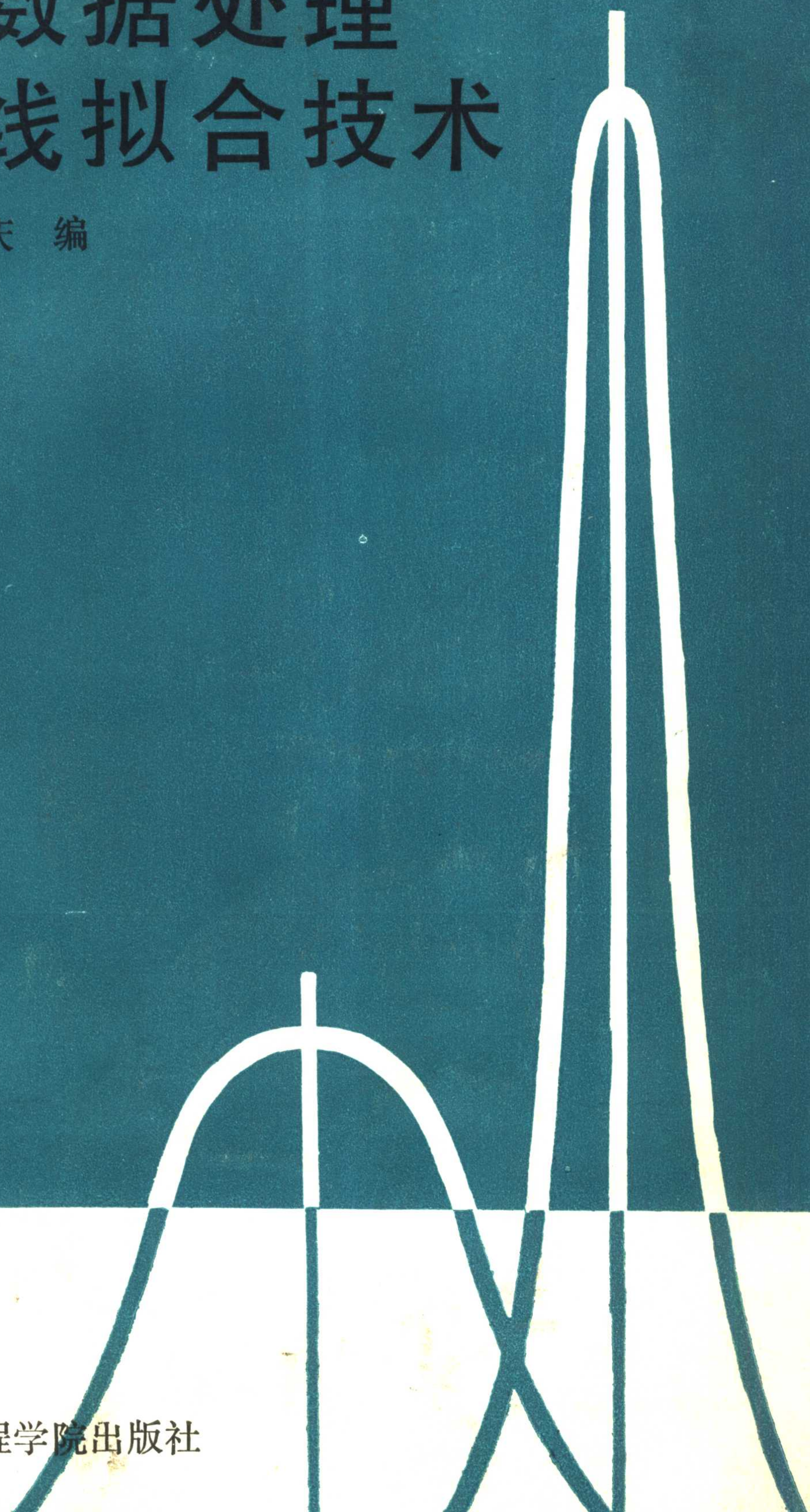
实验数据处理与曲线拟合技术

石振东　刘国庆　编



哈尔滨船舶工程学院出版社

实验数据处理与曲线拟合技术

石振东　刘国庆　编

哈尔滨船舶工程学院出版社

（黑）新登字第9号

内 容 简 介

本书由浅入深地介绍了对测定数据的计算方法及处理原则，内容包括：测定时的误差理论；测定方法与技巧；误差的传递与总合；不等精度测定；最小二乘运算及精度估计；利用作图法、半精密作图法、平均值法、插值法及最小二乘法对实验曲线进行拟合。

