ \cdots\}.$$

{　}内是这个集合(set)的元素,是用元素枚举法来揭示这个集的。

又如方程

$$x^3-6x^2+11x-6=0$$

的根1，2，3组成一个集合，可以把它记为

$$A=\{x|x^3-6x^2+11x-6=0\}.$$

{　}内首先给出这个集中的代表元素x，再给出元素的属性$p(x)$，是用揭示属性法来描述这个集的。

集合是数学中最原始的概念之一，不可能用其他的概念来下定义。通常是用上面两种方法来表示一个集，如

$$X=\{x_1,\ x_2,\ \cdots x_n,\ \cdots\},$$

或　　$$X=\{x|p(x)\}.$$

这两种表示集的方法是一致的，例如

$$A=\{x|x^3-6x^2+11x-6=0\}=\{1,\ 2,\ 3\}.$$

集合的元素的个数有限时，称为有限集，个数无限时，称为**无限集**。

集合一般用大写字母表示，元素则用小写字母表示。元素与集合是不同层次的概念，它们只有属于或不属于的关系：

$$x \in A，或\quad x \overline{\in} A。$$

两个集合之间有包含的关系：

如果$x \in A$，就有$x \in B$，则称A是B的子集，记为$A \subseteq B$（或$B \supseteq A$）。读为"A含于B"(或B包含A)。

$A \subset B$（或$B \supset A$）表示真包含，凡A中的元素都是B的元素(A是B的真子集)，通常用文氏(Venn 1834—1923)图来表示这种关系，如图1—1。

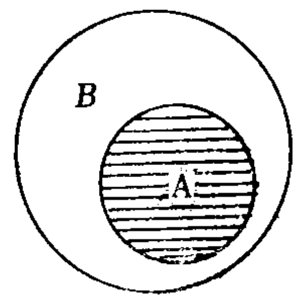


图1—1

如果A⊆B，且B⊆A，则称A，B相等，记为A＝B。

没有元素的集称为空集(empty set)，记为ϕ，如

$$\{x | x+1=x+2\}=\phi。$$

被讨论的对象的全体称为论域(universe of discourse)，论域的全体称为全集(complete set)，用E表示。

1.1.2 集合的运算

集合的运算是从现实生活里提炼出来的数学方法，例如甲的文具盒里装有钢笔（a）铅笔(b)直尺(c)圆规(d)小刀(e)和剪刀(f)，乙的文具盒里装有钢笔(a)铅笔(b)三角板(g)铅笔刨(h)和橡皮(i)。现在问：它们合起来有哪几件文具，相同的文具是哪几件？

甲的文具设为集合$A=\{a, b, c, d, e, f\}$

乙的文具设为集合$B=\{a, b, g, h, i\}$

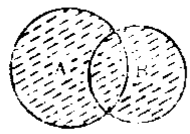
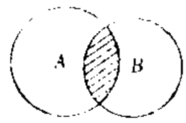
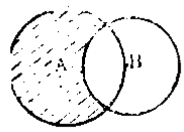
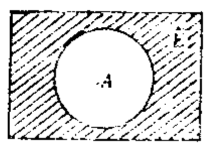
合起来称为两个集合的并(union)，也称和，记为

$$A \cup B=\{a, b, c, d, e, f, g, h, i\}。$$

相同的文具称为两个集合的交(cap)，也称积(product)，记为

$$A \cap B=\{a, b\}。$$

下面给出集合的并、交、补、差的定义及其解释：

名称	定义	文氏图	例
并（和）	$A\cup B \stackrel{\Delta}{=} \{x \mid x\in A$或$x\in B\}$		$\{1,2\}\cup\{2,3\}=\{1,2,3\}$
交（积）	$A\cap B \stackrel{\Delta}{=} \{x \mid x\in A$且$x\in B\}$		$\{1,2\}\cap\{2,3\}=\{2\}$ $\{1,2\}\cap\{3,4\}=\phi$
差	$A-B \stackrel{\Delta}{=} \{x \mid x\in A$且$x\notin B\}$		$\{1,2\}-\{2,3\}=\{1\}$ $\{2,3\}-\{1,2\}=\{3\}$
补	$\overline{A}=E-A \stackrel{\Delta}{=} \{x \mid x\notin A$且$x\in E\}$		$\overline{\{1,2\}}=\{x \mid x\neq 1,2\}$ $A=\{x \mid x>0\}$，$\overline{A}=\{x \mid x\leqslant 0\}$

