职工高等工业专科学校教

高等数学解题指南

郑洪深 吴兰芳 丁鹤龄
郭思旭 文小西 杨芝馨 编

高等教育出版社

职工高等工业专科学校教学参考书

高等数学解题指南

郑洪深　吴兰芳　丁鹤龄
郭思旭　文小西　杨芝馨　编

高等教育出版社

内容提要

本书是参照原教育部1983年颁发的《职工高等工业专科学校高等数学教学大纲》(草案)、1982年颁发的《高等工业学校高等数学函授教学大纲》(草案)，主要为职工高等专科学校学生、兼顾函授高等工业学校、工科夜大学等学校的学生而编写的.

全书共分十章，主要内容为一元微积分与多元(二元、三元)微积分、常微分方程、矢量代数与空间解析几何、无穷级数等.

每章(节)包含两部分内容：内容提要、例题与解题指导. 章末附有自我检查题、自我检查题答案.

本书考虑到成人学习的特点，叙述比较详尽，对一些疑难点予以分析和说明，以期提高读者解题能力.

本书可供职工高等工业专科学校、函授高等工业学校、工科夜大学等校学生及自学者使用，也可供学习这方面内容的其他读者参考.

(京)112号

职工高等工业专科学校教学参考书

高等数学解题指南

郑洪深　吴兰芳　丁鹤龄
郭思旭　文小西　杨芝馨　编

*

高等教育出版社出版

新华书店总店北京科技发行所发行

河北省香河县印刷厂印装

*

开本 850×1168 1/32 印张15.25 字数 360 000

1991 年 5 月第 1 版　1992 年 8 月第 2 次印刷

印数 4 961—6 571

ISBN7-04-002673-2/O·1015

定价6.55元

前　言

本书是参照原教育部1983年颁发的《职工高等工业专科学校高等数学教学大纲(草案)》、1982年颁发的《高等工业学校高等数学函授教学大纲(草案)》，主要为职工高等专科学校学生、兼顾函授高等工业学校、工科夜大学等学校的学生而编写的.

全书共分十章，每章(节)主要包括两部分内容：

一、内容提要——主要叙述定义、定理、性质、公式等；

二、例题与解题指导——对典型例题进行分析、求解、证明、说明等.

各章末附有自我检查题及自我检查题答案.

本书考虑到成人学习的特点，叙述比较详尽，对一些疑难点予以分析和说明，以期提高读者的解题能力. 书中带有“*”号的内容，是供学有余力的读者选学的.

本书主编为郑洪深. 参加各章编写的：第一至第三章，郑洪深；第四至第五章，丁鹤龄；第六章，杨芝馨；第七章，文小西；第八至第九章，吴兰芳；第十章，郭思旭.

北京师范大学数学系邝荣雨副教授仔细审阅了全稿，并提出许多宝贵的意见，在此表示衷心感谢.

由于水平所限，书中谬误在所难免，恳请读者批评指正.

编者

1989年7月

目　录

第一章　函数与极限

第一节　函　　数

内 容 提 要

一、集合　一般可以把集合或集理解为具有某种共同属性的一些对象的全体，常用大写拉丁字母 $A, B, C\cdots$ 表示．组成一个集合的那些对象，叫做这个集合的**元素或元**，用小写拉丁字母 $a, b, c\cdots$ 表示．

若 a 是集合 A 的元素，则记作 $a\in A$，读作"a 属于 A"；若 a 不是集合 A 的元素，则记作 $a\overline{\in} A$，读作"a 不属于 A"．

设集合 A 是由具有某种性质 P 的元素组成的，这时常用如下的形式表示：

$$A=\{x \mid x \text{ 具有性质 } P\}.$$

例如满足不等式 $a\leqslant x\leqslant b$ 的所有 x 的集合 A 表示为

$$A=\{x \mid a\leqslant x\leqslant b\}.$$

不含任何元素的集合叫做空集，记作 $\varnothing$．

如果集合 A 中的每一个元素都属于集合 B，则 A 叫做 B 的**子集**，记作 $A\subset B$ 或 $B\supset A$，读作"A 含于 B"或"B 包含 A"．