本书可作为大专院校精密仪器、机械设计、精密机械、机械电子、化工仪表、几何量计量等专业的教材，亦可供其他工程技术人员参考。

实验数据处理与曲线拟合技术
石振东 刘国庆 编

哈尔滨船舶工程学院出版社出版
新华书店首都发行所发行
哈尔滨船舶工程学院印刷厂印刷

•

开本787×1092 1/16 印张18.875 字数440千字
1991年12月第1版 1991年12月第1次印刷
印数：1—2000册
ISBN 7-81007-147-5/TH·12
定价：4.90元

编 者 的 话

实验数据处理是在解决具体的科学技术问题中发展起来的，所以，实验工作者应当善于从实验数据里找到对自己有用的东西。但是，各实验数据都不可避免地带有误差，如何导出数据间(变量间)内在的规律性就显得十分突出，这只有采用恰当的数学方法，才能得出正确的结论。本书主要讲述如何应用数理统计方法对实验数据进行数据处理。

本书以工程训练为主，强调应用。为使理论联系实际，各章后均有“思考与习题”，并附有答案。书内所选例题中的数据大都是工程上较为典型实测之结果，因而本书并不显得抽象化、数学化。若对该学科作详尽的讨论及完备的证明，则所需工作不知要扩大多少倍！这反而失去了写作本书的目的。

本书在编写过程中，经常得到天津大学蔡其恕、陈林才两位教授的指导，他们认真的工作作风及严谨的治学态度，深为作者由衷地钦敬和感谢。

由于作者水平有限，本书无论在内容的选材方面，还是在编排方式、理论深度和文字表达方面，一定会存在不少缺点甚至谬误之处，热切盼望各位专家和广大读者惠予批评指正。

编 者

1991.3.

符号说明

M_i	测定结果或测定值
T或μ	某量值的真值
δ_i	某量值的真误差，即真差
γ_i	某量值的剩余误差
α	显著度或显著水平
$P(x)$	随机变量x的置信概率
$\sigma(x)$	随机变量x的标准误差
$\sigma(\bar{x})$	算术平均值$\bar{x}$的标准误差
$\sigma^2(x)$	随机变量x的方差
$k\sigma(x)$	随机变量x在一定置信概率条件下的误差分布限，k是置信系数
$\pm k\sigma(x)$	随机变量x在一定置信概率条件下的误差分布区间
$p(x)$	随机变量x的概率密度函数
$x\sim p(x)$	随机变量x服从于$p(x)$分布
$\langle x\rangle$或$E\{x\}$	随机变量x的数学期望值
$\langle x^n\rangle$或$E\{x^n\}$	随机变量x的n阶矩
$\mathrm{Var}(x)$	随机变量x的方差
$\mathrm{Cov}(x, y)$	随机变量x和y的协方差
$\rho(x, y)$	随机变量x和y的相关系数
$N(x;\mu,\sigma^2)$	随机变量x的正态分布
$N(0,1)$	随机变量的标准化正态分布
$\hat{\sigma}(x)$或S_x	样本的标准误差
χ^2	卡埃平方变量
$\chi^2(f)$	自由度为f的卡埃平方变量分布
$\hat{\sigma}(\bar{x})$或$S_{\bar{x}}$	样本平均值的标准误差
η	平均误差
ρ	或然误差或概差
$\delta\lim$	在3σ条件下的极限误差
ζ	系统变差
ζ_0	系统恒差或常差
P_i	测定数据M_i的权
P	测定结果的总权
$\hat{M}$	广义算术平均值或加权后平均值
$\Delta_0, \Delta_1, \Delta_2, \cdots$	测定结果的一阶差分
$\Delta_0^2, \Delta_1^2, \Delta_2^2, \cdots$	测定结果的二阶差分
$\Delta_0^n, \Delta_1^n, \Delta_2^n, \cdots$	测定结果的n阶差分
$\delta_0, \delta_1, \delta_2, \cdots$	测定结果的一阶差商
$\delta_0^2, \delta_1^2, \delta_2^2, \cdots$	测定结果的二阶差商
$\delta_0^n, \delta_1^n, \delta_2^n, \cdots$	测定结果的n阶差商