集合的补集（complement of a set）是以它有全集存在为条件的，例如白的补集是非白，是以论域“色集”为前提，非白指的是非白色。

【例1】 设A是不等式$x^2-5x+6>0$的解集，

则 $A=\{x|x<2\}\cup\{x|x>3\}$。

【例2】 设$A=\{x|x^2-5x+4<0\}$，

$B=\{x|x^2-7x+10<0\}$

则 $A\cup B=\{x|1<x<4\}\cup\{x|2<x<5\}=\{x|1<x<5\}$

$A\cap B=\{x|1<x<4\}\cap\{x|2<x<5\}=\{x|2<x<4\}$

【例3】 设论域

$X=\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, \}$，

又 $A=\{3, 4, 5\}$，$B=\{2, 7, 8\}$，

则 $\overline{A}=\{1, 2, 6, 7, 8, 9\}$，

$\overline{B}=\{1, 3, 4, 5, 6, 9\}$，

$\overline{A}\cap\overline{B}=\{1, 6, 9\}$，

$\overline{A}\cup\overline{B}=X$，

$A\cap B=\phi$,

$\overline{A\cap B}=X$。

【例4】 红、蓝、绿是光的三基色，试根据图1—2用集合表示{白}、{黄}、{青}、{品红}。

解：{白}={红}∩{绿}∩{蓝}，

{黄}={红}∩{绿}-{蓝}，

{青}={绿}∩{蓝}-{红}，

{品红}={红}∩{蓝}-{绿}。

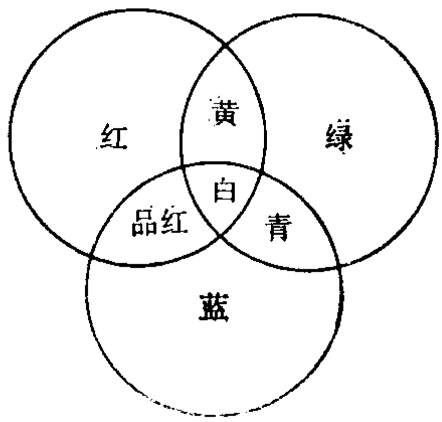


图1—2

下表给出集合的运算性质，略去它们的数学证明。初次接触此表可能有些困难，可从两个方面加深理解：一是利用文氏图，表中给出了示范，最好一一加以验证；二是设想比较简单的集，如下面例5、6那样来验证这些性质。

【例5】 设$A=\{1, 2, 3, 4\}$，$B=\{3, 4, 5\}$，验证吸收律$A\cup(A\cap B)=A$。

解：$A\cup(A\cap B)=\{1, 2, 3, 4\}\cup\{3, 4\}=\{1, 2, 3, 4\}$
$=A$。

所以符合吸收律。

【例6】 设论域$X=\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$，
$A=\{1, 2, 3\}$，$B=\{3, 4, 5\}$，验证对偶律(De Morgan) $\overline{A\cup B}$
$=\bar{A}\cup\bar{B}$。

解：$\bar{A}=\{4, 5, 6\}$，$\bar{B}=\{1, 2, 6\}$，

$A\cup B=\{1, 2, 3, 4, 5\}$，

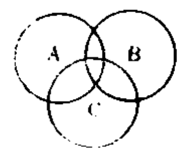
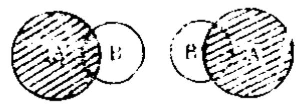
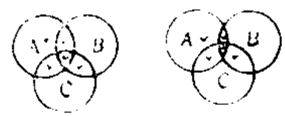
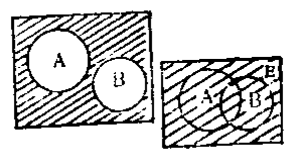
$\overline{A\cup B}=\{6\}$，

$\bar{A}\cap\bar{B}=\{6\}$，

$\therefore\ \overline{A\cup B}=\bar{A}\cap\bar{B}$。

【例7】 设在群体U中对每个人进行A，B，Rh三种抗原的检查，记

$\mathscr{A}=\{u\mid u$有抗原A$\}$，

名　　称	运　算　性　质	文　氏　图
1)幂等律	$A\cup A=A\quad A\cap A=A$	
2)交换律	$A\cup B=B\cup C\quad A\cup B=B\cap A$	
3)结合律	$(A\cup B)\cup C=A\cup(B\cup C)$ $(A\cap B)\cap C=A\cap(B\cap C)$	
4)吸收律	$A\cup(A\cap B)=A$ $A\cap(A\cup B)=A$	
5)分配律	$A\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cap(A\cup C)$ $A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C)$	
6)复原律	$\overline{\overline{A}}=A$或$\complement(\complement A)=A$	
7)对偶律	$\overline{A\cup B}=\overline{A}\cap\overline{B}$ $\overline{A\cap B}=\overline{A}\cup\overline{B}$	
8)常数运算法则	$A\cup E=E\quad A\cap E=A$ $A\cup\phi=A\quad A\cap\phi=\phi$	
9)互补律	$A\cup\overline{A}=E\quad A\cap\overline{A}=\phi$	