如用 $\boldsymbol{R}$ 表示全体实集的集合，$\boldsymbol{Q}$ 表示全体有理数的集合，$\boldsymbol{Z}$ 表示全体整数的集合，$\boldsymbol{N}$ 表示全体自然数的集合，则它们之间具有如下的关系：

$$N\subset Z,\ Z\subset Q,\ Q\subset R.$$

说明 我们把满足不等式 $a\leqslant x\leqslant b$ 的实数 x 的全体称为闭区间,记作 $[a,b]$. 这样，闭区间 $[a,b]$ 可以看作集合 $\{x|a\leqslant x\leqslant b\}$. 类似地,区间 (a,b)，$(a,b]$，$(-\infty,+\infty)$ 分别可看作集合 $\{x|a<x<b\}$，$\{x|a<x\leqslant b\}$，R 等等. 有关集合的符号也可以应用到区间上.

二、绝对值 实数 a 的**绝对值**(记作 $|a|$)定义为

$$|a|=\begin{cases}a\ , & a\geqslant 0,\\ -a, & a<0.\end{cases}$$

绝对值的一些性质:

1) $-|a|\leqslant a\leqslant |a|$;

2) $|x|<\varepsilon\Leftrightarrow -\varepsilon<x<\varepsilon$ (符号"$\Leftrightarrow$" 表示由左边可推出右边,由右边可推出左边,即左、右两边是等价的);

3) $|x|>N\Leftrightarrow x>N$ 或 $x<-N$;

4) $|a+b|\leqslant|a|+|b|$(三角不等式);

5) $|ab|=|a||b|$;

6) $\left|\dfrac{a}{b}\right|=\dfrac{|a|}{|b|}(b\neq 0)$.

三、函数

1. 函数的定义 设有两个实数集 D,M，如果数集 D 中的任一数 x，按照一定的规律 f 与数集 M 中唯一的一个数 y 对应，则称 f 是定义在数集 D 上的**函数**. 这里 D 称为函数的**定义域**，与 D 中任一数 x 依规律 f 对应的 y 称为 f 在 x 的**函数值**,记作 $y=f(x)$, 习惯上,x 称为**自变量**,y 称为**因变量**. 在 x_0 处的函数值记作 $f(x_0)$ 或 $f(x)|_{x=x_0}$.

函数值的集合称为函数 f 的**值域**,记为 $f(D)$,即

$$f(D)=\{y|y=f(x),x\in D\}.$$

显然有 $f(D)\subset M$. 因为 $f(D)$ 中的任一数 y 必是 M 中的数.

在上述定义中，注意 f 与 $f(x)$ 是两个不同的概念，前者是函数，后者是函数值. 但在具体应用中，又常把 f 习惯写成 $f(x)$. 因此本书也把 $f(x)$（或 y）称为 x 的函数. 对于一个函数，其自变量与所选用的字母无关，如 $y=f(x)$ 与 $y=f(u)$ 均表示同一函数.

一般来说，我们用符号 $y=f(x)$，$x\in D$ 表示定义在 D 上的函数 f.

2. 函数的初等性质

(1) **周期函数** 设 $y=f(x)$ 是定义在 D 上的函数，如果存在正数 T，对于任一 $x\in D$，有 $x+T\in D$ 及

$$f(x+T)=f(x),$$

则称此函数为**周期函数**，通常把最小的正数 T 叫做函数的**周期**.

(2) **奇函数与偶函数** 设 $f(x)$ 是定义在对称于原点的数集 D 上的函数. 如果对于任意 $x\in D$，有 $-x\in D$，且

$$f(-x)=-f(x) \quad (\text{或 } f(-x)=f(x)),$$

则称 $f(x)$ 为**奇函数**（或**偶函数**）.

(3) **单调函数** 设 $f(x)$ 是定义在 D 上的函数. 如果对于任意 $x_1, x_2\in D$，且 $x_1<x_2$，有

$$f(x_1)<f(x_2) \ (\text{或 } f(x_1)>f(x_2)),$$

则称函数 $f(x)$ 在 D 上**严格单调增加**（或**严格单调减少**）.

