JINGJIANGJINGLIANJINGCE

学习快餐®

讲·练·测与最新教材同步使用

精讲精练精测

数学

初中三年级

（上册）

主编/黄兆芳
编者/梁春华
江　夏
赵　红
廖　芳

学习快餐，让我们学得更轻松！

★ 学习要点一目了然
★ 学习重点精讲精练
★ 学习难点各个击破
★ 学习效果及时检测

中国少年儿童出版社
南　方　出　版　社

学习快餐® 讲·练·测与最新教材同步使用

精讲精练精测

数学

初中三年级

（上册）

主编/黄兆芳

编者/梁春华

江　夏

赵　红

廖　芳

赵铁江

中国少年[illegible]出版社

南　方　出　版　社

图书在版编目(CIP)数据

初中三年级数学精讲精练精测，上册 / 黄兆芳主编. - 海口：南方出版社
北京：中国少年儿童出版社，2002.7(重印)
ISBN 7-80660-088-4
Ⅰ. 初… Ⅱ. 黄… Ⅲ. 数学课 - 初中 - 教学参考资料 Ⅳ. G634.603
中国版本图书馆 CIP 数据核字(2000)第 25252 号

学习快餐

初中三年级数学精讲精练精测(上册)

责任编辑：袁 伟
主 编：黄兆芳
编 者：梁春华 江 夏 赵 红
廖 芳 赵铁江

*

南方出版社
中国少年儿童出版社 出版发行

(海口市海府一横路19号华宇大厦1201室 邮编：570203
北京东四12条21号 邮编：100708)

新华书店经销 湖南省新华印刷一厂印刷

*

开本：787 × 1092 1/16 印张：6 字数：150 千字
2000 年 7 月第 1 版 2002 年 7 月第 3 次印刷
印数：70001-100000 册

ISBN 7-80660-088-4/G·63
定价：5.80 元

使 用 说 明

为了帮助初中学生正确理解数学概念、发展智力、培养能力，从而造就创造型人才，我们以教育部颁布的最新教学大纲和人民教育出版社 2001 年出版的最新教材为依据，对《学习快餐》中的初中数学重新进行了编写，旨在更加有利于贯彻党和国家的教育方针，更加有利于对青少年进行素质教育，更加有利于初中学生的全面发展，培养学生的创新精神和实践能力。

重新编写的这套初中数学除与最新教材同步外，还具有以下特点：

1. 内容新颖。全部为 2001 年的最新教材内容；在题型设计方面，尽量设计能力型和应用型试题。

2. 启迪性好。每个例题解答都有“分析”与“小结”。用以启迪思维，寻求解题的切入点，培养学生的思维能力与分析能力，切实掌握解题的思路和方法，进而有效地提高学生解决实际问题的能力和应变能力。

3. 针对性强。在内容的讲解上，准确把握新大纲和新教材所要求的尺度；在题型的选择上，既突出对学生创新意识和实践能力的培养，又兼顾基础知识、基本技能的掌握。因此，每节的练习题都设计了“基础过关”和“能力拓展”两套题，供学生选择使用。

我们由衷地希望这套书对广大初中生有所补益。

由于时间仓促，书中不妥之处在所难免，欢迎广大中学师生及社会各界朋友不吝赐教。

编　者

目　录

·代数部分·

第十二章　一元二次方程

12·1　一元二次方程

知识要点

1. 理解整式方程、一元二次方程的概念.

2. 掌握一元二次方程的一般形式，会把一元二次方程化为一般形式.

3. 准确找出一元二次方程中的二次项、一次项、常数项的系数.

重点　一元二次方程的概念与一般形式

难点　记住并理解二次项系数 $a\neq 0$ 的条件，以及这个条件在解题中的运用

精讲精练

一元二次方程是中学数学的主要内容之一，在初中数学中占有重要的地位，应当认真学好，为以后的学习创造有利条件.

〔例 1〕 把方程 $(x+\sqrt{x})(x-\sqrt{x})+(2x+1)^2=4x-5$ 化成一般形式，并写出它的二次项系数、一次项系数及常数项.

分析：本题目的在于考查对一元二次方程概念的理解，检验是否掌握了找一元二次方程中的二次项系数、一次项系数及常数项的方法.