$$[\nu\nu]=[\nu^2]=\sum_{i=1}^{N}\nu_i^2=\nu_1^2+\nu_2^2+\cdots+\nu_N^2$$

$$[ab]=\sum_{i=1}^{N}a_ib_i=a_1b_1+a_2b_2+\cdots+a_Nb_N$$

$$[a_1b_2]=\sum_{i=1}^{N}a_{i1}b_{i2}=a_{11}b_{12}+a_{21}b_{22}+\cdots+a_{N1}b_{N2}$$

$S_{总}$	总的差方和
$Q_{剩}$	剩余差方和
$U_{回}$	回归差方和
Q_E	误差差方和
Q_L	失拟差方和
f_S	$S_{总}$的自由度
f_Q	$Q_{剩}$的自由度
f_E	Q_E的自由度
f_U	$U_{回}$的自由度

目　　录

第二篇　实验曲线拟合技术

绪　论

工程技术领域中经常遇到各种变量，它们之间是相互联系相互制约的，对它们的研究，除依赖于它们在各自学科领域内所特有的、用严密逻辑推理方法进行理论分析并建立理论公式外，还有一个共同的方法——实验测定。将测定后的数据，依据某种数学原理和原则进行处理，找出变量间内在规律，从而建立其实验方程——经验公式。实验测定对科学的发展起着重要的作用，若没有赫兹、波波夫的实验测定，若没有后来成千上万个科学家及工程师们所进行的实验测定，仅有马克斯威尔的电磁波理论，无线电技术无论如何也不可能象今天这样蓬勃地发展起来。

实验测定是人类认识世界和改造世界的重要手段。通过测定，人们对客观事物获得了数量上的情报，经过分析、综合后，从而建立了各种不同的定理和定律。由此可见，实验测定是人类打开自然界中未知宝库的一把钥匙，没有测定，就没有科学。

实验技术水平的高低往往是衡量一个国家科学技术水平高低的重要标志之一。仅此一点就不难理解为什么关于误差的研究一直受到人们极大的重视，并且很早就吸引了诸如高斯、车比雪夫、勒让德、拉普拉斯、贝塞尔等一些卓越的科学家从事于这方面的工作。

测定工作的价值全在于其精确度。精确度不仅对产品质量起着监督和保证作用，而且也是产品优劣的一项决定性因素。同时，随着误差的深入研究，往往伴随着科学上重大新发现和带有根本性技术革新的前导，这在科学发展史上不胜枚举。

法国学者勒伏里在研究行星间运动规律时发现，根据经典力学所导出的函数关系式计算出天王星的理论轨道与实际测定后的结果不相吻合，产生了很大的误差。据此，勒伏里大胆地预言，只有在距离更远的轨道上还运行着一颗具有一定质量、尚未被人们探明的行星，才会与实际的测定结果相符合。为验证这一预言，通过精密测定，果真在更远的轨道上发现了一颗新的行星——海王星。

19世纪末英国物理学家瑞理测定氮气密度时，为提高精度，制取了两份氮气：一份是从空气里获得；另一份是由氮的化合物（NH_3）分解后得到。既然它们同是氮气，只要测定精确，它们的密度值应该是相同的。但是，实际测定后的结果并非如此。瑞理花了两年多时间研究发现：凡是由化合物中分解出的氮气，总比由空气中分离出的氮气轻一些。这究竟是什么这原因造成这一差异？瑞理与化学家拉姆塞合作研究，终于在1894发现了空气中还存在着一种当时尚未被人们发现的惰性气体——氩。