当上述不等式改为

$$f(x_1)\leqslant f(x_2) \ (\text{或 } f(x_1)\geqslant f(x_2))$$

时，则称函数 $f(x)$ 在 D 上**单调增加**（或**单调减少**）.

函数 $f(x)$ 在 D 上严格单调增加、严格单调减少与单调增加、单调减少统称为函数 $f(x)$ 在 D 上**单调**. 严格单调增加与严格单调减少统称为**严格单调**. 如果 D 是区间，则称此区间为**单调区间**.

(4) **有界函数** 设 $f(x)$ 是定义在 D 上的函数. 如果存在常

数 M，对任意 $x\in D$，有

$$|f(x)|\leqslant M,$$

则称函数 $f(x)$ 在 D 上**有界**.

3. 反函数定义 设函数 $y=f(x), x\in D$，其值域为 $f(D)$. 如果对于任意 $y\in f(D)$，有唯一的一个 $x\in D$ 与之对应，使 $f(x)=y$，得到一个定义在 $f(D)$ 上的以 y 为自变量，x 为因变量的函数，记作 $x=f^{-1}(y)$，称为 $y=f(x)$ 的**反函数**. 而 $y=f(x)$ 称为**直接函数**.

上述反函数习惯写成 $y=f^{-1}(x)$.

直接函数 $y=f(x)$ 与其反函数 $y=f^{-1}(x)$ 的图形在同一坐标系中关于直线 $y=x$ 对称.

4. 复合函数 设函数 $y=f(u), u\in U$，函数 $u=\varphi(x)$，$x\in X$，其值域 $\varphi(X)\subset U$，则称

$$y=f[\varphi(x)]$$

为 $y=f(u)$ 与 $u=\varphi(x)$ 的**复合函数**，其中 u 叫做**中间变量**.

5. 初等函数 由基本初等函数（幂函数、指数函数、对数函数、三角函数和反三角函数）和常数经过有限次四则运算和有限次复合而成，并用一个解析式表示的函数叫做**初等函数**.

例题与解题指导

例 1 下列三个函数 $f(x), g(x), h(x)$ 中，哪两个函数是同一函数：

$$f(x)=x,\quad g(x)=|x|,\quad h(x)=\sqrt{x^2}.$$

分析 所谓两个函数是同一的函数，即指这两个函数有相同的定义域，且有相同的对应规律.

解 首先，所给三个函数的定义域都是 R.

其次，$|x|=\sqrt{x^2}$；而$|x|=\begin{cases}x, & x\geqslant 0,\\ -x, & x<0.\end{cases}$所以$|x|$与$\sqrt{x^2}$的对应规律相同；而$|x|$与$x$仅当$x\geqslant 0$时它们的对应规律才相同．因此$g(x)=|x|$与$h(x)=\sqrt{x^2}$是同一函数．

例 2 设$f(x+1)=x^2+3x+5$，求$f(x)$，$f(x-1)$．

解 令$x+1=t$，则$x=t-1$．于是

$$\begin{aligned}f(t)&=(t-1)^2+3(t-1)+5=t^2-2t+1+3t-3+5\\&=t^2+t+3.\end{aligned}$$

由于一个函数的自变量与所选用的字母无关，故将上式左、右两端的自变量t换成x，有

$$f(x)=x^2+x+3.$$

对上式的x换成$x-1$，得

$$f(x-1)=(x-1)^2+(x-1)+3=x^2-x+3.$$

例 3 设函数

$$f(x)=\begin{cases}-x, & x<-1,\\ 1, & |x|\leqslant 1,\\ x, & x>1.\end{cases}$$

(1) 求$f(x)$的定义域； (2) 证明$f(x)$是偶函数；

(3) 画出$f(x)$的图形．

解 (1) 函数$f(x)$的自变量的取值范围由

$$x<-1,\quad |x|\leqslant 1,\quad x>1$$

组成，它们就是所求函数的定义域，即实数集$\boldsymbol{R}$．

证 (2) 首先考虑对称区间$(-\infty,-1)$，$(1,+\infty)$．

若$x\in(-\infty,-1)$，则$-x\in(1,+\infty)$．

因此，当$x\in(-\infty,-1)$时，有$f(x)=-x$；当$-x\in(1,+\infty)$时，有$f(-x)=-x$．所以$f(x)=f(-x)$．

若$x\in(1,+\infty)$，则$-x\in(-\infty,-1)$．

因此，当 $x\in(1,+\infty)$时，有 $f(x)=x$；当$-x\in(-\infty,-1)$时，有 $f(-x)=-(-x)=x$. 所以 $f(x)=f(-x)$.