解：去括号，得 $x^2-x+4x^2+4x+1=4x-5$

移项、合并同类项得 $5x^2-x+6=0$

方程的二次项系数是 5，一次项系数是 -1，常数项是 6.

小结：(1) 原方程容易造成不是整式方程，也不是一元二次方程的错觉，经过运算整理后得 $5x^2-x+6=0$，易知它是一元二次方程.(2) 在确定二次项、一次项系数和常数项时，必须将方程化成一般形式.(3) 系数包括字母前的符号.

〔例 2〕 下列关于 x 的方程中，一定是一元二次方程的是　(　　)

A. $ax^2+bx+c=0$　　B. $k^2x+5k+6=0$

C. $\sqrt{3}x^2-\frac{\sqrt{2}}{4}x-\frac{1}{2}=0$　　D. $5x^2+\frac{2}{x}-5=0$

解：A 中二次项 ax^2，a 是不是不为零，无法确定，所以不能确定该方程为一元二次方程.

B 方程显然不是关于 x 的一元二次方程.

C 方程是一个一元二次方程.

D 方程中分母含有未知数 x. 故不是整式方程，当然一定不是一元二次方程.

所以应选 C.

小结：解此题的关键是透彻理解 $ax^2+bx+c=0$ 为一元二次方程的前提是 $a\neq0$.

〔**例3**〕已知关于 x 的方程 $(k^2-1)x^2-2(k+1)x-3=0$，(1) 当 k 为何值时，它是一元二次方程；(2) 当 k 为何值时，它是一元一次方程.

解：(1) 欲使所给方程是一个一元二次方程．则其二次项系数不为零，即 $k^2-1\neq0$，即 $k\neq1$ 且 $k\neq-1$ 时，方程为一元二次方程.

(2) 欲使所给方程是一个一元一次方程，则其二次项系数为 0，且一次项系数不为 0，即当 $k^2-1=0$，且 $k+1\neq0$，所以当 $k=1$ 时，方程为一元一次方程.

〔**基础过关**〕

一、填空题：

1. $-3x^2=0$ 的一次项系数是____________，常数项是____________.

2. 把方程 $2x^2-x-1=x^2-1-x$ 化成一般形式是____________________________，二次项系数是____________，一次项系数是____________，常数项是____________.

3. 方程 $(3x-1)(2x+4)=1$ 化成一般形式为________________，其中二次项系数为____________，一次项系数为____________.

二、选择题：

1. 下列方程是一元二次方程的是 (　　)

A. $\frac{1}{2}x^2-3x+\frac{\sqrt{3}}{2}=0$　　B. $3x^2+4x-\frac{1}{x}=\frac{1}{x}$

C. $x^2-\frac{1}{x}-1=0$　　D. $\frac{1}{x^2+x-1}=2$

2. 方程 $mx^2+5x+n=0$ 一定是 (　　)

A. 一元二次方程　　B. 一元一次方程

C. 整式方程　　D. 以上结论都不对

三、把关于 x 的方程 $ax^2-x-\sqrt{2}x+\sqrt{3}x^2+b=c$（$a$ 为有理数）化成一般形式，并指出它的二次项系数，一次项系数及常数项.

〔**能力拓展**〕

一、填空题：

1. 已知关于 x 的方程 $(m-1)x^m+2x+4=2m-1$ 是一元二次方程，则 $m=$______.

2. 若关于 x 的方程 $(m-1)x^2-8mx-2m-3=0$ 不是一元二次方程，则 $m=$_______.

3. 若 $x^{m+1}+2x^2-3x-2=0$ 是关于 x 的一元二次方程，则 $m=$________________.

二、选择题：

1. 关于 x 的方程 $(m+1)x^2+2mx-3=0$ 是一元二次方程，则 m 的取值范围是 (　　)

A. 任意实数　　B. $m\neq-1$　　C. $m>1$　　D. $m>0$

2. 关于 x 的方程 $(m^2-m-2)x^2+mx+n=0$ 是一元二次方程的条件是 (　　)

A. $m\neq-1$　　B. $m\neq2$

C. $m\neq-1$，且 $m\neq2$　　D. $m\neq-1$ 或 $m\neq2$

三、若 $x^{2a+b}-2x^{a-b}+3=0$ 是关于 x 的一元二次方程，求 a、b 的值.