由此可以看出，为了定量地证实理论分析的结果，为了提供理论分析中所必需的数据，实验后的数据处理及定量分析是不可缺少的一个重要环节。

所谓实验的数据处理，就是以测量为手段，以研究对象的概念.状态为基础，以数学运算为工具，推断出某量值的真值，并导出某些具有规律性结论的整个过程。

实验时，即使使用极精密的仪器，测定后的数据绝不可能得到与客观情况百分之百相符合的结果。这样，由实验中获得的数据，都不可避免地带有误差，这种误差多呈现某种

随机性质，致使各测定数据间的规律性往往会被表面现象的偶然性所掩盖。因此，必须采用恰当、合理的数学方法对数据处理后，才能作出合理的解释和正确的推断，才能恰当的设计实验，才能得出正确的结论。绝不能认为获得数据后就大功告成了，还要作一系列、有时甚至比实验过程本身还要麻烦得多的数据处理后，才会得到与客观实际较为符合的结果。

实验数据处理是在解决具体的科学问题中发展起来的。因此，本课程以工程训练、实际应用为主，因而理论联系实际是本门课程的特点。希望广大读者，不要拘泥于数学上的严密推导，也不要被某些尚未认识的符号所迷惑，应牢记其概念及含义，掌握其运算方法，从而得出所需要的有规律性的东西。

精度计算后的结果只是个大致的估计值。误差性质不同时，其计算方法也不同。即使是同一组数据，若对其误差性质认识不同时，计算后的结果也会随之而异。因此，精度计算后的结果绝不会是唯一解，具体情况要作具体分析，这是本门课程的又一特点。

测定后的结果总是带有一定的随机性质，因而测定结果是些随机量。如何对它们处理和作出合理的解释，必须采用研究随机量的数学方法，即应用定量分析研究随机现象规律性的科学，否则就得不出合理的结论，也无法知道该结论的可信赖程度。随机量数学是一门正在迅速发展的学科，它已形成自己独特的算术，代数和分析——概率论、数理统计和随机过程理论，本书正是利用这些理论来解决实验中数据的处理问题。

由此看来，要想把这门课程学好，最好多选做一些习题，或将自己做过的实验和在工作中遇到的问题拿来解决。这样，能使解决实际问题的能力大大提高。

第一篇　实验的数据处理

第一章　预 备 知 识

第一节　测定及测定时的误差

从广义上讲，测定就是对客观事物取得定量的情报，获得数字上的表征。从计量学意义上讲，测定就是拿待测物理量与另一同类已知的标准量相比较，将已知标准量作为计量单位，从而确定出被测量是该标准单位量的几倍或几分之几，可由式（1-1）表达，即

$$x/u=c \quad \text{或} \quad x=cu \tag{1-1}$$

式中：x是被测的某量值，u是与x同单位的标准单位量值，c是比值。

两个尽管是相同的物理量值，若没有标准单位量与之比较，自然得不到真正的比值，仅能比较出它们的大小，严格说来不能称作测量，仅能称作评价。

测定后的数据，由于各种因素的影响，总含有误差，因而其读值或给出值，都是些近似结果。

错误是对正确而言，基于这种想法，误差可定义如下

$$\text{误差}=\text{错误值}-\text{正确值} \tag{1-2}$$

式（1-2）是误差的逻辑公式。测定后某量值的给出值总含有误差，给出值远较测定值广泛，至少包括：测定值、标称值、示值、预置值、计算后的近似值等。正确值是客观存在的唯一标准，因而式（1-2）具有唯一性。长度计量中，测量某长度后的误差，据式（1-2）含义，可具体表示为