综上所述，在对称区间$(-\infty,\ -1)$，$(1,\ +\infty)$上，$f(x)=f(-x)$恒成立.

其次考虑对称区间$[-1,1]$.

当 $x\in[-1,1]$时，由于 $f(-x)=1$, $f(x)=1$, 所以

$$f(-x)=f(x).$$

可见，对任何 $x\in(-\infty,\ +\infty)$，均有 $f(-x)=f(x)$. 因此 $f(x)$是偶函数.

解 (3) 函数$f(x)$的图形当$x<-1$时为$y=-x$；当$-1\leqslant x\leqslant 1$时为$y=1$；当$x>1$时为$y=x$. 如图 1.1 所示.

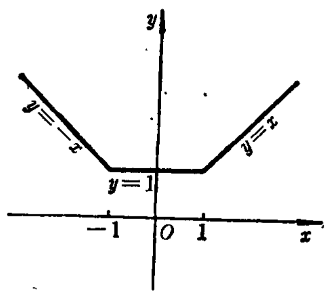

图 1.1

说明 由两个以上式子所表示的函数叫分段函数.

例 4 求下列函数的定义域：

(1) $y=\dfrac{1}{x^2+x+1}$；　　(2) $y=\dfrac{1}{\sqrt{x^2-3x+2}}$；

(3) $f(x)=\arcsin\dfrac{2x}{1+x}$.

分析 在本书中，函数是在实数范围内来讨论的. 因此，在求函数的定义域时，自变量只能取使函数有意义的实数值.

解 (1) 分母配方

$$y=\frac{1}{x^2+x+1}=\frac{1}{x^2+x+\left(\frac{1}{2}\right)^2-\left(\frac{1}{2}\right)^2+1}=\frac{1}{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}}.$$

可见，对一切实数 x，函数都有意义. 因此，所求函数的定义域是 $\boldsymbol{R}$.

说明 此题也可从分母的判别式 $\Delta=1^2-4\cdot1=-3<0$ 得知，没有任何实数 x 使分母为0．因而所求函数的定义域为一切实数 R.

(2) $y=\dfrac{1}{\sqrt{x^2-3x+2}}=\dfrac{1}{\sqrt{(x-2)(x-1)}}$.

在实数范围内，使分母有意义的是不等式

$$(x-2)(x-1)>0$$

成立的 x 值. 解此不等式，得

$$x<1 \quad \text{或} \quad x>2.$$

这就是所求函数的定义域.

(3) 根据反正弦函数的定义，满足下列不等式

$$-1\leqslant\frac{2x}{1+x}\leqslant1$$

的 x 值才使函数 $f(x)$ 有意义. 解此不等式组

$$\begin{cases}\dfrac{2x}{1+x}\leqslant1,\\[2mm] \dfrac{2x}{1+x}\geqslant-1.\end{cases}$$

由第一个不等式得

$$\frac{2x}{1+x}-1\leqslant0,\quad \frac{2x-(1+x)}{1+x}\leqslant0,\quad \frac{x-1}{1+x}\leqslant0.$$

它等价于 $(x-1)(1+x)<0$ 或 $x-1=0$. 由此得

$$-1<x\leqslant1. \qquad ①$$

由第二个不等式得

$$\frac{2x}{1+x}+1\geqslant0,\quad \frac{3x+1}{1+x}\geqslant0.$$

它等价于 $(3x+1)(1+x)>0$ 或 $3x+1=0$．由此得

$$x\geqslant-\frac{1}{3} \quad \text{或} \quad x<-1. \qquad ②$$

综合①、②，得所求函数的定义域为

$$-\frac{1}{3}\leqslant x\leqslant 1.$$

一般说来，在一个函数中，若含有偶次根式 $\sqrt[2n]{u(x)}$，则其定义域为使 $u(x)\geqslant 0$ 的 x 值，若含有分式$\frac{u(x)}{v(x)}$，则其定义域为使 $v(x)\neq 0$ 的 x 值；若含有对数式 $\log u(x)$，则其定义域为使 $u(x)>0$ 的 x 值；若含有反正弦 $\arcsin u(x)$（反余弦 $\arccos u(x)$），则其定义域为使 $|u(x)|\leqslant 1$ 的 x 值，等等.

