

# 结构力学基础

龚尧南

编

航空工业出版社

# 结 构 力 学 基 础

龚尧南 编

航空工业出版社

1993

(京)新登字161号

## 内 容 提 要

本书以杆系结构和薄壁结构为研究对象,讨论结构的构造原理、基本理论和分析方法。首先介绍了能量驻值原理及其与位移和应力分析的关系,并在此基础上由浅入深、由杆系结构到薄壁加筋结构逐步讨论结构的功能及其组成,载荷在结构中的传递特点,以及结构在传递载荷时所经受的变形和内力的分析方法。本书注意从传力的概念出发来讨论结构的合理组成,以及为了达到预定的传力方案应如何安排结构元件的刚度。本书还着重讨论了加筋薄壁结构中的某些特殊问题,如限制扭转和限制弯曲问题、大开口和参差弯曲问题、结构不连续与力的扩散和参与受力问题、大锥度和斜支持问题等。本书专为航空航天院校飞行器设计与工程力学专业本科生作为教科书而编写,但对于其它专业学习结构力学课程也有参考价值。此外,本书也可供有关专业工程技术人员参考。

## 结 构 力 学 基 础

龚尧南 编

航空工业出版社出版发行

(北京市安定门外小关东里14号)

—邮政编码: 100029—

全国各地新华书店经售

煤炭工业出版社印刷厂印刷

1993年11月第1版      1993年11月第1次印刷

开本: 787×1092 1/16    印张: 13.375

印数: 1—1500          字数: 333千字

ISBN 7-80046-581-0 /G ·101

定价: 6.55 元

# 目 录

序 言	(1)
<b>第一章 结构分析中的能量方法</b>	<b>(3)</b>
1.1 弹性力学的基本方程	(3)
1.2 应变能和余应变能	(6)
1.3 格林恒等式	(7)
1.4 虚功原理 (虚位移原理)	(8)
1.5 最小势能原理	(10)
1.6 最小应变能原理	(16)
1.7 单位位移定理	(17)
1.8 余虚功原理 (虚力原理)	(17)
1.9 最小余能原理	(19)
1.10 变形结构的最小余应变能原理	(20)
1.11 单位载荷定理	(23)
1.12 叠加原理	(27)
1.13 互换定理	(27)
1.14 结论	(28)
参考文献	(28)
习题	(29)
<b>第二章 杆系结构的计算</b>	<b>(31)</b>
2.1 前言	(31)
2.2 桁架结构的几何不变性和静力分析	(32)
2.2.1 判断几何不变性的运动学方法	(32)
2.2.2 判断几何不变性的静力学方法	(37)
2.2.3 静定桁架的分析	(40)
2.3 刚架结构的几何不变性和静力分析	(45)
2.4 静定混合杆系的内力	(48)
2.5 静不定结构的内力和变形	(50)
2.5.1 力法的正则方程	(50)
2.5.2 力法原理	(54)
2.5.3 对称定律	(62)
2.5.4 静不定结构的变形计算	(63)
2.5.5 静不定结构分析的小结	(65)
2.6 位移法	(65)
2.7 矩阵位移法	(68)
参考文献	(77)

习题	(78)
<b>第三章 薄壁结构的构造原理</b>	(80)
3.1 作用在结构及其元件上的载荷	(80)
3.2 结构元件的功用	(82)
3.2.1 机翼	(82)
3.2.2 机身	(84)
3.3 结构的理想化与计算模型	(85)
3.4 结构的材料及力学特性	(91)
参考文献	(96)
<b>第四章 加筋薄壁结构计算的工程梁理论</b>	(97)
4.1 基本假设与定义	(97)
4.2 正应力的求法	(98)
4.2.1 减缩系数	(98)
4.2.2 正应力的计算	(99)
4.3 剪流的求法	(104)
4.3.1 剪流的计算公式	(104)
4.3.2 开剖面剪流的计算	(106)
4.3.3 开剖面的剪心和弯心	(109)
4.3.4 单闭室剖面剪流的计算	(110)
4.3.5 多闭室剖面由弯曲和扭转引起的剪流	(116)
4.4 确定剖面弯心的一般方法	(123)
4.5 加筋锥形壳的计算	(124)
4.6 锥形机翼的计算	(130)
参考文献	(132)
习题	(132)
<b>第五章 板杆组合型加筋薄壁结构的计算</b>	(134)
5.1 定义与假设	(134)
5.2 加筋薄壁结构的理想化	(135)
5.3 杆和板的相互作用	(136)
5.3.1 具有等剖面杆的平面加筋板	(137)
5.3.2 具有等剖面杆且两端自由的平面加筋板	(141)
5.3.3 具有变剖面杆的平面加筋板	(142)
5.3.4 具有有限刚度横向加强件的加筋板	(144)
5.4 带纵向加强件的盒形梁	(147)
5.4.1 具有单长桁平直蒙皮的盒式梁	(148)
5.4.2 只有端部横向加强件的情况	(150)
5.4.3 具有几个隔板的盒式梁	(153)
5.5 限制弯曲与限制扭转	(157)
5.5.1 位移法	(159)

