高等学校轻工专业试用教材

高等数学

朱俊龄　主编

轻工业出版社

高等学校轻工专业试用教材

高 等 数 学

朱俊龄 主编

轻工业出版社

内 容 提 要

本书是由天津轻工业学院等十所院校共同编写的专科数学教材。内容包括函数、极限与连续、导数微分及其应用、不定积分和定积分、微分方程、多元函数微积分和无穷级数等。

本书在内容选择、结构体系、习题等方面力求结合高等专科学校的要求和学制特点，力求贯彻少而精的原则，注意对学生基本概念的理解和基本运算能力的训练，同时还注意理论与实际的联系，以利于培养学生分析问题和解决问题的能力。

本书可作为专科学校高等数学课程的教材。也可以作为本科对高等数学要求较低的专业和职工大学、业余大学的数学教材。还可供具有高中文化水平的自学读者参考。

高等学校轻工专业试用教材

高等数学

朱俊龄　主编

轻工业出版社出版

（北京东安门南滨河路25号）

轻工业出版社印刷厂印刷

新华书店北京发行所发行

各地新华书店经售

850×1168毫米1/32印张：14　字数：356千字

1989年4月　第一版第一次印刷

印数：1—5,000　定价：3.50元

ISBN7—5019—0576—2/O·002

前　言

为满足高等工业专科学校各专业数学教学的需要，由十一所轻工业院校联合成立了专科数学教材编写组，在总结工业专科数学教学工作的基础上，共同拟定了编写大纲，编写出初稿，并在几所院校对初稿进行试用，几经修改，编写出本教材。

本书在内容选择和处理、结构体系、习题的配备等方面力求结合高等专科学校的培养要求和学制特点，力求贯彻少而精的原则，注意对学生基本概念的理解和基本运算能力的训练，同时还注意理论与实际的联系，以利于培养学生分析问题和解决问题的能力。

本书实际授课时数为120学时左右（包括习题课）。内容包括函数、极限与连续、导数微分及其应用，不定积分和定积分，微分方程，多元函数微积分和无穷级数等六章。每节配有习题，各章后有复习题，书后附有常用初等数学公式，简易积分表，常用平面与空间图形，习题答案。书中带*号的内容可供不同专业选取。

本书可作为两年制工科大专高等数学课程的教材，也可以作为本科对高等数学要求较低的专业和职工大学、业余大学选作教材，还可供具有高中文化水平的自学读者参考。

本书由天津轻工业学院朱俊龄副教授担任主编，参加执笔编写工作的有：天津轻工业学院王怀信（第一、二章），无锡轻工业学院马恒新（第三、四章），大连轻工业学院由好庚，西北轻工业学院沈元林（第五章），大连轻工业学院关世忠（第六章）等同志。

本书由全国高等工业院校数学课程教学指导委员会委员、南京工学院陶永德教授主审。参加审稿工作的有：北京轻工业学院

马锐之，郑州轻工业学院李林生，安徽机电学院白宗燕，上海轻工业专科学校钱翼文等同志。天津轻工业学院朱佩珍为本书设计、绘制了全部插图。

编　者

1986年12月

目　录

第一章　函数　极限　连续

函数是高等数学研究的主要对象。极限是研究高等数学的主要方法。在中学数学中，曾经系统讲授过函数的有关概念，本章我们只对函数作简要复习，重点介绍极限、无穷小、连续函数的概念及运算，为高等数学的学习打下基础。

第一节　函　　数

一、函数的概念

在实际问题中，我们经常遇到各种不同的量，如重量、长度、面积、时间、温度等。在某一过程中，始终保持同一数值的量称为常量，可以取不同数值的量称为变量。例如，在某物体作匀速直线运动的过程中，速度是常量而时间和路程是变量。

通常，用字母a、b、c等表示常量，用字母x、y、t等表示变量。如果变量的变化是连续的，变量的取值范围常用区间表示。例如变量x的取值范围是$a\leqslant x\leqslant b$（a、b为两个实数），就用闭区间$[a,\ b]$表示，若变量x的取值范围是$a<x<b$，就用开区间$(a,\ b)$表示，其它还有半开区间、无穷区间等。这是大家熟知的概念，这里不再重复，我们只介绍一种特殊的区间，即邻域的概念。

