高等学校教学用书

微积分学讲义

第一册

邝荣雨　薛宗慈　陈平尚　蒋　铎　李有兰　编

北京师范大学出版社

高等学校教学用书

微积分学讲义

第一册

邝荣雨　薛宗慈　陈平尚　蒋　铎　李有兰　编

北京师范大学出版社

高等学校教学用书

微积分学讲义

第一册

邝荣雨 薛宗慈 陈平尚 蒋铎 李有兰 编

*

北京师范大学出版社出版发行

新华书店总店科技发行所发行

中国科学院印刷厂印刷

开本：850×1168 1/32 印张：14.375 字数：354 千

1989 年 5 月 第 1 版 1990 年 3 月第 2 次印刷

印数：2 001—4 000

ISBN 7-303-00417-3/O·86

定价：3.60 元

内 容 提 要

本书分四册．第一册是一元与多元微积分初步；第二册是一元微积分的理论与方法；第三册是多元微积分理论与计算．这三册可作为数学系本科数学分析课程教材或教学参考书，最后一册为专册，它包含若干专题，供教学选用或课外参考．

本书是作者在总结最近几年来北京师范大学数学系本科数学分析课程教学改革的经验的基础上写成的．作者将现行数学分析课程的内容分为两个阶段(首先侧重概念、计算，进而侧重理论、方法)进行讲授，教学效果达到预期的目的．

出版说明

北京师范大学是一所具有八十多年历史的老学校，在学科建设和教学实践中积累了一定的经验，将它贯彻到教材中去无疑是有益的．为了加强教材建设．加强与兄弟院校的交流，我社约请北京师范大学数学和数学教育研究所所长严士健教授等组成教材编委会，研究编写出版一套教材．编委会在研究当前教学改革的新情况和过去的教学经验的基础上，同时参照原教育部 1984 年颁发的中学教师进修大纲，对教材的编写宗旨和要求进行认真地讨论．组织数学系有教学经验的教师进行编写，并且由编委等分工负责对书稿进行审订．

这套教材包括数学分析、解析几何、高等代数、概率论与数理统计、常微分方程、复变函数论、抽象代数基础、高等几何、微分几何、实变函数论与泛函分析、计算方法、理论力学以及高等数学（物理、天文、无线电等专业用）等．

这套教材文字通俗易懂、内容由浅入深、循序渐进，便于自学，科学系统性较强．每章有小结，每节（或几节）后配有习题．每章有总复习题，习题安排由易而难，层次清楚．书后附有习题答案或提示，以利于读者自学时检查自己的作业．

为了适应不同层次学校和人员的需要，书中有些内容加了“*”号，它相对独立，如因学时较少，可以删去．

这套教材可供高等师范院校本科生（或专科）、教育学院数学系、函授（数学专业）、在职中学教师进修等使用．

前　言

本讲义分四册出版，第一册是一元与多元微积分初步；第二册是一元微积分理论与方法；第三册是多元微积分理论与计算．这三册内容可作为数学系本科数学分析课程教材或教学参考书．最后一册为专册，它包含若干专题，供教学选用或课外参考．

编写本书最主要的想法是尝试把现行数学分析课程的内容分两阶段进行讲授，以期达到下述目的：

1．使学生的学习由易到难，首先侧重概念、计算，进而侧重理论、方法．例如第一册侧重极限、连续等概念和微分、积分的计算，第二册侧重实数域、级数、微积分理论和综合运用微积分方法．

2．便于相对集中内容与时间，强化训练，按不同要求提高学生单项和综合解题能力．例如把微分、积分学分为两段讲授，前段（第一册）着重训练学生的计算能力和初步解应用题的能力；后段（第二册）综合运用微积分的理论、方法着重训练学生的论证和估值能力．

通过教学实践我们认为以上安排是可行的，我们还要继续完善它．

本书的内容安排次序，教材处理以及某些定理所采用的证明方法与目前国内通用的数学分析教材不尽相同．例如一元微分学部分的前段（第一册）就不讲微分中值定理，直接利用连续函数性质证明函数单调性判别法并利用它解决导数的应用问题，到后段（第二册）才出现中值定理及其在理论、估值等各方面的应用．

本书配有较多的练习题，它们有一定的广度和深度．做一定数量并且具有一定难度的习题，是数学分析能力培养的重要一环．

本书除练习题外增设了思考题，其中不少题是教学经验的积累，它们对于深入理解某些概念和定理可能会有好处.

本书在内容、例题与习题的安排和选取上都有一定的“弹性”，以便适应读者的不同需要，对此我们在相应的地方都作了说明，请读者自己选择.