5.5.2 力的方法 .....	(168)
5.6 大开口结构 .....	(174)
5.6.1 开口壳体的扭转变形与基本假设 .....	(174)
5.6.2 系统的总势能和平衡方程 .....	(177)
5.6.3 正应力和剪流的计算 .....	(180)
5.6.4 具有有限自由度的大开口结构 .....	(189)
5.7 根部斜支持效应 .....	(197)
附录 变分法 .....	(201)
参考文献 .....	(207)
习题 .....	(207)

## 序 言

结构的主要功能在于支承和传递外载荷到反作用点。在土木工程中，地面基础与结构的连结点就是反作用点，但对在空中或太空航行的飞行器来说，反作用点的概念并不是必需的，而且如果需要，这些反作用点是可以根据具体情况人为地任意选取的。有时，设计和分析结构时，还要考虑已知温度环境和其它物理环境对结构的影响。

因此，在结构设计师看来，**结构**是一些用于传力的元件和构件的**综合**；不同的综合方式就形成了不同的**传力路线**。结构设计师的任务就是通过他的综合来实现他所希望的传力路线。虽然结构设计的最终目的是给出一个结构，即满足特定使用要求并受特定设计准则所支配的结构综合，而不是分析一个给定型式的结构，但为了尽可能完美地达到最终目的，对承受已知静力和动力载荷，位移约束、以及温度环境的给定结构进行分析，同样是必不可少的，也是结构设计师关心的重要方面之一。这里所说的结构设计师的含义是广义的，它既包括从事打样（草图设计）和细节设计的人员，也包括了结构分析（强度设计）人员。

在设计工作的一开始，人们总是凭借过去设计类似结构方面的经验，再加上比较简单的分析计算来设计结构的，有了具体的设计方案（图纸）以后，再对所设计的结构作详细的分析，检查它是否满足全部所必须满足的设计准则，如结构的强度和刚度要求，气动弹性力学要求，寿命和可靠性要求，等等。在用分析结果对原设计进行检验之后，对结构设计进行必要的修改。于是，再分析修改后的结构，并用分析结果重新检验，如此继续下去，直至得出满意的设计为止。一个理想的航空航天器结构应该是满足全部有关的设计准则而又重量最轻。当然，在按设计图纸制造成实际结构以后，还要进行一系列的验证性试验。

所设计的结构，可以只含一条单一的传力路线，也可以含多条传力路线。从安全性的角度看，传力路线愈多，结构也愈安全。这种结构如果其中有一条传力路线遭到破坏，结构仍能保持一定的传力功能，在术语中称这样的结构为“破损-安全”结构。真正的单一传力路线结构是极少见的，多数实际结构是多传力路线结构。当然，多传力路线结构的设计和分析比单一传力路线结构的要复杂和困难得多。

分析结构的目的是，一方面是为了了解结构在已知外载荷、位移约束以及温度环境下的变形和应力状态，检验它是否满足各种设计准则；另一方面，通过对结构的分析，还可以获知设计的结果是否与设计意图（即设计要求）相符。附加的也是十分重要的一项收获是，通过对分析结果的研究，可以了解并掌握各设计参数对结构各种响应（如位移、应力、固有频率等）的影响和敏感程度，从而，使设计者能在以后的设计中提高主动调节各种参数，以有效地达到预期设计目标的能力。

以上提到的各项分析内容，并不是结构力学这门课程能独立完成的。结构力学是（也仅仅是）一门研究结构在外载荷作用下的变形和受力（传力）规律的科学。它和材料力学、板壳学等相近学科一样，都是以弹性力学作为本门学科的基础的。这些不同但又相近的学科，它们之间的差异只是由于所研究对象的几何特征不同，在力学上的特征不同，因而，采用了不同的假设和前提，导致不同的分析方法。如前所述，在研究结构时，我们把结构看成是一

些受力元件和构件的综合，因此在结构力学中，我们总是用一个理想化的（不包含非受力件和无足轻重的受力件的）计算模型来替代真实的实际结构；计算模型应能最大程度地体现原来实际结构的重要力学特征。计算模型由具有已知弹性特性和几何特性的有限尺寸的理想化的受力元件组成，当这些元件按一定规则（如几何不变性和不可移动性的组成规则）组装在一起时，它们应能提供真实结构的静力和动力特性。在本课程中，我们只讨论静力学问题，并把相当一部分注意力放在研究力的传递问题上。

随着科学技术的飞速进步和已经取得的巨大成果，人们对飞行器提出了愈来愈高的要求，如操纵性和机动性、重量、寿命、可靠性、工艺性和经济性等。飞机结构的型式日趋复杂，新材料和新工艺不断涌现。这一切都要求结构分析方法具有更高的精确度和计算效率。于是，在这样的形势下，人们提出了许多（而且仍在不断涌现）高效率和高精度的分析方法。本课程的目的为学习更高深的结构分析方法打下必要的基础，但不涉及这些先进的分析方法本身。因此，希望在学习本课程时，一方面要注意掌握结构力学的基本理论、基本规律和几种分析结构的基本方法；另一方面要注意了解各种不同型式结构的传力特点、结构的各种设计参数对传力特性和传力路线的影响。有条件的话，若能掌握把实际结构理想化，使之成为合理的计算模型的能力，那就更好了。