$\mathscr{B}=\{u\,|\,u$有抗原$B\}$，

$\mathscr{R}=\{u\,|\,u$有抗原Rh$\}$，

$\mathscr{A}\cap\mathscr{B}=\{u\,|\,u$有抗原A和B$\}$，

$\mathscr{A}\cap\mathscr{R}=\{u\,|\,u$有抗原A和Rh$\}$，

$\mathscr{B}\cap\mathscr{R}=\{u\,|\,u$有抗原B和Rh$\}$，

如果采用生物学的记法，A和B的存在记为AB型，缺A且缺B记为O型，有Rh存在记为Rh^+型，缺Rh 记为 Rh^-型．于是可以得出以下八类血型：

$\mathscr{A}\cap\mathscr{B}\cap\mathscr{R}=\{u\,|\,(AB,\ Rh^+)$型$\}$，

$$\mathscr{A}\cap\mathscr{B}\cap\bar{\mathscr{R}}=\{u\mid(\text{AB},\ \text{Rh}^-)\text{型}\},$$
$$\mathscr{A}\cap\bar{\mathscr{B}}\cap\mathscr{R}=\{u\mid(\text{A},\ \text{Rh}^+)\text{型}\},$$
$$\mathscr{A}\cap\bar{\mathscr{B}}\cap\bar{\mathscr{R}}=\{u\mid(\text{A},\ \text{Rh}^-)\text{型}\},$$
$$\bar{\mathscr{A}}\cap\mathscr{B}\cap\mathscr{R}=\{u\mid(\text{B},\ \text{Rh}^+)\text{型}\},$$
$$\bar{\mathscr{A}}\cap\mathscr{B}\cap\bar{\mathscr{R}}=\{u\mid(\text{B},\ \text{Rh}^-)\text{型}\},$$
$$\bar{\mathscr{A}}\cap\bar{\mathscr{B}}\cap\mathscr{R}=\{u\mid(\text{O},\ \text{Rh}^+)\text{型}\},$$
$$\bar{\mathscr{A}}\cap\bar{\mathscr{B}}\cap\bar{\mathscr{R}}=\{u\mid(\text{O},\ \text{Rh}^-)\text{型}\}.$$

这八个等式均可通过文氏图来验证。

§1.2 函 数

1.2.1 直积、关系与映射

【例1】 设等位基因的集$S=\{\text{A},\ \text{B},\ \text{O}\}$，每个配子（卵或精子）都带有一个等位基因，把一个精子细胞所能带的等位基因在横轴上用三点表示，而把卵细胞所能带的等位基因在纵轴上也用三点表示，如图1—3所示。过各点作两轴的平行线，分别交于9个点：

(A, A), (A, B), (A, O),

(B, A), (B, B), (B, O),

(O, A), (O, B), (O, O).

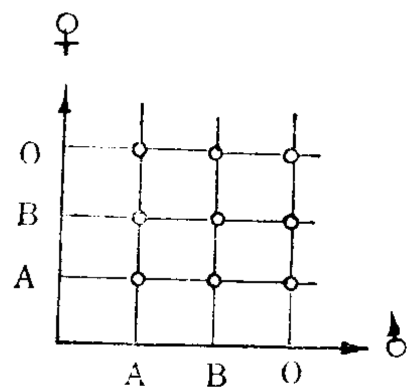


图1—3

这个新集称为直积（Descartes集），一般定义如下：

集A,B的直积 $A\times B$ 规定为序对(a,b)的集

$$A\times B=\{(a,\ b)\mid a\in A,\ b\in B\}.$$

集A，B的直积 $A\times B$ 的一个子集R称为A到B的关系（relation）.

直积也可以是无穷集，如

$$A=\{t\mid 35^\circ\leqslant t\leqslant 41^\circ\},$$
$$B=\{f\mid 50\leqslant f\leqslant 150\},$$

t表示人的体温，f表示人的脉搏，则

$$A\times B=\{(t,\ f)\mid 35^\circ\leqslant t\leqslant 41^\circ,\ 50\leqslant f\leqslant 150\}$$