编写本书，做了些尝试，深感难度很大，自觉力不从心，错误和缺点必然存在，切望得到批评指正.

编写本书，参考了很多兄弟院校的教材和习题，受益匪浅，谨致谢意.

本书的前身是北京师大数学系82级、86级学生使用的讲义. 邝荣雨、薛宗慈在两届学生中试用过该讲义. 赵慈庚老师、董延闿老师曾提出过许多有指导性的修改意见. 孙永生老师经常鼓励和支持编者大胆进行试验. 陈公宁及参与试用过程的许多同志对原讲义提出了许多宝贵意见. 分析教研室不少同志都参与过对原讲义的讨论并提出了很多中肯的意见和看法. 在此我们谨向关心、帮助我们的老师和同事们表示感谢.

编　者　　1988.3. 北京师大数学系.

目　录

—1—

函数与极限

§1 函　　数

17 世纪是生产、技术、科学大发展的光辉年代．天文学对行星、地球轨道的研究；航海业对经纬度的研究；弹道学对抛射体的研究；机械制造对螺线、旋轮线、摆线的研究等等都促使数学必须研究运动．当时，人们把曲线理解为运动的几何形象，把变量之间的关系——函数理解为运动的数量形式．深通自然科学和数学的法国哲学家笛卡儿(Descartes. 1596—1650)从经纬制出发引入了坐标系，创立了用代数方法研究几何的崭新学科——解析几何，它美妙而和谐地把运动、曲线、函数溶和在一起，给 17 世纪以来数学的巨大进展奠定了基础．恩格斯对笛卡儿的革新思想给予很高的评价，他说："数学中的转折点是笛卡儿的变数．有了变数，运动进入了数学；有了变数，辩证法进入了数学，……"．

在 17、18 两个世纪的漫长岁月中，函数概念几乎占据了当时所有科学研究工作的中心位置，运动与曲线赋予函数的新鲜活力使它结下了累累果实，然而，透过披在它身上生动、直觉的外衣去认识它的本质在历史上却经过了一个相当艰苦的历程．

1673 年，莱布尼兹（Leibniz. 1646—1716）在一篇手稿中第一次用"函数"一词表示任何一个随着曲线上点的变动而变动的量，例如切线、法线、次切线的长度及纵坐标等，同时他又引进了"常量"、"变量"和"参变量"等概念．

被拉普拉斯（Laplace. 1749—1827）誉为 18 世纪后半叶全体数学家共同导师的欧拉（Euler. 1707—1783）对函数概念的描述也不能超越历史．他在 1748 年《无穷小分析引论》（这是世界上第一部以函数为基础的微积分教

科书)一书中写道："变量的函数是一个解析表达式，它是由这个变量和一些常量以任何方式组成的"．同时他又说函数就是"在 xy 平面上徒手画出来的曲线所表示的 y 与 x 之间的关系"．到了 1775 年，他在《微分学》中又写道："如果某些变量以这样一种方式依赖于另一些变量，即当后面这些变量变化时，前面的变量便随之变化，则称前面的变量为后面变量的函数"．欧拉用生动、直观然而是狭隘的语言描述的函数概念对后世的影响是深远的，尤其是他在 1734 年引进的函数记号 $f(x)$ 一直沿用至今．

1797 年，拉格朗日（Lagrange．1736—1813）说："凡是能用幂级数表示的关系就称为函数"．

1807 年，付里叶（Fourier．1768—1830）又说："任何函数都可以表示成三角级数"．

总之，他们都把函数的数量表现形式当作了函数概念的本质．

直到 1834 年，罗巴契夫斯基（Лобачевский．1792—1856）才稍微接触到了函数的实质．他认为函数"这个一般概念，要求把那个对于每个 x 而给予的并随着 x 而逐渐变动的数称为 x 的函数．函数值则可能由解析表达式给出，也可能由一个条件给出，这个条件给出检验全部数并从其中选出一个数的方法．最后，函数的依赖关系可以存在但依然是未知的"．

到了 1837 年，狄利克雷（Dirichlet．1805—1859）用更明确简练的语言指出："对于在某区间上的每一个确定的 x 值，y 都有一个或多个确定的值，那么，y 叫做 x 的函数"．这才真正抓住了函数概念的本质是"对应规律"这个核心．因而这个定义直到目前仍然被有些教科书采用．

19 世纪 70 年代，康托（Cantor 1845—1918）创立了集合论．数学的抽象化、严格化程度逐渐提高，常常需要把具有某种共性的一堆东西当作一个整体看待并且研究它的共性和结构．数学研究的这种趋势使得集合论成为现代数学的基础并构成了它的通用语言．