我们相信，在已经具备这些基本知识和能力以后，再来学习和应用各种现代的先进的结构分析方法，将不会是一件困难的事。



# 第一章 结构分析中的能量方法

## 1.1 弹性力学的基本方程

为了确定结构在给定外载荷作用下的位移和应力分布, 必须用到弹性力学的基本方程, 即平衡方程、位移-应变方程、以及应变-应力方程。令  $u_x, u_y, u_z$  为弹性体中一点  $P(x, y, z)$  在坐标轴  $x, y, z$  方向的位移分量

$$\begin{aligned}u_x &= u_x(x, y, z) \\u_y &= u_y(x, y, z) \\u_z &= u_z(x, y, z)\end{aligned}\quad (1-1)$$

一般来说, 它们是位置  $P(x, y, z)$  的函数。又令  $P$  点的六个应变分量和六个应力分量分别为

$$e_{xx}, e_{yy}, e_{zz}, \gamma_{xy}, \gamma_{yz}, \gamma_{zx}$$

和

$$\sigma_{xx}, \sigma_{yy}, \sigma_{zz}, \tau_{xy}, \tau_{yz}, \tau_{zx}$$

于是, 位移-应变方程为

$$\begin{aligned}e_{xx} &= \partial u_x / \partial x, e_{yy} = \partial u_y / \partial y, e_{zz} = \partial u_z / \partial z \\ \gamma_{xy} &= \partial u_y / \partial x + \partial u_x / \partial y \\ \gamma_{yz} &= \partial u_z / \partial y + \partial u_y / \partial z \\ \gamma_{zx} &= \partial u_x / \partial z + \partial u_z / \partial x\end{aligned}\quad (1-2)$$

应变-应力方程为

$$\begin{aligned}\sigma_{xx} &= \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} [(1-\nu)e_{xx} + \nu(e_{yy} + e_{zz})] \\ \sigma_{yy} &= \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} [(1-\nu)e_{yy} + \nu(e_{xx} + e_{zz})] \\ \sigma_{zz} &= \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} [(1-\nu)e_{zz} + \nu(e_{xx} + e_{yy})] \\ \tau_{xy} &= \frac{E}{2(1+\nu)} \gamma_{xy} \\ \tau_{yz} &= \frac{E}{2(1+\nu)} \gamma_{yz} \\ \tau_{zx} &= \frac{E}{2(1+\nu)} \gamma_{zx}\end{aligned}\quad (1-3)$$

或者, 应力-应变方程为

$$e_{xx} = \frac{1}{E} [\sigma_{xx} - \nu(\sigma_{yy} + \sigma_{zz})]$$

$$\begin{aligned}
 e_{yy} &= \frac{1}{E}[\sigma_{yy} - \nu(\sigma_{xx} + \sigma_{zz})] \\
 e_{zz} &= \frac{1}{E}[\sigma_{zz} - \nu(\sigma_{xx} + \sigma_{yy})] \\
 \gamma_{xy} &= \frac{2(1+\nu)}{E}\tau_{xy} \\
 \gamma_{yz} &= \frac{2(1+\nu)}{E}\tau_{yz} \\
 \gamma_{zx} &= \frac{2(1+\nu)}{E}\tau_{zx}
 \end{aligned}
 \tag{1-4}$$

其中  $E$  为材料的弹性模量； $\nu$  为泊松比。

为了推导平衡方程，我们来研究图1-1所示矩形六面微体的平衡。作用在这微体上有3个正应力和6个剪应力，共9个应力分量。根据图1-1中矩形六面微体上所有力和力矩的平衡条件，不难证明有下列平衡方程：

$$\tau_{xy} = \tau_{yx}, \tau_{yz} = \tau_{zy}, \tau_{zx} = \tau_{xz} \tag{1-5a}$$

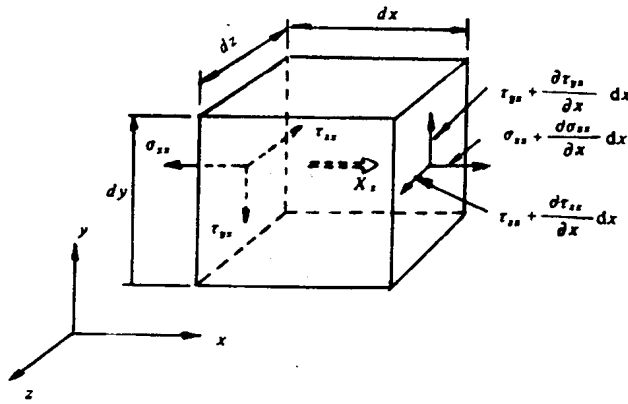


图 1-1 作用在矩形六面微体-对典型表面上的三个应力分量

并且

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} + X_x &= 0 \\
 \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} + X_y &= 0 \\
 \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} + X_z &= 0
 \end{aligned}
 \tag{1-5b}$$