四、设 a 是二次项系数，b 是一次项系数，c 是常数项. 根据下列条件写出关于 x 的一元二次方程.（1）$\begin{cases}a+b=0\\b+c=-3\\c+a=-1\end{cases}$　（2）$\sqrt{a-1}+(b-2)^2+|a+b+c|=0$

12·2　用公式解一元二次方程

知识要点

1. 用直接开平方法解一元二次方程，会用直接开平方法解形如 $(x-a)^2=b$（$b\geq0$）的方程.

2. 掌握用配方法解一元二次方程，会用配方法解数字系数的一元二次方程.

3. 掌握一元二次方程的求根公式的推导，运用求根公式解一元二次方程.

重点　一元二次方程的三种解法

难点　配方法

精讲精练

掌握一元二次方程的三种解法. 根据方程的特点，灵活选择适当的解法. 其中公式法是解一元二次方程的通法，要切实掌握，配方法是一种重要方法，应用广泛，一定要熟练掌握.

〔例 1〕解方程 $9(x-3)^2=225$

分析： 先将方程化成 $(x-a)^2=b$（$b\geq0$）的形式，再用直接开平方法解.

解： 方程两边同除以 9，得

$$(x-3)^2=\frac{225}{9}$$

两边开平方得　$x-3=\pm\frac{15}{3}$

即　$x-3=5$ 或 $x-3=-5$

∴　$x=8$ 或 $x=-2$

〔例 2〕用配方法解方程 $3x^2-6x=1$

解： 方程两边同除以 3，得 $x^2-2x=\frac{1}{3}$

配方，得　$x^2-2x+1^2=\frac{1}{3}+1^2$

即　$(x-1)^2=\frac{4}{3}$

解这个方程，得 $x-1=\pm\frac{2\sqrt{3}}{3}$

∴　$x_1=1+\frac{2\sqrt{3}}{3}$，$x_2=1-\frac{2\sqrt{3}}{3}$

小结： 用配方法解一元二次方程的一般步骤：

①方程两边同除以二次项的系数

②移项，把常数项移到方程右边

③配方，将方程左边配成完全平方式

④直接开平方求方程的根.

〔例 3〕用配方法解方程 $x^2-3x-1=0$

解：移项，得 $x^2-3x=1$

配方，得 $x^2-3x+(-\frac{3}{2})^2=1+(-\frac{3}{2})^2$

整理，得 $(x-\frac{3}{2})^2=1+\frac{9}{4}$

解这个方程，得

$x-\frac{3}{2}=\pm\frac{\sqrt{13}}{2}$

即 $x_1=\frac{3}{2}+\frac{\sqrt{13}}{2}$，$x_2=\frac{3}{2}-\frac{\sqrt{13}}{2}$

〔例 4〕用配方法解关于 t 的方程 $t^2+pt+q=0$

解：移项，得 $t^2+pt=-q$

配方，得 $t^2+pt+(\frac{p}{2})^2=-q+(\frac{p}{2})^2$

整理，得 $(t+\frac{p}{2})^2=\frac{p^2-4q}{4}$

①当 $p^2-4q\geqslant 0$ 时，解方程，得

$t+\frac{p}{2}=\pm\frac{\sqrt{p^2-4q}}{2}$

$\therefore\quad t_1=\frac{-p+\sqrt{p^2-4q}}{2}$，$t_2=\frac{-p-\sqrt{p^2-4q}}{2}$.

②当 $p^2-4q<0$ 时，方程右边为负数，方程在实数范围内无解.

〔例 5〕若 $|a|=2$，求关于 x 的方程 $(a-2)x^2+(a+4)x+6=0$ 的解.

分析：由 $|a|=2$ 得 $a=2$ 或 $a=-2$，因此对方程的次数进行讨论.

解：①当 $a=2$ 时，原方程变为 $6x+6=0$

解此方程，得 $x=-1$.