设a与δ是两个实数，且$\delta>0$，称开区间$(a-\delta,\ a+\delta)$为点a的δ邻域。若变量x的取值范围是a的δ邻域，也就是有不等式

$$a-\delta<x<a+\delta$$

换一种写法就是$|x-a|<\delta$，因而点a的δ邻域也就是数轴上

以a为中心，而长度为2δ的开区间（图1-1）。

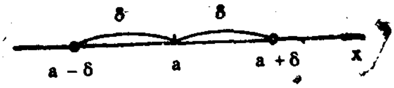

图 1-1

一般称a为邻域中心，δ为邻域半径。

在同一自然现象或技术过程中往往有两个或两个以上变量共同变化着，这些变量的变化不是彼此孤立的，而是相互影响，相互联系并遵循一定的变化规律。本书前四章介绍在同一过程中只有两个变量的情况，至于多于两个变量的情况将在后续章节中出现。

定义 **设有两个变量x和y，若变量x在其取值范围内任意取定一个数值时，变量y按照一定的规律总有确定的数值和它对应，则称变量y是变量x的函数。**

通常称x为自变量，y为因变量。

为了表明y是x的函数，我们用记号$y=f(x)$、$y=\varphi(x)$或$y=F(x)$等来表示，这里字母“f”、“φ”、“F”表示y与x之间的对应关系，即函数关系。如果同时考虑几个不同的函数时，为了避免混淆，可用不同的字母来表示不同的函数。

两个变量之间的函数关系可以用图象、表格或公式表示，我们在高等数学中主要讨论的是用公式表示的函数。例如

$$y=2x+1,\quad y=\ln\operatorname{tg}x,\quad y=e^{x-1}。$$

如果自变量取某一数值x_0时，函数$y=f(x)$有确定的值和它对应，则称函数在x_0有定义。使函数有定义的一切实数的全体称为函数的定义域；所有函数值的全体，叫做函数的值域。

自变量x取定义域内的某一数值x_0时，函数y的对应值称做函数当自变量取该值时的函数值，用$f(x_0)$或$y|_{x=x_0}$表示。函数值的全体称做函数的值域，它是由对应关系和定义域来确定的。如果自变量在定义域内任取一个确定的数值时，函数都只有一个确定值和它对应，这种函数称为单值函数，否则称为多值函数。以后凡是不加说明时，函数都是指单值函数。

在很多实际问题中，我们也会遇到当自变量x在定义域内的不同范围取值时，函数y用不同公式表示的情况。例如

$$y=\begin{cases}-x+1, & 0\leqslant x<1;\\ 1, & x=1;\\ -x+3, & 1<x\leqslant 2\end{cases}$$

就是定义在$[0, 2]$上的函数，当自变量x在$[0, 1)$上取值时，函数y用公式$-x+1$表示，当自变量x在$(1, 2]$上取值时，函数y用公式$-x+3$表示，当自变量$x=1$时，函数$y=1$。这样的函数称为**分段函数**（图1-2）。

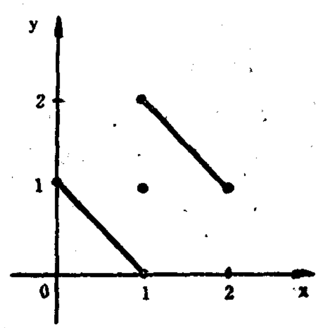

图 1-2

应该注意，分段函数虽然用几个式子表示，但它只是一个函数。

对函数$y=f(x)$来说，如果把y当做自变量，x当做函数，则由关系$y=f(x)$所确定的函数$x=g(y)$，称为函数$y=f(x)$的**反函数**，而$f(x)$称为**直接函数**。例如

$$y=\frac{1}{2}x+1 \quad \text{的反函数是} \quad x=2(y-1)$$

习惯上，我们用x表示自变量，y表示函数，因而将$x=g(y)$

中的x改写为y，y改写为x，这时$y=f(x)$的反函数写成$y=g(x)$。上例中$y=\frac{1}{2}x+1$的反函数写成$y=2(x-1)$。可以证明，直接函数$y=f(x)$与其反函数$y=g(x)$的图形是关于直线$y=x$对称的。

二、函数的几种特性

1 **有界性** 设函数$f(x)$在区间(a,b)内有定义，若存在正数N，对(a,b)内任意一点x都有$|f(x)|<N$，则称函数$f(x)$在区间(a,b)内为**有界函数**。如果这样的N不存在，则称$f(x)$在区间(a,b)内为**无界函数**。例如

$y=\sin x$ 在$(-\infty,+\infty)$内就是有界函数。

$y=\frac{1}{x}$ 在$(0,1)$内就是无界函数，但是在$(1,2)$内是有界函数。

2 **奇偶性** 函数$f(x)$在它的定义域内如果满足$f(x)=f(-x)$就称$f(x)$为**偶函数**，如果满足$f(-x)=-f(x)$，就称$f(x)$为**奇函数**，例如