1914 年，豪斯多夫（Hausdorff）用序对(序偶)(a, b) 构成的笛卡儿乘积集 $A\times B=\{(a,b)|a\in A, b\in B\}$ 较严格地刻划了函数，使得原来概念中未经定义的"对应规律"有了集合论的基础．但它却用到了"序"的概念．直到 1921 年，库拉托夫斯基（Kuratowski）用一种仅含两个元素的特殊形式的集合 $\{\{a\},\{a,b\}\}$ 来定义序对 (a,b)，这才使得函数概念真正建立在集合论的基础之上了．

1859年(清朝咸丰年间),在李善兰与维利叶(Wylie)合译的我国第一部微积分汉译本《代微积拾级》中,第一次将“function”译成“函数”,一直沿用到今天.

1.1 预备知识与记号

本文将使用一些术语与符号,用以精练我们的叙述.

任何学科都有它的理论体系,数学分析的理论体系的基石是**实数域**,记作 $\boldsymbol{R}$,并且约定:实数域中每个实数与数轴上的每个点有一一对应关系.因而也称 $\boldsymbol{R}$ 为**实直线**,其中元素既可称为**数**也可称为**点**.我们分别用符号 $\boldsymbol{N}$、$\boldsymbol{Z}$、$\boldsymbol{Q}$ 表示实数域的重要子集:自然数集、整数集、有理数集.

下面给出实数域中常用的一些术语与符号.

设 E 是实数域 $\boldsymbol{R}$ 的子集,如果存在一个实数 b(实数 a),对一切 $x\in E$,有 $x\leqslant b$ $(a\leqslant x)$ 成立,则称实数 b(实数 a)是 E 的一个**上界(下界)**.如果集 E 既有上界又有下界;则称 E 为**有界集**.

设 $a,\delta>0$ 是实数,称集合

$$U(a;\delta)=\{x\in\boldsymbol{R}\,|\,|x-a|<\delta\}$$

为点 a 的 δ-**邻域**.如果不特别注明半径 δ,可简记作 $U(a)$,并简称为点 a 的**邻域**.如果在点 a 的 δ-邻域中除掉 a 点,所得的集合

$$\mathring{U}(a;\delta)=U(a,\delta)\setminus\{a\}=\{x\in\boldsymbol{R}\,|\,0<|x-a|<\delta\}$$

称为点 a 的 δ-**空心邻域**.简称为点 a 的**空心邻域**.

实数域 $\boldsymbol{R}$ 中最基本最常见的一类子集就是所谓**区间**,有下面一些术语.

设 $a,b\in\boldsymbol{R}$.

称集合

$$[a,b]=\{x\in\boldsymbol{R}\,|\,a\leqslant x\leqslant b\}$$

为**有界闭区间**,简称为**闭区间**;

称集合

$$(a,b)=\{x\in \boldsymbol{R}|a<x<b\}$$

为**有界开区间**，简称为**开区间**；

称集合

$$(a,b]=\{x\in \boldsymbol{R}|a<x\leqslant b\} \text{ 与 } [a,b)=\{x\in \boldsymbol{R}|a\leqslant x<b\}$$

为**有界半开区间**．单点集 $\{a\}$ 也称为区间．以上五种集合统称为**有界区间**．

称集合

$$[a,+\infty)=\{x\in \boldsymbol{R}|x\geqslant a\} \text{ 与 } (-\infty,a]=\{x\in \boldsymbol{R}|x\leqslant a\}$$

为**无界闭区间**

称集合

$$(a,+\infty)=\{x\in \boldsymbol{R}|x>a\} \text{ 与 } (-\infty,a)=\{x\in \boldsymbol{R}|x<a\}$$

为**无界开区间**；又记 $\boldsymbol{R}=(-\infty,+\infty)$．以上五种集合统称为**无界区间**．以上十种有界与无界区间统称为**区间**．实数 a、b 称为区间的**端点**．

如果区间 I 包含端点，那么，去掉端点后余下的集合称为 I 的**内部**，记作 I°．例如，$[a,b]$、$[a,b)$、$(a,b]$ 的内部都是 (a,b)；如果区间 I 不含端点，那么，I 的内部 I° 就是 I 本身，即 $I^{\circ}=I$．例如 $(a,+\infty)$ 的内部是 $(a,+\infty)$，$\boldsymbol{R}^{\circ}=\boldsymbol{R}$．