②当 $a=-2$ 时，原方程变为 $-4x^2+2x+6=0$

两边同除以 -4，得

$x^2-\frac{1}{2}x-\frac{3}{2}=0$

移项，得 $x^2-\frac{1}{2}x=\frac{3}{2}$

配方，得 $x^2-\frac{1}{2}x+(\frac{1}{4})^2=\frac{3}{2}+(\frac{1}{4})^2$

即 $(x-\frac{1}{4})^2=\frac{24+1}{16}$

$\therefore \quad x-\frac{1}{4}=\pm\frac{5}{4}$

$\therefore \quad x_1=\frac{3}{2} \qquad x_2=-1$

〔例 6〕用公式法解方程：$2x^2+\sqrt{2}x-30=0$

解： 这里 $a=2$，$b=\sqrt{2}$，$c=-30 \quad b^2-4ac=2+240=242$

$\therefore \quad x_1=\frac{-\sqrt{2}+11\sqrt{2}}{2\times 2}=\frac{10\sqrt{2}}{4}=\frac{5}{2}\sqrt{2}$

$x_2=\frac{-\sqrt{2}-11\sqrt{2}}{4}=-3\sqrt{2}$

〔例 7〕解方程：$(2y+1)^2-5(2y+1)+6=0$

分析： 此方程若采用展开整理成一个一元二次方程，然后再用配方法或求根公式来解，则较麻烦．我们可以把 $(2y+1)$ 看作新的未知数来解．

解： 这里 $a=1$，$b=-5$，$c=6$.

$b^2-4ac=(-5)^2-4\times 1\times 6=1>0$

$\therefore \quad 2y+1=\frac{-(-5)\pm\sqrt{1}}{2\times 1}$

即 $\quad 2y+1=\frac{+5\pm 1}{2}$

$\therefore \quad 2y+1=3$ 或 $2y+1=2$

$\therefore \quad y_1=1$，$y_2=\frac{1}{2}$

〔例 8〕解方程 $x^2+mx+2=mx^2+3x \ (m\neq 1)$

分析： 解含字母系数的方程时，必须将原方程进行整理，化成一般形式．明确各项的系数（要注意符号），然后在确定 $b^2-4ac\geqslant 0$ 的情况下将各项系数代入公式求根．

解： 原方程整理，得 $(m-1)x^2+(3-m)x-2=0$

这里，$a=m-1\neq 0, b=3-m, c=-2$

$\therefore \quad b^2-4ac=(3-m)^2-4(m-1)(-2)=(m+1)^2\geqslant 0$

$\therefore \quad x=\frac{-(3-m)\pm\sqrt{(m+1)^2}}{2(m-1)}=\frac{(m-3)\pm(m+1)}{2(m-1)}$

即 $\quad x_1=1, x_2=\frac{m-4}{2}$

〔例 9〕用配方法证明：无论 x 为何实数，代数式 $x^2-4x+4.5$ 的值不小于 $\frac{1}{2}$.

证明： $x^2-4x+4.5=x^2-4x+4+0.5=(x-2)^2+0.5$

$\because \quad (x-2)^2\geqslant 0 \quad \therefore \ (x-2)^2+0.5\geqslant 0.5$

故不论 x 为何实数，代数式 $x^2-4x+4.5$ 的值恒大于或等于 0.5.

即 $\quad x^2-4x+4.5$ 的值不小于 $\frac{1}{2}$.

〔基础过关〕

一、填空题：

1. 方程 $x^2=48$ 的解是__________；方程 $4(x-3)^2=225$ 的解是__________.

2. $x^2+3=28$ 的解是__________；$\frac{1}{2}(3x-1)^2-8=0$ 的解是__________.

3. 给下列各式配上适当的数，使其成为恒等式：

(1) x^2+5x+________ $=(x+$________$)^2$

(2) $x^2-\frac{1}{3}x+$________ $=(x-$________$)^2$

(3) $x^2+\frac{b}{a}x+$________ $=(x+$________$)^2$

二、选择题：

1. 下列方程中一定能用直接开平方法解的是 ( )

A. $(x-2)^2=-7$　　B. $(\sqrt{2}x+3)^2=10$

C. $2(x-5)^2+3=0$　　D. $x^2=m$（m 为实数）

2. 方程 $\frac{1}{3}y^2-y-4=0$ 左边配成一个完全平方后，所得方程是 ( )

A. $(y-\frac{3}{2})^2=\frac{38}{4}$　　B. $(y-\frac{3}{2})^2=-\frac{38}{4}$

C. $(y-\frac{3}{2})^2=\frac{57}{4}$　　D. $(y-\frac{3}{2})^2=-\frac{57}{4}$

3. 方程 $x^2+|x|=6$ 的解是 ( )