其中  $X_i, i = x, y, z$  为体力在  $i$  方向的分量。在 (1-3)~(1-5) 式中，应力（和应变）分量各有两个下标，即  $\sigma_{ii}, \tau_{ij}(e_{ii}, \gamma_{ij}), i, j = x, y, z$ ；其中第一个下标  $i$  表示分量的方向，第二个下标  $j(i)$  表示分量所在的面的外向法线的方向。例如， $\tau_{yz}$  指外向法线的方向为  $z$  的那对表面上的指向  $y$  方向的应力分量。

在弹性体内的所有点上，平衡方程 (1-5) 均应满足。实际上，在方程 (1-3) 和 (1-4) 中，我们已经考虑了平衡条件 (1-5a)，所以在这两组方程中只有六个应力分量出现，相应地，应变分量也只有六个，但关系式  $\gamma_{ij} = \gamma_{ji}$  是由剪应变与位移的关系得出的。

在弹性体的表面上，弹性体内的应力则必须与作用在表面上的外载荷相平衡。如果用  $\phi_i (i = x, y, z)$  表示作用在弹性体单位表面面积上的外载荷在  $i$  方向的分量，则根据在弹性体在表面处的平衡条件，可以导出下述力的边界条件：

$$\begin{aligned} l\sigma_{xx} + m\tau_{xy} + n\tau_{xz} &= \phi_x \\ l\tau_{yx} + m\sigma_{yy} + n\tau_{yz} &= \phi_y \\ l\tau_{zx} + m\tau_{zy} + n\sigma_{zz} &= \phi_z \end{aligned} \quad (1-6)$$

其中  $l, m, n$  表示物体表面外向法线在  $x, y, z$  三个坐标方向的方向余弦。图 1-2 所表示的是边界上在  $x$  方向的力的平衡，即 (1-6) 式中的第一个方程。

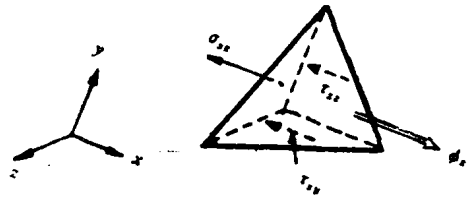


图 1-2 物体表面在  $x$  方向的平衡

表面力  $\phi_i$  和体力  $X_i$  (包括反作用力在内) 组成了自身平衡的载荷系统。一般来说，在载荷系统中除分布的  $\phi_i$  和  $X_i$  外，还包含有集中力  $P_i$  和集中力矩  $M_i$ 。因此，自身平衡的载荷系统必须满足下面六个总体平衡方程：

$$\begin{aligned} \int_S \phi_x dS + \int_V X_x dV + \sum_{i=1}^N P_{xi} &= 0 \\ \int_S \phi_y dS + \int_V X_y dV + \sum_{i=1}^N P_{yi} &= 0 \\ \int_S \phi_z dS + \int_V X_z dV + \sum_{i=1}^N P_{zi} &= 0 \end{aligned} \quad (1-7a)$$

$$\begin{aligned} \int_S (\phi_{zy} - \phi_{yz}) dS + \int_V (X_{zy} - X_{yz}) dV + \sum_{i=1}^M M_{xi} &= 0 \\ \int_S (\phi_{xz} - \phi_{zx}) dS + \int_V (X_{xz} - X_{zx}) dV + \sum_{i=1}^M M_{yi} &= 0 \\ \int_S (\phi_{yx} - \phi_{xy}) dS + \int_V (X_{yx} - X_{xy}) dV + \sum_{i=1}^M M_{zi} &= 0 \end{aligned} \quad (1-7b)$$

方程 (1-7a) 给出了所有外载荷在  $x, y$  和  $z$  方向的力的总和必须等于零的条件，而方程 (1-7b) 则给出了所有外载荷对  $x, y$  和  $z$  轴的力矩总和必须等于零的条件。

在求解结构力学问题时，可以用位移作为基本未知量，也可以用内 (应) 力作为基本未知量。如果用位移作为基本未知变量，在利用上述三组基本方程 (即位移-应变方程、应变-应力方程，以及平衡方程) 并考虑到结构的位移边界条件后，即可求得问题的解，而不需要其它附加方程。反之，如果以应力作为基本未知变量，为了保证解的单值性，还需要有附加方程。否则，就不可能从应力解得连续的位移。这附加方程就是协调方程。从位移-应变方程中消去位移  $u$ ，就可以得到六个协调方程

$$\frac{\partial^2 e_{xx}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 e_{yy}}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial y}$$

$$\frac{\partial^2 e_{yy}}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 e_{zz}}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 \gamma_{yz}}{\partial y \partial z}$$

$$\frac{\partial^2 e_{zz}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 e_{xx}}{\partial z^2} = \frac{\partial^2 \gamma_{zx}}{\partial z \partial x} \quad (1-8a)$$

$$\frac{\partial^2 e_{xx}}{\partial y \partial z} = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x} \left( -\frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x} + \frac{\partial \gamma_{zx}}{\partial y} + \frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z} \right)$$

$$\frac{\partial^2 e_{yy}}{\partial z \partial x} = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x} - \frac{\partial \gamma_{zx}}{\partial y} + \frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z} \right)$$

$$\frac{\partial^2 e_{zz}}{\partial x \partial y} = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x} + \frac{\partial \gamma_{zx}}{\partial y} - \frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z} \right) \quad (1-8b)$$