$$\text{误差}=\text{测定值}-\text{真值} \tag{1-3}$$

测定值总含有误差，故可认为测定值是个错误值。

何谓真值？真值是“在某一时刻和某一位置或状态下，某量值效应所体现出的客观值”。[1]真值含有时间、空间涵义，真值就是个正确值。

某量值重复测定N次后，第i、j两次测定值之差，不能称作误差，可称作差异，可表示为

$$D_{ij}=M_i-M_j \qquad (i\neq j) \tag{1-4}$$

计量学中误差的公式显然可以表示成

$$\delta_i=M_i-\mu \tag{1-5}$$

式中：μ是真值、δ_i是M_i与μ之差，故称真误差，简称真差。由式（1-5）中可以看出，

只有知道某量值的真值后，误差的大小和符号才能计算出来。这样，不由使人产生疑问：真值是个纯理性的概念，是个未知的量值，会使误差的计算无法进行。在这种情况下，如何求得真值的“最佳估计”值呢？就成了一个必须认真研究的问题（该问题的解答将在第二章内详述）。

事物总是一分为二的，尽管真值是个确定的未知量，但为使生产能够顺利进行并保证在全国范围内计量单位传递时的正确与统一，在某些情况下，人们对真值又附加了一些新的含义。这样，在某种情况下真值又属可知情况，有些则从相对意义讲，其真值也是相对可知的。

真值属于可知情况有如下三种：

1. 理论真值：例如，三角形三内角之和恒为180°，同一量值自身之差恒为零，自身之比恒为1，等等。尽管测定后的结果并非如此，但上述结论无疑是正确的。此外，诸如：理论公式值、设计值、图样的基本尺寸值、无理数中的正确值等，都可认为属于理论真值范畴。

2. 约定真值：[2]国际计量大会中所规定的共七种单位的量值，它们具有严格的标准，凡满足上述大会决议中的条款和要求，由国家复制或复现出的量值，都可认为是约定真值。

3. 相对真值：用高一级仪器检定低一级仪器时，更具体说，当高一级与低一级仪器的误差之比为（1/3～1/20）时，则可认为前者是后者的相对真值。这样，便可建立多级计量网，在全国范围内保证了计量单位的正确传递和统一。

如果在误差公式中改变一下逻辑顺序，就引进了一个新的概念与定义。

$$\text{真值}-\text{测定值}=-(\text{误差})=\text{修正值} \tag{1-6}$$

真值又可表示成

$$\text{真值}=\text{测定值}+[-(\text{误差})] \tag{1-7}$$

式（1-6）说明修正值等于负的误差，即修正值的符号恒与误差符号相反。修正值又称校正值。

式（1-7）又可表示成

$$\text{真值}=\text{测定值}+\text{修正值} \tag{1-8}$$

式（1-8）说明含有误差的测定值加上修正值后，便可消除掉误差对测定值的影响（严格说来能够修正的误差，仅不过是系统误差中已知其大小和方向的已定系统误差而已）众所周知，在精密螺纹车床、坐标镗床上的丝杠、温度校正尺，就是利用加修正值的办法以提高加工精度的具体运用。

随着科学发展和技术进步，会使误差变得很小，使测定结果逐渐迫近真值，但绝不会使误差等于零。客观现实世界的变化运动永远没有完结，人们在实践中对于真理的认识也就永远没有完结，对于真值来说，也是这样。

第二节 误差公理

由于真值是个确定的未知量，这就增加了研究误差时的难度。测定数据与真值之间永远不会完全一致，这就产生了矛盾，该矛盾在数值上的表现就是误差。误差产生的必然性

已为人们的实践所证实 也为一切从事科学实验的人们所公认，因而误差公理成立。

误差公理：一般情况下，某量值的真值是存在、唯一的，但是测不准，因而实验后误差存在于实验过程的自始至终。

基于误差公理，必须认真研究下面几个问题

1． 测定结果绝不可能准确无误地反映被测对象的客观结果，测定只能得到客观情况的近似结果，因而测定值永远是个近似值。要想真实地反映客观事物的本来面貌，就应使误差小，就应当认真地研究误差。

2． 在真值未知情况下，误差的计算无从入手。人们通过实践发现，可以利用数理统计理论终于找到了可取代真值的无偏估计值（又称最可信赖值）。无偏估计值的计算将在第二章中讨论。