A. $x_1=-3, x_2=2$　　B. $x_1=3, x_2=-2$

C. $x_1=3, x_2=-3$　　D. $x_1=2, x_2=-2$

4. 如果分式 $\frac{x^2-4}{2x^2-5x+2}$ 的值是零，则 x 的值一定是 ( )

A. -2　　B. 2　　C. ±2　　D. 不等于 -2

三、解答题：

1. 用适当的方法解下列方程

(1) $2x^2-1=0$　　(2) $2x^2+6x=0$

(3) $2x^2+9x+3=0$　　(4) $(2x+1)^2-4(2x+1)+4=0$

2. 设 $y=2x^2-x-15$，当 x 为何值时，y 值为 0，当 x 为何值时，y 的值为 5.

3. x 是什么数时，多项式 $x^2-6x-16$ 的值与 $4+2x$ 的值互为相反数？

〔**能力拓展**〕

一、填空题：

1. 当 $x=$__________时，$\sqrt{x^2+3x}$ 与 $\sqrt{x+15}$ 既是最简根式又是同类根式.

2. 分式 $\frac{x^2-7x-8}{|x|-1}$ 的值是 0，则 $x=$__________.

3. 若 $|x^2-x-2|+|2x^2-3x-2|=0$，则 $x=$__________.

4. $x=$__________时，代数式 $3x^2-4x$ 与代数式 $-3x^2+3x-2$ 的值相等.

二、选择题：

1. 要使等式 $(m^2+m-6)x^2-(m-2)x+m=0$ 不是关于 x 的方程，则 m 应取的

值是 （　　）

A. $m=-3$　　B. $m=2$　　C. $m\neq 3$　　D. $m\neq 2$ 且 $m\neq 3$

2. 若代数式 $x(x-5)$ 与 $5(5-x)$ 的值相等，则 x 等于 （　　）

A. 5　　B. -5　　C. ± 5　　D. 无法确定

3. 已知关于 x 的方程 $(a^2-a-2)x^2+2x-1=0$ 是一元二次方程，则 a 的取值范围是 （　　）

A. $a\neq -1$　　B. $a\neq 2$　　C. $a\neq -1$ 或 $a\neq 2$　　D. $a\neq -1$ 且 $a\neq 2$

4. 若关于 x 的方程 $x^2-mx+2=0$ 与 $x^2-(m+1)x+m=0$ 有一个相同的实根，则 m 的值为 （　　）

A. 3　　B. 2　　C. 4　　D. -3

三、解答题：

1. x 是什么数时，代数式 $\dfrac{x^2+2\sqrt{3}x+3}{x^2-3}$ 的值等于 0？

2. 解关于 x 的方程 $3x^2+(9a-1)x-3a=0$.

3. 已知 $x^2-5xy+6y^2=0$，求 $x:y$ 的值.

4. 已知关于 x 的一元二次方程 $(m-\sqrt{2})x^2+3x+m^2-2=0$ 的一根是零，求 m 的值.

5. 已知 $x^2+6x+y^2-4y+13=0$，求 x^y 的值.

6. x 为何值时，代数式 $x^2-8x+12$ 的值等于零？x 为何值时，该代数式取最小值？

7. 用配方法证明：$8x^2-12x+5$ 的值恒大于零.

8. 用配方法证明：$2y-2y^2-1$ 的值恒小于零.

9. 若 a,b,c 是△ABC 的三条边，且 $a^2-6a+b^2-10c+c^2=8b-50$，判断这个三角形的形状.

10. 方程 $(1999x)^2-1998\times 2000x-1=0$ 的较大根是 γ，方程 $1998x^2-1999x+1=0$ 较小的根为 S，求 $\gamma-S$ 的值.

12·3　用因式分解法解一元二次方程

知识要点

1. 掌握因式分解法解一元二次方程的思想和方法.

2. 会用因式分解法解某些一元二次方程.

重点　用因式分解法解一元二次方程

难点　理解一元二次方程为什么可转化为两个一元一次方程来解

精讲精练

〔例 1〕解下列方程

(1) $-5x=\dfrac{1}{2}x^2$

(2) $(x+2)(x-3)=50$

分析：用因式分解法解一元二次方程时，如果右边不是 0，则应将右边的各项移到左边，

使右边为零，然后再将方程左边的式子进行因式分解.