## 1.2 应变能和余应变能

结构元件受到逐渐增大的载荷  $P$  的作用，如图1-3所示。当元件因受载而伸长时，载荷  $P$  就作功。假设载荷的施加是非常缓慢的，同时在加载过程中没有热量的产生和消散，则按照能量守恒原理，载荷所作的功  $W$  就全部以应变能  $U$  的形式贮存在元件中。对于具有非线性弹性特征的元件，典型的载荷-位移曲线如图1-4所示。载荷  $P$  在它引起的位移  $u$  上所作的功  $W$  和相应的应变能  $U$  可以分别表示为

$$W = \int_0^u P du = \int_0^l A \sigma_{xx} e_{xx} dx = U \quad (1-9)$$

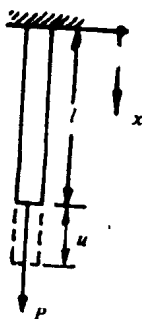


图 1-3 受简单拉伸的结构元件

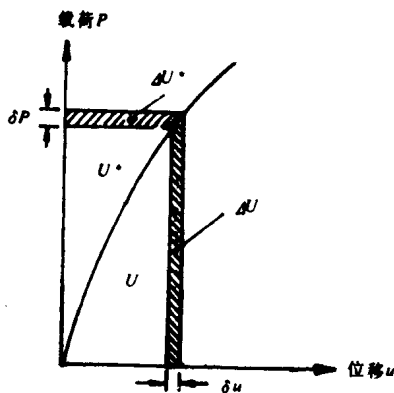


图 1-4 非线性弹性元件的载荷-位移曲线

其中  $A$  表示元件的横截面积； $l$  为元件长度；应变  $e_{xx} = du/dx$ 。图1-4中曲线下面的面积表示了  $U$  的大小。曲线上面的那部分面积用  $U^*$  表示。由分部积分，因为

$$\int_0^u P du = Pu - \int_0^P u dP$$

因此，显然有

$$U^* = Pu - \int_0^u P du = \int_0^P u dP \quad (1-10)$$

并称 $U^*$ 为余应变能。余应变能并无物理意义，它不过是纯粹为了使用上的方便而定义的一个数学量而已。但可证明，余应变能同样服从工程结构中的能量守恒原理，因而，通过它来建立一种能量方法供实际分析使用是正确的。

将(1-9)和(1-10)式分别对 $u$ 和 $P$ 微分，得

$$\frac{dU}{du} = P, \quad \frac{dU^*}{dP} = u \quad (1-11)$$

令图1-4中的载荷-位移曲线可表示为

$$P = au^n \text{ 或 } u = \left(\frac{P}{a}\right)^{1/n} \quad (1-12)$$

其中 $a$ 和 $n$ 是与材料有关的常数，于是

$$\begin{aligned} U &= \int_0^u P du = \frac{1}{n} \int_0^P \left(\frac{P}{a}\right)^{1/n} dP \\ U^* &= \int_0^P u dP = n \int_0^u au^n du \end{aligned} \quad (1-13)$$

因而

$$\begin{aligned} \frac{dU}{du} &= P, \quad \frac{dU}{dP} = \frac{1}{n} u \\ \frac{dU^*}{dP} &= u, \quad \frac{dU^*}{du} = nP \end{aligned} \quad (1-14)$$

当 $n=1$ 时（即在线弹性的情况下，这时常数 $a$ 与材料的弹性模量 $E$ 成正比），由(1-14)式，

$$\begin{aligned} \frac{dU}{du} &= \frac{dU^*}{du} = P \\ \frac{dU}{dP} &= \frac{dU^*}{dP} = u \end{aligned} \quad (1-15)$$

应变能和余应变能是完全可以互换的。从图1-4也可以清楚地看出，在线弹性的情况下，曲线退化为直线， $U$ 与 $U^*$ 相等。实际上，(1-15)式中的 $dU/dP = u$ 就是大家所熟知的卡氏第一定理，它只适用于线弹性（ $n=1$ ）的情况。正确的关系式应该是 $dU^*/dP = u$ ，它无论在线弹性或非线性弹性情况下都是适用的。

### 1.3 格林恒等式

令 $\phi$ ， $\psi$ 是坐标 $x$ ， $y$ ， $z$ 的任意函数，并在指定的积分空间内是连续的。考虑一微面积 $dS$ （图1-5），它在 $yz$ 平面上的投影为矩形 $dydz$ ，在其余两个平面上的投影分别为矩形 $dzdx$ 和 $dx dy$ 。这些矩形与 $dS$ 的关系可表示为

$$\begin{aligned} dydz &= dS \cos\theta_{\alpha x} = l dS \\ dzdx &= dS \cos\theta_{\alpha y} = m dS \\ dx dy &= dS \cos\theta_{\alpha z} = n dS \end{aligned} \quad (1-16)$$