就是无穷集。我们熟悉的Decartes平面上的点集

$$R\times R=\{(x,\ y)\mid x\in R,\ y\in R\}$$

也是无穷集(R为实数集)。

设两个集合X，Y,如果有一对应关系存在，对于任意$x\in X$，如有唯一的一个$y\in Y$与之对应，则称此对应是一个由X到Y 的映射(mapping)。记为

$$f:\ X\longmapsto Y.$$

对任意$x\in X$经映射f后变为$y\in Y$，则记为

$$y=f(x).$$

此时X称为原象的集合，或f的定义域 (domain of definition)，而$f(X)$称为象的集合，或f的值域(range)。

$$f(X)=\{f(x)\mid x\in X\}.$$

显然

$$f(X)\subseteq Y.$$

当$f(X)=Y$时，称f为满射；

当$f(X)\subset Y$时，称为不满的映射；

当$f(x)=f(x')$时有$x=x'$，则称f为单射；

当f既是满射，又是单射，则称f为1—1的映射，或一一对应(1－1correspondence)。

1.2.2 函数的概念

自从笛卡尔 (Descartes 1596—1650)提出变量的概念，打破了局限于方程的未知数的理解以后，函数概念就初步形成。莱布尼兹 (Leibniz 1646—1716)最先提出函数 (function)这个名词，伯努利 (Bernoulli) 1718年用ϕx表示函数，欧拉 (Euler 1707—1783) 1734年使用了现在的记号$f(x)$，拉格朗日 (Lagrange 1736—1813) 把函数定义为"对自变量计算的结果"，欧拉定义为 "由一个变量与一些常量形成的解析表达式"。柯西 (Cauchy 1789—1857) 定义为："给定一个变量的值,就可以决定另一个变量的值

时，后一变量就是前一变量的函数”。

现在通常的定义是：

设X、Y是非空的数集，对于自变量x在X中任意取值时，通过法则f，在集合Y中有唯一值y与之对应，则称在f下y是x的函数，记为

$$f: x \longmapsto y,$$

或

$$y = f(x), \quad x \in X.$$

X称为函数的定义域，Y称为函数的值域。

可见函数也是一种映射。

常见函数的定义域和值域如下表：

函　　数	定　义　域	值　　域
多　项　式	一切实数	
分　　式	分母不为0的实数	
根　　式	偶次方根内非负实数	
$y=a^x$	一切实数	$y>0$
$y=\lg x$	$0<x<+\infty$	$-\infty<y<+\infty$
$y=\sin x, y=\cos x$	$-\infty<x<+\infty$	$\lvert y\rvert\leqslant 1$
$y=\operatorname{tg} x$	$x\neq n\pi+\frac{\pi}{2}$	$-\infty<y<+\infty$
$y=\operatorname{tg} x, y=\csc x$	$x\neq n\pi$	$-\infty<y<+\infty$
$y=\sec x$	$x\neq 2n\pi\pm\frac{\pi}{2}$	$\lvert y\rvert\geqslant 1$
$y=\sin^{-1}x$,	$\lvert x\rvert\leqslant 1$	$\lvert y\rvert\leqslant\frac{\pi}{2}$
$y=\cos^{-1}x$	$\lvert x\rvert\leqslant 1$	$0\leqslant y\leqslant\pi$
$y=\operatorname{tg}^{-1}x$	一切实数	$y\neq n\pi+\frac{\pi}{2}$
$y=\operatorname{ctg}^{-1}x$	一切实数	$y\neq n\pi$

求函数的值域，可以利用配方法，或利用二次三项式的判别式，有时也可以求其反函数的定义域。

【例2】 求下列函数的值域：

1） $y=x^2+6x-7$　　　　2） $y=\dfrac{3x+1}{x-2}$

解：1） $y=x^2+6x-7=(x+3)^2-16$

$$y+16=(x+3)^2\geqslant 0 \quad \therefore \quad y\geqslant -16.$$

2） $y=\dfrac{3x+1}{x-2}$ 可解出其反函数

$$x=\frac{2y+1}{y-3}.$$

显然$y\neq 3$是所给函数的值域。读者可作出它的图形(等边双曲线)加以验证。

1.2.3 函数的分类

本书所研究的函数最基本的有五种：幂函数（$y=x^a$）、指数函数、对数函数、三角函数与反三角函数。由这五种基本函数通过有限次加、减、乘、除、乘方、开方和复合所导出的函数称为初等函数(elementary functions)。

形如$y=kx^a$的函数称为幂函数（power function）。当a为正整数时是整函数。它的特例有正比例函数$y=kx$,抛物线$y=kx^2$,立方抛物线$y=kx^3$，以及由此引出的线性函数

$$y=kx+b$$

和多项式函数

$$y=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_n.$$

当a为负整数时是有理函数,它的特例有反比例函数(等边双曲线)

$$y=\frac{k}{x}.$$

当a为分数时是无理函数，它的特例有

$$y=\sqrt{x}$$

（抛物线）。

当a为无理数时是超越函数。

通常把常见的函数分为两类：

$$\text{函数}\begin{cases}\text{代数函数（整函数、分函数、无理函数）}\\ \text{超越函数(其他)}\end{cases}$$

读者应熟悉下列函数的草图：