解：(1) 原方程变形为$\frac{1}{2}x^2+5x=0$

即 $x^2+10x=0$

$x(x+10)=0$

$x=0$ 或 $x+10=0$

$\therefore\quad x_1=0\quad x_2=-10$

(2) 原方程变形为：

$x^2-x-6=50$

即 $x^2-x-56=0$

$(x-8)(x+7)=0$

$x-8=0$ 或 $x+7=0$

$\therefore\quad x_1=8\quad x_2=-7$

〔**例 2**〕解下列方程

(1) $(3x+1)(1-3x)=5(x-2)+11$

(2) $3(x-2)^2-x(x-2)=0$

(3) $4(x+3)^2=25(x-2)^2$

解：(1) 将原方程左右两边展开、合并同类项、移项后得

$9x^2+5x=0$

$x(9x+5)=0$

$x=0$ 或 $9x+5=0$

$\therefore x_1=0\qquad x_2=-\frac{5}{9}$

(2) 原方程右边已是 0，故对方程左边用提取公因式法分解因式，得

$(x-2)[3(x-2)-x]=0$

即 $(x-2)(2x-6)=0$

$x-2=0$ 或 $2x-6=0$

$\therefore\quad x_1=2\qquad x_2=3$

(3) 原方程变形为：$4(x+3)^2-25(x+2)^2=0$

用平方差公式分解因式. 得

$[2(x+3)+5(x-2)][2(x+3)-5(x-2)]=0$

即 $(7x-4)(-3x+16)=0$

$7x-4=0$ 或 $-3x+16=0$

$\therefore\quad x_1=\frac{4}{7}\qquad x_2=5\frac{1}{3}$

〔**例 3**〕用因式分解、开平方、公式三种方法解方程：

$(x-1)^2=\frac{1}{4}$

解法一：(用直接开平方法)

$x-1=\pm\frac{1}{2}$

$\therefore \quad x_1=\frac{3}{2}，x_2=\frac{1}{2}$

解法二：（用公式解）

原方程可变形为

$$x^2-2x+\frac{3}{4}=0$$

这里，$a=1$，$b=-2$，$c=\frac{3}{4}$

$$\therefore \quad x=\frac{-(-2)\pm\sqrt{(-2)^2-4\times\frac{3}{4}}}{2}=\frac{2\pm\sqrt{1}}{2}$$

$\therefore \quad x_1=\frac{3}{2}，x_2=\frac{1}{2}$

解法三：（用因式分解法）

原方程变形为

$$(x-1)^2-\left(\frac{1}{2}\right)^2=0$$

$$\left(x-1+\frac{1}{2}\right)\left(x-1-\frac{1}{2}\right)=0$$

$$\left(x-\frac{1}{2}\right)\left(x-\frac{3}{2}\right)=0$$

$$x-\frac{1}{2}=0 \qquad x-\frac{3}{2}=0$$

$\therefore \quad x_1=\frac{1}{2}，x_2=\frac{3}{2}$

〔基础过关〕

一、选择题：

1. 方程：$x^2-3=-3x$ 化为 $ax^2+bx+c=0$ 形式后，a、b、c 的值分别为（　　）

A. 0，-3，-3　　B. 1，-3，3　　C. 1，3，-3　　D. 1，-3，-3

2. 解方程 $3x^2+27=0$（　　）

A. $x=\pm3$　　B. $x=-3$　　C. 无实数根　　D. 以上都不对

3. 方程 $3x^2=0$ 和方程 $5x^2=5x$ 的解（　　）

A. 都是 $x=0$　　B. 有一个根相同，$x=0$

C. 都不相同　　D. 以上都不对

4. 解方程① $x^2-3=0$，② $9x^2-12x-1=0$，③ $12x^2+12=25x$，④ $2(5x-1)^2=3(5x-1)$ 较简便的方法是（　　）

A. 依次为：直接开平方法、配方法、公式法、因式分解法；

B. 依次为：因式分解法、公式法、配方法、直接开平方法；

C. ①用直接开平方法，②③用公式法，④用因式分解法；

D. ①用直接开平方法，②用公式法，③④用因式分解法.

二、用因式分解法解下列方程：

1. $7x^2-5x=2x^2+x$

2. $x^2+6x-7=0$

3. $x^2-5x=14$

4. $y(y+5)=24$

5. $(x-7)(x+3)+(x-1)(x+5)=102$

6. $x^2-ax+2bx-2ab=0$

三、解答题:

1. x 取什么值时,代数式 $x^2-8x+12$ 的值等于 -4.