3． 含有误差的测定结果经修正后能否得到真值？这取决于修正值是否为“真”。当真值处于相对可知情况下，对含有误差的测量结果经修正后确实可以得到相对真值。但是，由误差公理中可以推断出：修正值本身也是个具有测量误差的近似结果，经过修正后也不是客观的真值，只不过是个更接近于真值的测定结果罢了。

误差理论是在误差公理基础上建立起来的理论，为了加深对误差公理的理解，请读者熟思并讨论下面的四个问题。

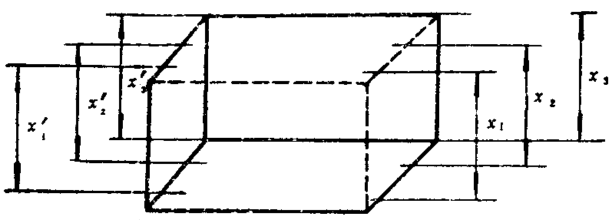


图1-1

1． 精密量块的工作长度问题：量块是各表面呈矩形的平行六面体，它的两个平行工作端面间的几何长度表征了量块的长度。根据几何学知识可知，两工作面间各相应位置的距离（处处相等）就应是量块的长度。但是，误差公理的作用存在于测量过程的自始至终。因此，两工作表面间，无论制造的如何平行，研磨得如何精细，测定x_1、x_2、x_3、x_1'、x_2'、x_3'后，它们的数值绝不会完全相同。到底哪个x的尺寸算作检定量块时的工作长度呢？这是个必须回答的问题。

2． 计算正方形面积s时的讨论：可首先测定两个边长a_1与a_2，假设$a_1=a_2=a$，可用公式

（1） $s=a^2$； （2） $s=a_1\times a_2$

试问这两个公式哪个正确？

3． 测定长度时的讨论：用$l=1$米直尺测定长约$L=100$米时，共测定$N=100$次，计算可用公式

（1） $L=100l$； （2） $L=l+l+\cdots+l=Nl$

试问这两个公式哪个正确？

4． 测定单摆振动时间的讨论：用粗劣的秒表及精良的1/100秒表，分别测定单摆往返振动$N=20$次的时间t，获得数据如下（单位：秒）

秒表：20，20，…，20，$\bar{t}_1=20$

$\frac{1}{100}$表：20.12，20.09，…，20.11，$\bar{t}_2=20.10$

$\bar{t}_1$、$\bar{t}_2$分别是算术平均值（$\bar{t}_1$、$\bar{t}_2$可近似取代t_1、t_2的真值）。分析$\bar{t}_1$、$\bar{t}_2$值后就会发

现：用秒表测定后的各数据，其误差都是零；用1/100秒表测定结果，每次测定后都有误差。这岂不是说，用劣等表测定的结果比用精良的1/100秒表测定的结果还要精密吗？这个结论对不对？

［提示］ 请读者分析一下：问题1中，应首先找出矛盾产生的原因，然后人为硬性地规定些附加条件，使量块的工作长度呈现唯一性，该问题也就解决了。问题2中的假设条件在实际测定中能否得到满足？问题3中所建立的两个公式，哪一公式更符合测定过程的实际？问题4中分析一下$\bar{t}_1$、$\bar{t}_2$数据的特点及所选择的仪表灵敏度是否恰当？当真正理解误差公理的深刻涵义并融会贯通后，自然会得出正确答案。

第三节 绝对误差与相对误差

关于误差的一般性描述，可用绝对误差及相对误差来表达。

一、绝对误差及其特点

1. 定义：测定值与被测量真值之差，即

$$M_i - \mu = \pm \delta_i \qquad (i = 1, 2, \cdots, N) \tag{1-9}$$

对某量值N次重复测定后，共有N个δ_i，取其中最大者即为绝对误差，绝对误差是针对最大绝对误差而言。为使语言精炼，最大二字往往省略。δ_i是M_i与μ之差，是“真误差”，简称真差。