下面介绍一些数理逻辑的符号，用来代替一部分语言叙述，使得书写更简练些．

逻辑符号分为两类．一类是所谓连接词符号，如符号“$\Rightarrow$”表示“若……则……”，即 $A\Rightarrow B$ 表示：若命题 A 成立，则命题 B 成立，此时也称 A 是 B 的充分条件，B 是 A 的必要条件．又如符号“$\Leftrightarrow$”表示“当且仅当”或“充分必要”．例如

$$|x-a|<\delta\Longleftrightarrow-\delta<x-a<\delta\Longleftrightarrow a-\delta<x<a+\delta,$$

于是

$$U(a;\delta)=(a-\delta,a+\delta),$$

另一类是所谓量词符号,即"$\forall$"和"$\exists$". 其中"$\forall x$"表示"所有 x"或"任何 x";而"$\exists x$"表示"存在 x"或"有 x". 在本书中,我们并不严格按照数理逻辑的要求使用它们, 只是把它们当作一部分语言的代用物,和普通语言混合起来使用. 以使读者获得鲜明简捷、重点突出的印象.

1.2 函数概念

考虑到读者对函数概念及一些常见函数的图形与性质已有一定的了解,我们将用复习,总结和适当提高的形式来讲述函数.

【定义】 设D是实数集,如果存在一个对应关系 f,对于D中每个实数 $x \in D$,都有唯一的实数 $y \in \mathbf{R}$ 与之对应,则称 **f 是从 D 到 $\mathbf{R}$ 的(一元数值)函数(映射)**记作

$$f:\ \mathbf{R} \supset D \to \mathbf{R},\ x \longmapsto y.$$

对应于 x 的实数 y 称为函数 f 在 x 的**值**, 记作 $y = f(x)$, 也称为 x 的**像**, 实数集D称为函数 f 的**定义域**, 实数集 $f(D) = \{f(x) \mid x \in D\}$ 称为函数 f 的**值域**,也称为集D的**像**.

我们常常把函数简记作

$$y = f(x),\ (x \in D)$$

并习惯地称 x 为**自变量**, y 为**因变量**.

【定义】 从自然数集 $\mathbf{N}$ 到实数域 $\mathbf{R}$ 的函数称为**数列**, 记作$\{x_n\}$,即

$$\{x_n\}:\ \mathbf{N} \to \mathbf{R},\ n \longmapsto x_n.$$

对应于自变量 $n \in \mathbf{N}$ 的函数值 x_n 称为数列的**通项**.

通常我们习惯地把数列 $\{x_n\}$ 值域中的数按自然数 n 的递增次序排成一列

$$x_1,\ x_2,\ \cdots,\ x_n,\ \cdots$$

并用它来表示数列,一般函数的数值是不可能做到这一点的.

关于函数,我们讨论下面一些问题.

(1) 构成函数概念有两个要素：定义域D和对应关系 f. 这就是说，两个函数 f 与 g 当且仅当它们的定义域相同并且对应关系也相同时才叫这两个**函数相等**，此时记作 $f=g$. 因此，当使用形如"$y=f(x)(x\in D)$"的函数记号时，切莫把标志定义域的记号"$x\in D$"忘掉. 例如，函数

$$y=x^2,(-\infty<x<+\infty) \quad 与 \quad y=x^2,(0\leqslant x<+\infty)$$

是两个不同的函数.

在函数概念中，读者一定要认识函数 f 与函数值 $f(x)$ 之间的区别，前者是抽象的对应关系(对应法则)，后者是具体的数. 以前的微积分教材常常不区分它们，而现代分析学则把它们严格分开. 本书充分注意到这种差别，尤其在多元微积分部分更是如此，不过在不致引起混淆的情况下，我们也常常习惯地说："函数 $f(x)$"，"数列 x_n"，"y 是 x 的函数"等等.

定义在同一集合D上的两个函数 f 与 g 可以进行四则运算，也可以进行比较. 我们把 f 与 g 进行加、减、乘、除所得到的函数记作

$$f+g、f-g、fg、f/g.$$

若对一切 $x\in D$，有 $f(x)\leqslant g(x)$，则记作 $f\leqslant g$. 在给定问题中，研究同一定义域上多个函数之间的关系时，我们常常使用这些简写记号.

(2) 我们在中学已经知道公式法是一种重要的函数表示方法，但它的含义是不够确切的，一般认为它是用各种数学运算组合起来的解析式子表示函数的方法，这时，它的定义域是指使得公式有意义的所有自变量的集合，通常称为**自然定义域**，有时，为了书写简练，常常省略它.