$y=x^2$和$y=\cos x$是偶函数

$y=x^3$和$y=\sin x$是奇函数

$y=x^3+1$和$y=\sin x+\cos x$既非偶函数，也非奇函数。

偶函数的图形对称于y轴，奇函数的图形对称于原点。

3 **单调性** 如果函数在区间(a,b)内随着x的增大而增大，即对于(a,b)内任意两点x_1及x_2，当$x_1<x_2$时，有$f(x_1)<f(x_2)$，则函数$f(x)$称为在区间(a,b)内是**单调增加的**。如果函数$f(x)$在区间(a,b)内随着x的增大而减小，即对于(a,b)内任意两点x_1及x_2，当$x_1<x_2$时，有$f(x_1)>f(x_2)$，则函数$f(x)$称为在区间(a,b)内是**单调减少的**，例如

$y=x^3$ 在（$-\infty$, $+\infty$）内是单调增加的。

$y=\left(\frac{1}{2}\right)^x$在（$-\infty$, $+\infty$）内是单调减少的。

4 **周期性** 对函数$y=f(x)$来说，如果存在一个不为零的数l，使得关系式$f(x+l)=f(x)$对函数定义域内每个x值都成立，则称$f(x)$是周期函数。使$f(x+l)=f(x)$成立的最小正数l称为$f(x)$的周期。例如

$y=\sin x$和$y=\text{tg}\,x$分别是周期为2π和π的周期函数。

三、初 等 函 数

如果y是u的函数：$y=f(u)$，而u又是x的函数：$u=\varphi(x)$，并且当变量x在函数$u=\varphi(x)$的定义域内取值时，$\varphi(x)$的函数值全部或部分在函数$y=f(u)$的定义域内，那么y通过u也是x的函数，这时称这个函数是由函数$y=f(u)$及$u=\varphi(x)$复合而成的函数，简称**复合函数**，记作$y=f[\varphi(x)]$。u称为**中间变量**。

例1 $y=e^u$ 而$u=2x^2-1$则由它们复合而成的函数为$y=e^{2x^2-1}$。

例2 函数$y=\ln\sin x$是由$y=\ln u$及$u=\sin x$复合而成。这里$u>0$，即$\sin x>0$，所以函数$y=\ln\sin x$的定义域为（$2n\pi$，$(2n+1)\pi$），（$n=0$，±1，$\pm2\cdots$）。

例3 函数$y=\text{tg}^2(x^2+3x-1)$是由$y=u^2$，$u=\text{tg}\,v$及$v=x^2+3x-1$复合而成。这里共有两个中间变量u和v。

在中学数学里，曾对幂函数、指数函数、对数函数以及三角函数、反三角函数作过详细的讨论，这里只作简要复习。

1 **幂函数** $y=x^\mu$（μ为常数），由于μ的不同，函数的定义域和性质也不一样。例如：$\mu=1$时，$y=x$是直线，定义域为（$-\infty$, $+\infty$）；$\mu=2$时，$y=x^2$是抛物线，定义域为（$-\infty$, $+\infty$）；$\mu=-1$时$y=\frac{1}{x}$是双曲线，定义域为（$-\infty$, 0），（0,

$+\infty$）等等。幂函数在（0，$+\infty$）都有定义，且它的图形都经过（1，1）点。

2 指数函数$y=a^x$（a是大于零，且不为1的常数）。它的定义域是（$-\infty$，$+\infty$）。当$a>1$时，函数a^x是单调增加的；当$0<a<1$时，函数a^x是单调减少的（图1－3）。

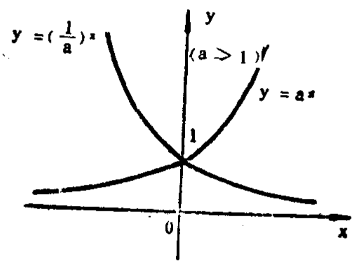

图 1-3

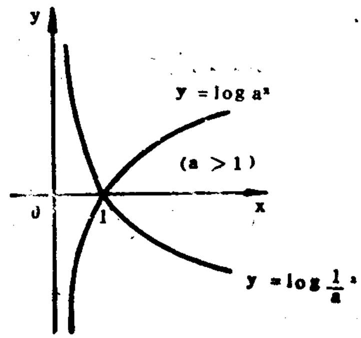

图 1-4

3 对数函数$y=\log_a x$（a是大于零，且不为1的常数）。它是指数函数$y=a^x$的反函数，它的定义域是（0、$+\infty$）。当$a>1$时函数单调增加，当$0<a<1$时函数单调减少（图1-4）。

