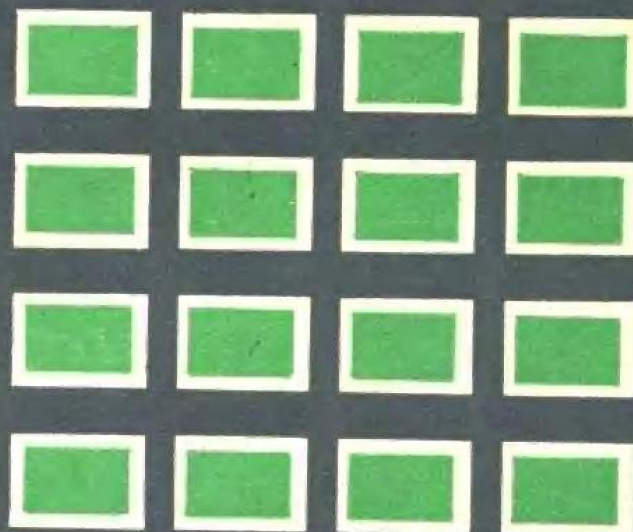




物理与工程问题中的 计算机解法

周士谔等 编著



成都电讯工程学院出版社

内 容 提 要

本书共分五章,第一、二章是常微分与偏微分方程的计算机解法;第三章介绍快速傅里叶变换,并列入了工程技术各个领域很有实用价值的最大熵谱分析法;第四章与第五章分别介绍蒙特卡洛(Monte Carlo)法与实验数据处理方法。各章均选有取自实际应用的一些例子与有关内容相配合。

本书可用作大专院校理、工科高年级学生或研究生的教材或参考书,也可供有关工程技术人员参考。

高等学校教学用书

物理与工程问题中的 计 算 机 解 法

周士谔等 编著

*

成都电讯工程学院出版社出版

成都师范学校印刷厂印刷

四川省新华书店经销

*

开本 787×1092 1/16 印张 8.75 字数 200千字

版次 1988年4月第一版 印次 1988年4月第一次印刷

印数 1—2500册

中国标准书号: ISBN 7—81016—036—2/0.2

(13452·2) 定价: 2.10元

前 言

在物理与工程问题中, 计算机的运用愈来愈普遍, 因此, 如何在物理与工程问题中引入计算机解法, 已成为高等理、工科院校教学中的一个重要课题, 本书正是针对这一需要而编写的。从高等理、工科课程安排上看, 一般先学计算机语言, 如《Basic》、《Fortran》等, 然后再学《计算方法》。本书从教学改革的角度尝试把这两部分内容揉合起来安排在同一门课程中, 这样做的好处, 一是把这两门课的学习直接与实际问题结合起来, 使读者对这两门课的内容掌握得更牢固; 二是精简了学时, 本书只相当于40学时的教学内容。本书的内容曾写成讲义在教学中试用过几次, 实践证明, 对没有学过《Fortran》语言课的学生来说也无多大困难。

本书主要用于本科高年级学生或研究生, 在内容上不求全, 目的是要发挥高年级学生具有自学能力这一特点。我们把《Fortran》语言简介放在附录中, 结合一个具体例子, 以表格形式把主要内容归纳出来。读者可以先学习这一部分内容, 然后在学习正文时, 结合具体程序反复练习巩固。至于细节部分, 可以参考其他书籍。对于已掌握了一定专业知识与自学能力的学生来说, 本书也可作为一本自学参考教材。对于需要掌握这部分知识的其他教学或工程技术人员, 也可供参考。

本书所选例子大部分都取自实际问题, 通过这些例子, 使读者了解计算机的具体应用。本书各章内容相对独立, 阅读或教学中, 次序可予更动。

由于各类计算机适用的《Fortran》语言稍有不同, 本书所附程序均注明了在何种机上运行。

本书由袁心平老师编写第二章第二、三节, 张世昌老师编写附录中《Fortran》简介部分, 其余部分由周士谔编写。研究生张国庆、封碧波、孙云卿、肖席珍等对部分程序进行了上机调试, 林为干教授对全书作了审核。在此一并表示感谢。