其中 $\alpha$ 是 $dS$ 的外法线向量； $l$ ， $m$ ， $n$ 是 $\alpha$ 与 $x$ ， $y$ ， $z$ 轴相应的方向余弦。研究体积分

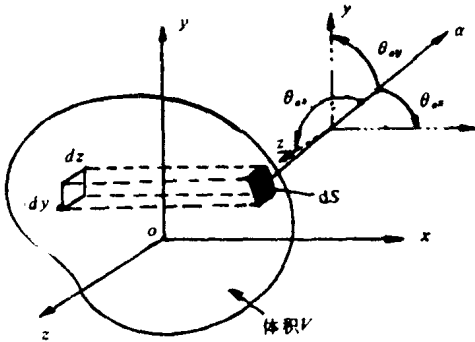


图 1-5 表面积 $dS$ 在 $yz$ 平面上的投影

$$I = \int_V \frac{\partial \phi}{\partial i} \frac{\partial \phi}{\partial i} dV, \quad i = x, y, z$$

利用分部积分

$$\begin{aligned} \int_V \frac{\partial \phi}{\partial x} \frac{\partial \phi}{\partial x} dx dy dz &= \int_S \phi \frac{\partial \phi}{\partial x} l dS \\ &- \int_S \int_S \phi \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} l dS dx \\ &= \int_S \phi \frac{\partial \phi}{\partial x} l dS - \int_V \phi \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} dV \end{aligned}$$

同理

$$\begin{aligned} \int_V \frac{\partial \phi}{\partial y} \frac{\partial \phi}{\partial y} dV &= \int_S \phi \frac{\partial \phi}{\partial y} m dS - \int_V \phi \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} dV \\ \int_V \frac{\partial \phi}{\partial z} \frac{\partial \phi}{\partial z} dV &= \int_S \phi \frac{\partial \phi}{\partial z} n dS - \int_V \phi \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} dV \end{aligned} \quad (1-17)$$

于是

$$\begin{aligned} I &= \int_V \left( \frac{\partial \phi}{\partial x} \frac{\partial \phi}{\partial x} + \frac{\partial \phi}{\partial y} \frac{\partial \phi}{\partial y} + \frac{\partial \phi}{\partial z} \frac{\partial \phi}{\partial z} \right) dV \\ &= \int_S \phi \left( \frac{\partial \phi}{\partial x} l + \frac{\partial \phi}{\partial y} m + \frac{\partial \phi}{\partial z} n \right) dS - \int_V \phi \nabla^2 \phi dV \end{aligned} \quad (1-18)$$

其中

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

是拉普拉斯算子，有时也可写成 $\Delta$ 或 $\nabla^2$ 。方程(1-18)就是格林第一恒等式的标准形式，下面我们将利用格林恒等式导出结构分析的能量定理。

#### 1.4 虚功原理 (虚位移原理)

弹性体在表面载荷 $\phi_i$ 和体力 $X_i$ 的作用下，产生弹性位移 $u_i$ ，应变 $e_{ij}(\gamma_{ij})$ 和应力 $\sigma_{ij}(\tau_{ij})$ ，它们分别满足位移-应变方程(1-2)，应变-应力方程(1-4)，以及平衡方程(1-5)，同时还满足力的边界条件(1-6)和协调方程(1-8)。在此平衡状态下，设想物体偏离平衡位形有一无限小的位移，称此无限小的偏离平衡位形的位移为假想位移或虚位移。对虚位移的要求是：它必须满足强加于实际位移 $u_i$ 上的任何运动学的边界条件，在弹性体内部(结构的边界内)必须是连续的，即虚位移引起的虚应变应满足协调方程。例如，倘若用 $\delta u_i$ 表示虚位移，则对于悬臂梁来说，在固持端必须有 $\delta u_y = 0$ ， $\delta \frac{\partial u_y}{\partial x} = 0$ 。但是，虚位移引起的虚应力 $\delta \sigma_{ij}(\delta \tau_{ij})$ 则并不要求它必须满足(用虚应变分量 $\delta e_{ij}$ ， $\delta \gamma_{ij}$ 表示的)平衡方程。结构力学中的虚位移这一术语，是从刚体力学中借用过来的。

将平衡方程(1-5b)分别乘以虚位移 $\delta u_x$ ， $\delta u_y$ 和 $\delta u_z$ ，并在结构的全部体积上积分，再将所得的三个积分式相加，即得

$$\begin{aligned}
& \int_V \left( \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} + X_x \right) \delta u_x dV \\
& + \int_V \left( \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} + X_y \right) \delta u_y dV \\
& + \int_V \left( \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} + X_z \right) \delta u_z dV = 0 \quad (1-19)
\end{aligned}$$