2. x 取什么值时,代数式 $x^2-8x+12$ 等于 $-x$.

〔能力拓展〕

一、解下列关于 x 的方程:(字母系数不要求讨论)

1. $(x-a)^2=b(x^2-a^2)$

2. $x^2-2x+1-k(x^2-1)=0\ (k\neq 1)$

3. $(2x-a)^2=a(3a-4x)$

4. m 取什么值时,方程 $x^2-mx=6$ 有一根为 3

二、解方程

1. $x^3-3x^2-4x=0$

2. $(x^2+x)(x^2+x-2)=24$

3. 关于 x 的一元二次方程 $(mx+1)(x-m)+2-m=0$ 各项系数之和是 3,求这时方程的解.

4. $x^2-2|x|+1=0$

5. 已知 a、b、c 均为实数,且 $\sqrt{a^2-3a+2}+|b+1|+(c+3)^2=0$,求方程 $ax^2+bx+c=0$ 的根.

6. 方程 $(a-1)x^{2a^2+a-1}-5x=-6$ 是一元二次方程,则 a 为多少?

12·4 一元二次方程的根的判别式

知识要点

1. 理解一元二次方程的根的判别式的意义.

2. 会用判别式判定一元二次方程根的情况.

重点 一元二次方程根的判别式的意义,根的判别式定理及逆定理

难点 一元二次方程根的判别式的应用

精讲精练

用配方法可将任何一个一元二次方程 $ax^2+bx+c=0\ (a\neq 0)$ 变形为:$\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2=\frac{b^2-4ac}{4a^2}$

由于 $a\neq 0$ $\therefore$ $4a^2>0$

(1) 当 $b^2-4ac>0$ 时,方程有

$x_1=\dfrac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$，$x_2=\dfrac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$

这就是说方程有两个不相等的实数根.

(2) 当 $b^2-4ac=0$ 时，方程有 $x_1=x_2=-\dfrac{b}{2a}$

这就是说方程有两个相等的实数根.

(3) 当 $b^2-4ac<0$ 时，方程右边是一个负数，而方程左边的 $(x+\dfrac{b}{2a})^2$ 不可能是一个负数，因此方程没有实数根.

记 $\triangle=b^2-4ac$，则△的符号决定着方程根的情况. 即:

当 $\triangle>0$ 时，方程有两个不相等的实数根；当 $\triangle=0$ 时，方程有两个相等的实数根，当 $\triangle<0$ 时，方程没有实数根.

〔**例 1**〕不解方程，判别下列方程的根的情况

(1) $2x=\sqrt{5}\,(x^2+\dfrac{1}{5})$　　(2) $(x-5)(3x+1)=3$　　(3) $\dfrac{\sqrt{3}}{2}x^2+1=\dfrac{\sqrt{2}}{2}x$

分析：本题是考查一元二次方程根的判别，解题的关键是先将一元二次方程化成一般形式（即 $ax^2+bx+c=0$ 此处 $a\neq0$），易错处是忽视先将一元二次方程化成一般形式.

解：(1) 原方程可变形为 $\sqrt{5}x^2-2x+\dfrac{\sqrt{5}}{5}=0$

$\because$ $\triangle=(-2)^2-4\cdot\sqrt{5}\cdot\dfrac{\sqrt{5}}{5}=0$

$\therefore$ 原方程有两个相等的实根

(2) 原方程可变形为 $3x^2-14x-8=0$

$\because$ $\triangle=(-14)^2-4\times3\times(-8)=196+96>0$

$\therefore$ 原方程有两个不相等的实数根

(3) 原方程可变形为 $\sqrt{3}x^2-\sqrt{2}x+2=0$

$\because$ $\triangle=(-\sqrt{2})^2-4\sqrt{3}\times2=2-8\sqrt{3}<0$

$\therefore$ 原方程无实数根.