2. 特点：δ_i与被测量的量纲一致。绝对误差能反映出误差的大小和符号。δ_i不能客观地反映测量工作的精细程度。

二、相对误差及其特点[3]

1. 定义：绝对误差与真值之比即是相对误差。同理，相对误差是指最大相对误差而言。常见的相对误差的表示方法有两种

（1） 实际相对误差，其公式为

$$\rho = \delta/\mu \tag{1-10}$$

（2） 引用误差S：是一种简化了的相对误差，实用方便，多用于电工类仪表中。这类仪表的可测范围不是一个点而是整个量程，各分度点处的示值与对应的真值都不一样，因而相对误差的计算相当麻烦。为使计算及划分精度等级的方便，一律取该仪表的引用误差。这类仪表引用误差的公式，如式（1-11）

$$S = \rho_{引} = 示值误差/全量程 = \delta/A_n \tag{1-11}$$

引用误差的数值用百分数表示。该类仪表的精度等级分别规定为：0.1，0.2，0.5，1.0，1.5，2.5，5.0共七个等级，分别说明仪表不能超过的界限。一般说来，如果仪表为S级，则说明该仪表的最大引用误差不会超过S%，而不能认为该仪表在各刻度点上的相对误差都具有S%的精度。

设 某电工仪表量程为$0 \sim A_n$，测量点为A_i，则其绝对误差、相对误差可表示为

$$\left.\begin{aligned} &绝对误差 \leqslant A_n \times S\% \\ &相对误差 \leqslant (A_n \times S\%)/A_i \end{aligned}\right\} \tag{1-12}$$

由于$A_i \leqslant A_n$，当A_i接近于A_n时其精度愈高；当A_i远离A_n时其精度愈低。这就说明，

为什么利用这类仪表时，要尽可能地选取仪表上限或在2/3以上量程处进行测量的原因。

2. 特点：相对误差是两个相同量纲的比值，数值的大小与被测量所选取的单位无关。相对误差能反映出误差的大小和符号。相对误差不但与绝对误差的大小有关，而且还与被测量的大小有关，因而它更确切更客观地反映了测量工作时的精细程度。

［例1-1］ 基本尺寸为$\phi 10$的小轴共加工了20个：前10个$\delta_1 = 10\mu m$，后10个$\delta_2 = 8\mu m$。若又加工了10个基本尺寸为$\phi 8$的小轴，$\delta_3 = 7\mu m$.试比较它们间的精密度。

［解］ 应由相对误差评定精密度，分别计算出

$$\rho_1 = \delta_1/d_1 = 0.010/10 = 0.1\%；\quad \rho_2 = \delta_2/d_2 = 0.008/10 = 0.08\%；$$

$$\rho_3 = \delta_3/d_3 = 0.007/8 = 0.09\%$$

计算结果表明，精密度的顺序为ρ_2、ρ_3、ρ_1。

［例1-2］ 已知$\pi = 3.14159265\cdots$，π若取下表所列出的不同数值时，其δ_i、ρ_i值各为若干？

［解］ $\pi = 3.14159265\cdots$是π的正确值，π的取值相当于错误差。据此分别计出各算自的δ_i及ρ_i值后填入表内。

π的取值	δ_i	ρ_i
3.1	$-0.04159265\cdots$	-1.3%
3.14	$-0.00159265\cdots$	-0.05%
3.142	$+0.00040735\cdots$	$+0.01\%$
3.1416	$+0.00000735\cdots$	$+0.002\%$
3.14159	$-0.00000265\cdots$	-0.00008%
3.141593	$+0.00000035\cdots$	$+0.00001\%$

由表中ρ_i栏内可以看出，π值取的位数愈多时，ρ_i值也愈小、愈精密。

例［1-3］ 氢原子、电子的质量经测定并经处理后分别为$(1.673 \pm 0.001) \times 10^{-24}g$，$(9.11 \pm 0.01) \times 10^{-28}g$