将上式中的真实应力 $\sigma_{ij}$ ,  $\tau_{ij}$ 作为格林恒等式(1-18)中的 $\phi$ , 将虚位移 $\delta u_i$ 作为(1-18)式中的 $\frac{\partial \phi}{\partial i}$ , 则由(1-18)式可将(1-19)式改写为

$$\begin{aligned}
& \int_S (\sigma_{xx}l + \tau_{xy}m + \tau_{xz}n) \delta u_x dS + \int_V X_x \delta u_x dV \\
& - \int_V \left( \sigma_{xx} \frac{\partial \delta u_x}{\partial x} + \tau_{xy} \frac{\partial \delta u_x}{\partial y} + \tau_{xz} \frac{\partial \delta u_x}{\partial z} \right) dV \\
& + \int_S (\tau_{yx}l + \sigma_{yy}m + \tau_{yz}n) \delta u_y dS + \int_V X_y \delta u_y dV \\
& - \int_V \left( \tau_{yx} \frac{\partial \delta u_y}{\partial x} + \sigma_{yy} \frac{\partial \delta u_y}{\partial y} + \tau_{yz} \frac{\partial \delta u_y}{\partial z} \right) dV \\
& + \int_S (\tau_{zx}l + \tau_{zy}m + \sigma_{zz}n) \delta u_z dS + \int_V X_z \delta u_z dV \\
& - \int_V \left( \tau_{zx} \frac{\partial \delta u_z}{\partial x} + \tau_{zy} \frac{\partial \delta u_z}{\partial y} + \sigma_{zz} \frac{\partial \delta u_z}{\partial z} \right) dV = 0 \quad (1-20)
\end{aligned}$$

考虑到 $\delta u_i$ 是连续函数, 力的边界条件(1-6), 以及 $\frac{\partial \delta u_i}{\partial j} = \delta \frac{\partial u_i}{\partial j}$ ,  $\tau_{ij} = \tau_{ji}$ , 等等, (1-20)式可以进一步改写成

$$\begin{aligned}
& \int_S (\phi_x \delta u_x + \phi_y \delta u_y + \phi_z \delta u_z) dS \\
& + \int_V (X_x \delta u_x + X_y \delta u_y + X_z \delta u_z) dV \\
& = \int_V (\sigma_{xx} \delta e_{xx} + \sigma_{yy} \delta e_{yy} + \sigma_{zz} \delta e_{zz} \\
& + \tau_{xy} \delta \gamma_{xy} + \tau_{yz} \delta \gamma_{yz} + \tau_{zx} \delta \gamma_{zx}) dV \quad (1-21)
\end{aligned}$$

于是

$$\delta W = \delta U \quad (1-22)$$

其中 $\delta W$ 是表面载荷 $\phi_i$ 和体力 $X_i$ 在虚位移 $\delta u_i$ 上所作虚功的总和;  $\delta U$ 则是满足与 $X$ 和 $\phi$ 的平衡条件的真实应力 $\sigma_{ij}$ ,  $\tau_{ij}$ 在虚应变 $\delta e_{ij}$ ,  $\delta \gamma_{ij}$ 上所作虚功的总和(即虚应变能)。方程(1-22)所表达的虚功原理, 可用文字阐述为: 任何从协调的变形状态 $u$ 出发的虚位移 $\delta u$ , 如果能使外力虚功 $\delta W$ 等于虚应变能 $\delta U$ , 则弹性结构在给定载荷作用下处于平衡状态。虚功原理因此又称为虚位移原理。

记

$$\delta V = \delta U - \delta W = \delta(U - W)$$

虚功原理就可以简洁地表示为

$$\delta V = 0$$

它隐含地表示  $V = U - W$  达到极值（最大或最小值）或达到驻立值。驻立值的含义是，当自变函数  $u(x, y, z)$  有微小变分时，泛函  $V$  的变分为零，即在自变函数有微小变化的区间内  $V$  的值无变化，但这时的  $V$  既不达到最大 ( $\delta^2 V < 0$ )，也不达到最小 ( $\delta^2 V < 0$ )。由 (1-19) 式可以看到，除位移  $u_x$  等等应满足协调条件和边界约束条件外，如果积分号后面圆括号中的总和等于零，即结构任一点处满足平衡条件，则  $\delta V = 0$  的条件一定能达到。因此，满足平衡条件是满足虚功条件的必要条件，或者说，满足虚功原理是结构平衡的必要条件。但是，结构的平衡可以是稳定的平衡 ( $\delta^2 V > 0$ )、不稳定的平衡 ( $\delta^2 V < 0$ ) 和随遇平衡 ( $\delta^2 V = 0$ )，因此，虚功原理并不是稳定平衡的充分条件。为了满足稳定的平衡，除虚功原理外，还应补充其它附加条件。

方程 (1-22) 所代表的虚功原理同样适用于几何非线性的情况，只要在计算应变能时采用非线性的（包括高价项的）位移-应变关系，并在变形后的结构位形上建立平衡方程就可以了。

### 1.5 最小势能原理

首先说明什么是势。图1-6表示一重物，离开地面的高度为  $h$ ，物体的重力为  $P$ （牛顿）。取地面为基准面，则重力相对地面具有势（或势能） $Ph$ 。在重物下降高度  $u$  后，势将相应减少  $Pu$ ，这部分减少的势能  $-Pu$  要作功并转化为其它形式的能量。我们把这概念推广。对任何广义力（例如一个或一组集中力、集中力矩、分布力，等等），在对应的广义位移上所作的功，就是该广义力的势能的减少量。