用公式法表示的函数中，最基本的有六种：常值函数 ($y=c$)，幂函数 ($y=x^a$)，指数函数 ($y=a^x$)，对数函数 ($y=\log_a x$)，三角函数 ($y=\sin x$，$y=\cos x$)，反三角函数 ($y=\arcsin x$，

$y=\arccos x$)．总称为**基本初等函数**，它们是整个函数大厦的基石，读者务必牢记它们的图象和性质．由它们经过有限次代数运算与复合运算(马上就要介绍函数复合的概念)得到的函数称为**初等函数**．它们是数学分析中最常见的函数．如果把不是初等函数的函数叫做**非初等函数**，那么，我们就把函数按照函数结构的差异进行了分类．也可以把函数按函数性质的差异进行分类，例如有单调函数类，周期函数类，有界函数类以及今后将要学到的连续函数类，可微函数类，可积函数类等等．还可以按照函数结构的简繁把函数进行分类，有所谓线性函数与非线性函数．请注意，我们称 $y=kx$ 为(一元)线性函数，称 $y=kx+b$ 为一次函数．对函数进行分类，把每一类函数当作一个整体并研究它的共性与结构是现代分析学用集合论思想研究函数的一种方法．

(3) 我们在中学还知道图示法也是一种重要的函数表示方法，但那时对函数图象的概念并没有确切叙述过，现在我们来做这个工作．

设函数 $y=f(x)$ 定义在实数集 D 上，自变量 x 与因变量 $f(x)$ 组成有序数对 $(x,f(x))$，当平面上建立直角坐标系以后，它就表示平面上一点，因此，很自然地把上述序对(序偶)的集合，即

$$G(f)=\{(x,f(x))\,|\,x\in D\subset \boldsymbol{R}\}$$

称为函数 f 的**图象(图形)**．

利用上述序对集的概念，可以较严格地定义函数．

任意给定两个集合 A,B，我们称集合

$$A\times B=\{(a,b)\,|\,a\in A,\ b\in B\}$$

为**笛卡儿乘积集**，简称为**卡氏集**．

设 D 是实数集，f 是卡氏集

$$D\times \boldsymbol{R}=\{(x,y)\,|\,x\in D\subset \boldsymbol{R},\ y\in \boldsymbol{R}\}$$

的子集，即 $f\subset D\times \boldsymbol{R}$，如果对每个 $x\in D$，存在唯一的 $y\in \boldsymbol{R}$，使得 $(x,y)\in f$，则称 f 是从 D 到 $\boldsymbol{R}$ 的(一元数值)函数．用卡氏集

定义函数，避免了原来定义中"对应关系"一词的不确切性，并且使函数与它的直观化—图象统一起来了.

函数(映射)还有另一种直观的表示，就是将映射 f 解释为把定义域 D 中每个 x 点变成值域 $f(D)$ 中唯一的 $y=f(x)$ 点的一种对应法则. 例如，常值函数

$$f:(-\infty,+\infty)\to \boldsymbol{R},\quad x\longmapsto y=f(x)=C$$

即

$$y=C,\quad (-\infty<x<+\infty)$$

的函数图与映射图如图 1.1 所示

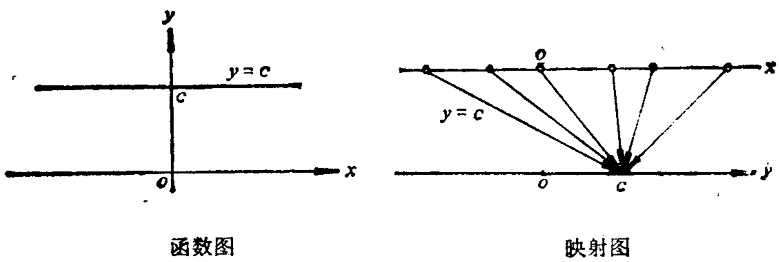

图 1.1

【例1】 设 $D=\{1,2,4\}\subset \boldsymbol{R}$

如果规定对应关系 $f: D\to \boldsymbol{R}$ 为

$$1\longmapsto 5,\ 2\longmapsto 6,\ 4\longmapsto 6,$$

那末对于 D 中每个数：1,2, 4 都有 $\boldsymbol{R}$ 中唯一的数与之对应，虽然 D 中有两个数2,4 都对应同一数 6，但这并不违背函数定义. 因此，f 是 D 上的函数，它的值域是

$$f(D)=\{5,6\}$$

请读者画出它的函数图与映射图.

如果规定对应关系 $g: D\to \boldsymbol{R}$ 为

$$1\longmapsto 5,\ 2\longmapsto 5,\ 4\longmapsto 5,\ 4\longmapsto 6$$

那末 D 中数 4 对应两个数(5 和 6)，这违背了函数定义中关于函数