试问哪个测定结果更精密些？

［解］ 由已知测定结果的绝对误差分别为：$\delta_{原子} = 10^{-27}g$；$\delta_{电子} = 10^{-30}g$。说明原子的绝对误差比电子大1000倍，能否认为原子的测定精度要比电子差了1000倍呢？可用相对误差来评定。

$$\rho_{电子} = \delta_{电子}/\mu_{电子} = 0.01/9.11 = 0.1\%$$

$$\rho_{原子} = \delta_{原子}/\mu_{原子} = 0.001/1.673 = 0.059 \approx 0.06\%$$

计算结果表明，原子的测定精度更精密些。

［例1-4］ 测量上限为19613.3N的测力计，在标定值为14710N的实际作用力为14788N。试问该测力计在该点处的引用误差为若干？

［解］ $\rho_{引} = S = (14710 - 14788)/19613.3 = -0.4\%$

［例1-5］ 检定$S = 2.5$，$A_n = 100V$的表头时，在50V刻度点上标准电压表读值为48V。试问该电压表在该点处是否合格。

［解］ 已知：$M_i = 50V$，$\mu = 48V$而实际的引用误差为：$\rho_{引实} = S_{实} = (50 - 48)/100 = 2\% < S = 2.5\%$，故可断定在50V刻度点处是合格的。

［例1-6］ 待测电压约为100V，现用两块电压表：①$S = 0.5$，$A_n = 0 \sim 300V$；②$S = 1.0$，$A_n = 0 \sim 100V$。试问采用哪块电压表测定较好？

［解］ 分别计算出在100V点的相对误差值。

① $\rho = (A_n \times S\%)/A_i = (300 \times 0.5\%)/100 = 1.5\%$

② $\rho = (A_n \times S\%)/A_i = (100 \times 1.0)/100 \approx 1.0\%$

计算结果表明，采用$S=1.0$级比用$S=0.5$级测定的更精密。

第四节　近　似　值

如前所述，测定值永远是个近似值。那么，近似值是不是个测定值呢？近似值的范围远较测定值广泛，一般说来至少包括下列五个方面

1. 各种数学常数

诸如：$\pi=3.14159\cdots$，$e=2.71828\cdots$，$\sin 15°=0.25881\cdots$，$\sqrt{2}=1.4142\cdots$，$\ln 10=2.30258\cdots$等，它们在公式中取值时，总是个近似结果。

2. 各种物理常数

诸如：铝的热膨胀系数$\alpha=0.238\times10^{-4}$，铜的电阻系数$\rho_{铜}=0.017\times10^{-4}$，水在20℃时的折射率$\eta=1.333$等。如果测定对象不是物理常数本身，通常可由各种手册中分别查出其数值后再代入公式中计算。

3. 由于计算方法的近似性而得到的结果

诸如：取级数的前n项和代替函数的计算结果，微分方程、积分方程的近似解等，它们计算后的结果也都是些近似值。

4. 由计算工具的近似性而造成计算结果的近似性

诸如：用计算尺、计算器、计算机等的计算结果，它们也是些近似值。

由以上四种原因造成的误差，一般说来影响还是较小的，而且也是比较容易克服的。

5. 各种近似值的间接计算结果

各种直接测定值通过确定已知的函数关系式计算后获得的间接测定结果，也是个近似结果，计算后的误差称作函数误差，又称间接测定误差。一般说来，函数误差的精度最低，这是因为能够引入误差的因素、来源和途径，远较前四种更加广泛，应引起足够重视。

第五节　误差来源及分类

分析误差对测定结果所造成的影响，莫过于研究误差的来源更为直接，了解来源后对如何消除误差的影响会有所帮助。

一、误差来源

（一）实验装置误差

1. 标准器误差：标准器是提供标准量的器具，诸如：标准量块、标准电阻、标准砝码等，它们体现出的量值都具有一定的误差。

2. 仪表误差：用来直接或间接地将被测量与标准单位量进行比较的设备称作仪表。尽管它们设计得已相当完善，然其示出的结果都含有一定的误差。

3. 附件误差：为正确测定创造必要条件或使测定能够方便进行而必备的各种辅助性的零件或设备，称作附件。诸如：电源、热源、按装支架等，它们也都具有一定的误差。