例 5 设 $y=f(x)$的定义域是$(0,1]$，求 $f(x^2)$的定义域.

解 为醒目起见，我们可把 $f(x)$ 写成 $f(u)$. 由题设知

$$0<u\leqslant 1.$$

求 $f(x^2)$的定义域，即求复合函数 $y=f(u)$，$u=x^2$ 的定义域. 因此，由

$$0<u\leqslant 1,\ u=x^2 \quad 得 \quad 0<x^2\leqslant 1.$$

解得 $-1\leqslant x<0$ 或 $0<x\leqslant 1$，即$[-1,\ 0)$或$(0,\ 1]$为 $f(x^2)$ 的定义域.

例 6 已知 $y=\sin x$ 是以 2π 为周期的周期函数，证明 $A\sin(\omega x+\varphi)$ 是以$\frac{2\pi}{\omega}$为周期的周期函数，其中$A,\omega>0,\varphi$为常数.

分析 只要证明

$$A\sin\left[\omega\left(x+\frac{2\pi}{\omega}\right)+\varphi\right]=A\sin(\omega x+\varphi).$$

证 $A\sin\left[\omega\left(x+\frac{2\pi}{\omega}\right)+\varphi\right]=A\sin[(\omega x+\varphi)+2\pi].$

因为$\sin x$ 以 2π 为周期，所以

$$\sin[(\omega x+\varphi)+2\pi]=\sin(\omega x+\varphi).$$

因此 $A\sin\left[\omega\left(x+\frac{2\pi}{\omega}\right)+\varphi\right]=\sin(\omega x+\varphi)$. 这表明

$A\sin(\omega x+\varphi)$ 是以$\dfrac{2\pi}{\omega}$为周期的周期函数.

例 7 求函数 $y=a\sin\lambda t+b\cos\lambda t$ (常数 a, b, λ 均不为零)的周期.

分析 将所给函数化为 $A\sin(\omega x+\varphi)$的形式, 再利用例 6 的结论求解.

解 因为所给函数可化为

$$y=\sqrt{a^2+b^2}\left(\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\sin\lambda t+\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\cos\lambda t\right)$$

$$=\sqrt{a^2+b^2}(\cos\alpha\sin\lambda t+\sin\alpha\cos\lambda t)$$

$$=\sqrt{a^2+b^2}\sin(\lambda t+\alpha),\ \left(\alpha=\operatorname{arctg}\frac{b}{a}\right).$$

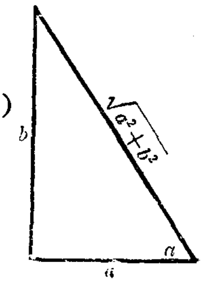

图 1.2

所以, 函数 y 的周期 $T=\dfrac{2\pi}{|\lambda|}$.

说明 上面关于 α, a, b 之间的关系式可由图 1.2 看出.

例 8 (1) 证明函数 $f(x)=\dfrac{1+x}{x}$在区间 $(0, +\infty)$ 内是严格单调减少函数;

(2) 设 $u(x)=\ln\dfrac{1-x}{1+x}$, 证明 $u(y)+u(z)=u\left(\dfrac{y+z}{1+yz}\right)$.

证 (1) 设 $x_1, x_2\in(0, +\infty)$, 且 $x_2>x_1$. 因为

$$f(x_2)-f(x_1)=\frac{1+x_2}{x_2}-\frac{1+x_1}{x_1}=\frac{x_1-x_2}{x_1x_2}.$$

由于 x_1, x_2 都大于 0, 故 $x_1x_2>0$, 且$x_1-x_2<0$, 所以

$$f(x_2)-f(x_1)<0, \text{即 } f(x_2)<f(x_1).$$

因此 $f(x)$在区间$(0, +\infty)$内是严格单调减少的.