〔**例 2**〕m 为何值时，关于 x 的方程 $mx^2-(2m+1)x+m=0$

(1) 有两个不相等的实数根?　(2) 有两个相等的实数根?　(3) 没有实数根?

解：$\triangle=[-(2m+1)]^2-4\cdot m\cdot m=4m+1$

(1) 欲使方程有两个不相等的实数根

则　$\triangle>0$，且 $m\neq0$，由此得 $4m+1>0$ 且 $m\neq0$

$\therefore$ $m>-\dfrac{1}{4}$ 且 $m\neq0$

(2) 欲使方程有两个相等的实数根

则　$\triangle=0$ 且 $m\neq0$，即 $4m+1=0$，且 $m\neq0$

$\therefore$ $m=-\dfrac{1}{4}$

(3) 欲使方程无实数根

则　$\triangle<0$ 且 $m\neq0$，即 $4m+1<0$ 且 $m\neq0$

$\therefore \quad m < -\frac{1}{4}$

$\therefore$ 当 $m > -\frac{1}{4}$ 且 $m \neq 0$ 时，方程有两个不相等的实数根；当 $m = -\frac{1}{4}$ 时，方程有两个相等的实数根；当 $m < -\frac{1}{4}$ 时，方程无实数根.

小结：解此题注意两点：（1）判别式的符号，（2）二次项系数不为 0，特别是二次项系数不为 0 最容易忽视．切记不要出现这样的错误．

〔例 3〕 试证明不论 k 取何值，关于 x 的方程 $k^2x^2 - 4kx + k^2 + 8 = 0$ 都没有实数根.

分析：若方程中的二次项系数中含有字母时，则需对方程的次数进行讨论．

证明：（1）当 $k = 0$ 时，则 $k^2 = 0$，方程变为 $0 \cdot x^2 - 0x + 8 = 0$

$\therefore$ 方程无解，当然无实数根．

（2）当 $k \neq 0$ 时，$k^2 \neq 0$，方程为一元二次方程

$\triangle = (-4k)^2 - 4k(k^2+8)$

$= -4k^2(k^2+4) < 0$

$\therefore$ 方程没有实数根．

〔基础过关〕

一、填空题：

1．若方程 $kx^2 - 2(k+1)x + k = 0$ 有两个不相等的实数，则 k __________．

2．在 $2x - 2x^2 + 1 = 0$，$x^2 + 3 = 0$，$\sqrt{2}x^2 - \sqrt{2}x + 1 = 0$，$(x+1)^2 = (x+1)$ 中，有实根的方程是__________________．

3．一元二次方程 $ax^2 + bx + c = 0$，当 $c = 0$ 时，方程有______________的根．

4．方程 $mx^2 + 2x - m = 0$ 的根的判别式等于 8，则 $m =$ __________．

5．对于 $k \leqslant 9$ 的一切实数，可否判断关于 x 的方程 $(k-5)x^2 - 2(k-3)x + k = 0$ 有两个实数根？________________．

二、选择题：

1．在下列方程中，有两个不相等的实数根的方程是（　　）

A．$x^2 + 2x + 1 = 0$　　B．$3x^2 - x + 1 = 0$

C．$5x^2 + 2x - 7 = 0$　　D．$(x+1)(x+2) = 3x + 2$

2．一元二次方程 $2x(kx-4) - x^2 + 6 = 0$ 没有实数根，那么 k 的最小整数是（　　）

A．1　　B．2　　C．3　　D．4

3．关于 x 的方程 $m^2x^2 - 2mx + (m^2+3) = 0$ 的根的情况是（　　）

A．当 $m = 0$ 时，方程有两个相等的实数根　　B．当 $m \neq 0$ 时，方程没有实数根

C．不论 m 为何值，方程都没有实数根

D．当 $-1 < m < 1$ 时，方程有实数根

4．若关于 x 的方程 $kx^2 - 4x + 3 = 0$ 有实数根，则 k 的非负整数值为（　　）

A．0，1　　B．0，1，2　　C．1　　D．1，2，3

5．关于 x 的一元二次方程 $(a+c)x^2 + bx + \frac{a-c}{4} = 0$ 有两个相等的实数根，那么以 a、