本书在很仓促的时间内编成, 错误在所难免, 希望读者批评指正。

周 士 谔

1987年8月于成都

目 录

第一章 常微分方程的计算机解法	1
§ 1.1 一阶常微分方程的数值解	1
(一) 物理与工程中相应的各类问题	1
(二) 欧拉(Euler)法与龙格-库塔(Runge kutta)法	3
(三) 阿达姆斯(Adams)法	6
§ 1.2 高阶常微分方程的数值解	8
(一) 非线性振动与计算机求解	8
(二) 常微分方程组的数值解	10
§ 1.3 常微分方程的特性与相应的物理过程	14
(一) 常微分方程数值解的收敛性与稳定性	14
(二) 微分方程解的特性与相应的物理过程	15
(三) 解的稳定性	18
§ 1.4 高分辨率作图法	19
(一) 微分-延时系统周期振荡的波形图	19
(二) 相图的计算机描绘	24
习题	29
第二章 偏微分方程的计算机解法	31
§ 2.1 偏微分方程的数值解法	31
(一) 相应的物理与工程中的问题	31
(二) 有限差分法	33
(三) 有限元法	35
§ 2.2 静电场泊松方程的有限差分解法	40
(一) 计算步骤	40
(二) 计算实例: 三芯矩形电缆的电位场	41
§ 2.3 用有限差分法求解波导中的场	46
(一) 亥姆霍兹(Helmholtz)方程的离散化	46
(二) 代数特征值问题的求解	48
习题	54
第三章 快速傅里叶变换	56
§ 3.1 基本原理	56
(一) 连续傅里叶变换	56
(二) 离散傅里叶变换	59
§ 3.2 快速傅里叶变换	61
(一) 快速傅里叶变换(F.F.T.)的基本原理	61
(二) F.F.T.计算步骤	63
(三) 功率谱的计算	67

§ 3.3 最大熵谱分析法	68
(一) 数字滤波基本概念	68
(二) 最大熵法	70
(三) 倍周期分岔系统的最大熵谱分析法	74
习题	81
第四章 蒙特卡洛方法	82
§ 4.1 基本原理	82
(一) 概论	82
(二) 伪随机数的产生	84
(三) 误差估计	86
§ 4.2 非线性方程组的蒙特卡洛解法	87
(一) 求解原理	87
(二) 多维自治系统的平衡解	88
§ 4.3 用蒙特卡洛法求多重积分	91
(一) 求积分的原理与方法	91
(二) 用蒙特卡洛法计算多重积分的例子	92
习题	93
第五章 实验数据处理	95
§ 5.1 误差理论与随机变量	95
(一) 随机变量的一些特征	95
(二) χ^2 、 t 及 F 分布	100
(三) 方差分析	105
§ 5.2 回归分析	108
(一) 基本原理	108
(二) 求回归直线的例子——株高与单株产量间的关系	110
(三) 多元线性回归	111
§ 5.3 多项式回归	114
习题	115
附 表	
附表1 正态分布表	116
附表2 χ^2 分布表	120
附表3 t 分布表	121
附表4 F 分布表	122
附表5 相关系数表	125
附录 FORTRAN语言简介	126
程 序 目 录	
程序1.1 欧拉法解一阶常微分方程	3
程序1.2 龙格-库塔法解一阶常微分方程	5
程序1.3 阿达姆斯(Adams)法解一阶常微分方程	7