(2) 因为 $u(y)+u(z)=\ln\dfrac{1-y}{1+y}+\ln\dfrac{1-z}{1+z}=\ln\dfrac{(1-y)(1-z)}{(1+y)(1+z)}$

$$=\ln\frac{1-y-z+yz}{1+y+z+yz}.$$

$$u\left(\frac{y+z}{1+yz}\right)=\ln\frac{1-\frac{y+z}{1+yz}}{1+\frac{y+z}{1+yz}}=\ln\frac{1+yz-y-z}{1+yz+y+z}.$$

所以

$$u(y)+u(z)=u\left(\frac{y+z}{1+yz}\right).$$

例 9 求函数 $y=\sqrt{x-1}$的反函数.

解 由$y=\sqrt{x-1}$得 $x=y^2+1$, 习惯写法为 $y=x^2+1$. 因为直接函数 $y=\sqrt{x-1}$的值域为$[0,+\infty)$, 它是反函数 $y=x^2+1$ 的定义域,故所求函数为

$$y=x^2+1 \quad (x\geqslant 0).$$

说明 不要从 $y=x^2+1$ 形式地误认为它的定义域是 $\mathbf{R}$. 实际上,根据反函数的定义,所求反函数的定义域就是直接函数 $y=\sqrt{x-1}$的值域.

第二节 极 限

内容提要

一、数列极限的定义 如果对于任意给定的正数 ε, 总存在一个正整数 N, 当 $n>N$ 时,恒有

$$|x_n-A|<\varepsilon,$$

则称数列$\{x_n\}$以常数 A 为极限,或说数列收敛于 A, 记作

$$\lim_{n\to\infty}x_n=A \quad 或 \quad x_n\to A(n\to\infty).$$

二、函数极限的定义

1. 如果对于任意给定的正数 ε, 总存在一个正数 δ, 当 $0<|x-x_0|<\delta$ 时,恒有

$$|f(x)-A|<\varepsilon,$$

则称常数 A 为函数 $f(x)$ 当 x 趋于 x_0 时的极限，记作

$$\lim_{x\to x_0} f(x)=A \quad 或 \quad f(x)\to A(x\to x_0).$$

特别当 $A=0$ 时，称 $f(x)$ 是当 $x\to x_0$ 时的**无穷小量**，或称当 $x\to x_0$ 时 $f(x)$ 是无穷小量.

有界函数与无穷小量的乘积是无穷小量.

如果 x 从 x_0 的左(右)侧趋于x_0时恒有 $|f(x)-A|<\varepsilon$，则称数 A 为函数 $f(x)$ 当 $x\to x_0$ 时的**左(右)极限**，记作

$$\lim_{x\to x_0-0} f(x)=A \text{ 或 } \lim_{x\to x_0-0} f(x)=f(x_0-0)$$

$$\left(\lim_{x\to x_0+0} f(x)=A \text{ 或 } \lim_{x\to x_0+0} f(x)=f(x_0+0)\right).$$

函数 $f(x)$ 的极限存在的充要条件是左、右极限存在而且相等.

2. 如果对于任意给定的正数 ε，总存在一个正数 G，当 $|x|>G$ 时，恒有

$$|f(x)-A|<\varepsilon,$$

则称 $f(x)$ 当 x 趋于无穷大时以 A 为**极限**，记作

$$\lim_{x\to\infty} f(x)=A \quad 或 \quad f(x)\to A(x\to\infty).$$

对于$f(x)$当 x 趋于负无穷大(或正无穷大)时以 A 为极限可类似地定义，分别记为

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=A \quad (\text{或} \lim_{x\to+\infty} f(x)=A).$$

3. 无穷大量　如果对于任意给定的正数 M，总存在正数 δ，当 $0<|x-x_0|<\delta$ 时，恒有

$$|f(x)|>M, \tag{1.1}$$

则称当 $x\to x_0$ 时，函数$f(x)$是**无穷大量**，记作

$$\lim_{x\to x_0} f(x)=\infty.$$