4 三角函数 正弦函数$y=\sin x$和余弦函数$y=\cos x$的定义域是（$-\infty$，$+\infty$），并且它们都是以2π为周期的周期函数。

正切函数$y=\mathrm{tg}x$的定义域为$x\neq(2k+1)\dfrac{\pi}{2}$（$k=0,\pm1,\pm2,\cdots$），余切函数$y=\mathrm{ctg}x$的定义域为$x\neq k\pi$（$k=0,\pm1,\pm2,\cdots$）。$\mathrm{tg}x$和$\mathrm{ctg}x$都是以$\pi$为周期的周期函数。

5 反三角函数 反正弦函数$y=\arcsin x$定义域为$[-1,1]$，值域为$\left[-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right]$。反余弦函数$y=\arccos x$定义域为$[-1,1]$，值域为$[0,\pi]$。反正切函数$y=\mathrm{arctg}x$定义域为（$-\infty$，$+\infty$），值域为$\left(-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right)$。反余切函数$y=\mathrm{arcctg}x$定义域为（$-\infty$，

$+\infty$)，值域为$(0,\ \pi)$

以上五种函数称为**基本初等函数**。凡是由基本初等函数经过有限次四则运算与有限次复合步骤所构成的，并可用一个式子表示的函数都称为**初等函数**。例如

$$y=e^{2x^2-1},\quad y=\operatorname{arc\,ctg}\sqrt{3x^3-2x+7},$$

$$y=\ln\frac{\sin x}{x}$$

都是初等函数。本教程中所讨论的函数，绝大多数是初等函数。

习题 1—1

1 求下列函数的定义域

(1) $y=x+\dfrac{1}{x}$ (2) $y=\sqrt{\dfrac{1+x}{1-x}}$

(3) $y=\operatorname{arctg}e^{\sqrt{x}}$ (4) $y=\operatorname{ctg}\dfrac{1}{x}$

(5) $y=\sqrt{\sin 2x}$ (6) $y=\dfrac{1}{1-x^2}+\sqrt{x+2}$

(7) $y=\lg(x+\sqrt{x^2+1})$

(8) $y=\arcsin\left(\lg\dfrac{x}{10}\right)$

2 下列的$f(x)$和$g(x)$是否表示同一函数？说明理由。

(1) $f(x)=\ln x^2,\ g(x)=2\ln x$

(2) $f(x)=x,\ g(x)=(\sqrt{x})^2$

(3) $f(x)=|x|,\ g(x)=\sqrt{x^2}$

(4) $f(x)=\dfrac{x^2-1}{x+1},\ g(x)=x-1$

3 若$f(x)=x^2$，$g(x)=e^x$，求$f[g(x)]$
$g[f(x)]$，$f[f(x)]$，$g[g(x)]$

4 画出函数 $f(x)\begin{cases} x^2+2, & x>0 \\ 1, & x=0 \\ x^2-2, & x<0 \end{cases}$

的图形，并求$f(3)$，$f(-2)$，$f(0)$的值

5 求下列函数的反函数

(1) $y=2x^2-1$ (2) $y=ln(x^3+1)$

(3) $y=\dfrac{2^x}{2^x+1}$ (4) $y=1+\mathrm{arctg}(x-2)$

6 写出下列函数是由哪些函数复合而成的

(1) $y=\sqrt{\mathrm{tg}x}$ (2) $y=\ln\sin x^2$

(3) $y=e^{\mathrm{arc}(\cos 2x^2+1)}$ (4) $y=(\mathrm{arctg}\sqrt{x^2+1})^2$

(5) $y=\ln^3[\ln^2(\ln x)]$ (6) $y=\sqrt{\sin e^{x-a}}$

7 已知三角形中有两边长分别为a与b，设θ为这两边之间的夹角，试将三角形的面积表示成θ的函数，并求定义域。

8 已知圆锥的体积为V，试将圆锥的底半径R表示为高H的函数，并求定义域。

9 设M为密度不均匀的细杆OB上的一点，若OM的质量与OM的长度的平方成正比，已知 $OM=4$厘米时质量为8单位，试求OM的质量与长度的关系。

10 某市内出租汽车对乘客收费规定如下：乘坐5公里及5公里以内，收费3元；超过5公里，不超过10公里，收费5元；从10公里以后，每多行1公里，加收费0.7元，试将车费表示成路程的函数，并绘出函数的图形。

第二节 极 限

在高等数学中，极限方法是解决问题的主要方法。我们将要用极限概念确定微积分学中的一些基本概念。微积分的一些基本