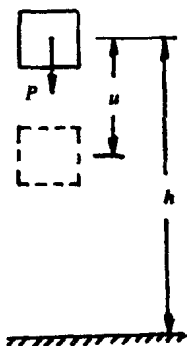


图 1-6 重力的势

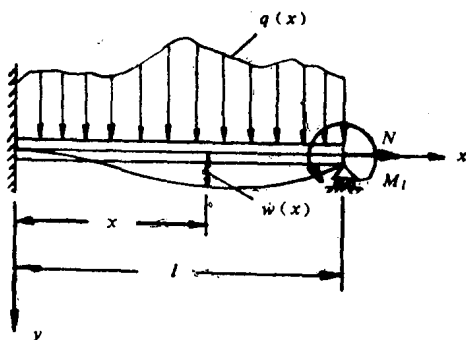


图 1-7 变剖面的梁

图1-7表示一变剖面的梁，受到分布载荷  $q(x)$  的作用。如果  $q(x) = q_0 \left( 1 + \frac{l}{x} - 2 \frac{x^2}{l^2} \right)$  其中  $q_0$  为任意常数，则只要  $q_0$  给定，任何  $x$  处的载荷集度  $q(x)$  也就确定，我们就称  $q(x)$  为一个广义力， $q_0$  即为广义力；如果  $q(x) = q_1 \left( 1 + \frac{x}{l} \right) + q_2 \left( \frac{x}{l} \right)^2$ ，则任一点  $x$  处的载荷集度



$q(x)$  的值取决于  $q_1$  和  $q_2$  两个独立的常数值, 因而  $q(x)$  为两个广义力, 其中  $q_1$  和  $q_2$  各为一个广义力。在  $q(x)$  为一个广义力的情况下, 例如  $q(x) = q_0 \left(1 - \frac{x}{l}\right)$ , 令梁的变形(挠度)为  $w(x)$ , 这时  $q(x)$  在  $w(x)$  上所作的功 (也就是  $q(x)$  的势能降) 为

$$\int_0^l q(x)w(x)dx = q_0 \int_0^l \left(1 - \frac{x}{l}\right)w(x)dx$$

于是, 积分

$$\int_0^l \left(1 - \frac{x}{l}\right)w(x)dx$$

为对应于广义力  $q_0$  的广义位移。

我们回到图1-7的变剖面梁, 并通过它来说明最小势能原理。该梁一端 ( $x=0$ ) 固支, 另一端 ( $x=l$ ) 简支, 受到轴力  $N$ , 端点集中力矩  $M_l$ , 以及分布横向载荷  $q(x)$  的作用。由材料力学可知, 梁的挠度  $w(x)$  应满足微分平衡方程

$$\frac{d^2}{dx^2} \left( EJ \frac{d^2 w}{dx^2} \right) - N \frac{d^2 w}{dx^2} = q \quad (1-23)$$

和边界条件

$$\text{在 } x=0 \text{ 处,} \quad w(0) = \left( \frac{dw}{dx} \right)_0 = 0 \quad (1-24)$$

$$\text{在 } x=l \text{ 处,} \quad w(l) = 0 \quad (1-25a)$$

$$\left( -EJ \frac{d^2 w}{dx^2} \right)_l = M_l \quad (1-25b)$$

如果挠度  $w(x)$  能满足(1-23)~(1-25)中的所有方程, 则  $w(x)$  以及由它导出的应变和应力就是问题的精确解; 如果  $w(x)$  只满足边界条件(1-24)和(1-25a), 但不一定满足平衡方程(1-23)和力的边界条件(1-25b), 则这样的挠度就称之为可能挠度。为了与可能挠度相区别, 下面用  $w^*(x)$  表示精确解(真实挠度)。

令  $\delta w^* = w - w^*$ 。既然可能挠度  $w(x)$  和真实挠度  $w^*(x)$  一样满足(1-24)和(1-25a), 显然有

$$\text{在 } x=0 \text{ 处,} \quad \delta w^*(x) = \delta \frac{dw^*(x)}{dx} = 0 \quad (1-26)$$

$$\text{在 } x=l \text{ 处,} \quad \delta w^*(l) = 0 \quad (1-27)$$

系统的总势能由四部分组成; 第一部分是梁的应变能

$$\Pi_b^2 = \frac{1}{2} \int_0^l EJ \left( \frac{d^2 w}{dx^2} \right)^2 dx \quad (1-28)$$

$\Pi$  的上标“2”表示泛函  $\Pi$  是自变函数  $w(x)$  的二次整式, 下标“b”表示  $\Pi$  与弯曲应变有关。第二部分是轴向拉力  $N$  的势能

$$\Pi_N^2 = \frac{1}{2} \int_0^l N \left( \frac{dw}{dx} \right)^2 dx \quad (1-29)$$

其中  $\frac{1}{2} \left( \frac{dw}{dx} \right)^2$  是由于梁的弯曲而引起的梁的缩短。第三部分则是分布横向载荷的势能