程序1.4	龙格-库塔法解二阶常微分方程.....	11
程序1.5	微分-延时系统振荡波形的高分辨率作图.....	20
程序1.6	南海0520机高分辨率作图程序	23
程序1.7	用高分辨率作图法描绘范德波(Van der pol)方程的相图.....	26
程序2.1	用有限差分法解一类边值问题(矩形边界)的拉普拉斯(Laplace)方程.....	44
程序2.2	用有限差分方法解亥姆霍兹方程	50
程序3.1	F.F.T.时序数列频谱分析.....	65
程序3.2	最大熵谱分析法	76
程序4.1	均匀随机数的生成	84
程序4.2	高斯随机数列的产生	86
程序4.3	非线性方程组的蒙特卡洛(Monte Carlo)求解	89
程序4.4	蒙特卡洛(Monte Carlo)法求多重积分	92
程序5.1	均值、方差、标准差、误差的计算	99
程序5.2	χ^2 拟合优度检验正态分布	102
程序5.3	真值相等的 t 检验法	104
程序5.4	方差分析“相等”判断的 F 检验	106
程序5.5	一元线性回归法	110
程序5.6	二元性回归法	113

第一章 常微分方程的计算机解法

只含对一个变量求导数的方程称为常微分方程。这个变量较常见的是时间或空间。前者的解对应于系统随时间的变化过程，后者则对应于某些因变量的空间分布情况。对于数值解来说，我们还要知道初始条件或边界条件。例如：从系统的某一初始状态出发，求出系统随时间的演化；或者固定某物理量两端点的值，以了解该量在内部的分布情况。一维边值问题可以看下一章讨论的偏微分方程中的一个特例，所以本章只讨论前者。

本章选择的典型例子是非线性受迫振子的求解。选择这一例子的目的，一是因为非线性振动在物理与工程问题中是广泛存在着的普遍现象；二是这一例子比较全面地包含了常微分方程求解的一般过程。用计算机求解高阶常微分方程，一般都先化为一阶常微分方程组，一阶常微分方程的求解是高阶求解的基础，所以第一节先讨论一阶，第二节再讨论高阶。本书不讨论常微分方程的各种理论问题，但是，如果我们完全忽略了它，有时也会造成一些麻烦。例如从计算机里输出的一大堆数据反映了一个什么样的物理过程？这些数据的可靠程度如何？是否所有常微分方程都可套用同一模式求数值解？在第三节“常微分方程的特性”中扼要地讨论了有关的问题。用计算机作图是一种十分重要的手段，要形象地了解解的全貌，莫过于描绘出一张能反映解的特性的图形了。第四节中我们介绍了一种简便、清晰而有效的计算机高分辨率作图法，主要介绍 $x-v$ 相图的计算机描绘。其它如波形图、功率谱等作图方法都是类似的。

§ 1.1 一阶常微分方程的数值解

(一) 物理与工程中相应的各类问题

设自变量是时间 t ，并且假定导数 $\dot{y}$ 可以从方程 $F(\dot{y}, y, t) = 0$ 中解出

$$\dot{y} = f(y, t) \quad (1.1.1)$$

上述方程代表系统变量 y 的时间演化过程。若方程是线性的，则有

$$\dot{y} + f(t)y = g(t) \quad (1.1.2)$$

满足初值 $y_{t=0} = y_0$ 的解是

$$y = y_0 e^{-F} + e^{-F} \int_0^t g(t) e^F dt \quad (1.1.3)$$

式中 $F(t) = \int_0^t f(t) dt$ 。一般来说，一阶线性问题在数学以及与之相应的物理问题上均较清楚，且容易求解，我们主要讨论非线性的情况。

物理与工程中较多遇到的是

$$\dot{y} + f(y) = F(t) \quad (1.1.4)$$

其中 $f(y)$ 包含了非线性项。上述方程可以理解为质量极小、惯性力项可以忽略的弹簧振子，式右代表强迫力。“弹簧振子”的含义是广义的(参见第二节(一)段)，它也可以代表电的、光的甚至生物、生态等过程。例如，具有非线性电感的 LR 回路中，电流 I 满足的方程

$$\frac{dI}{dt} + \frac{R}{L}I + f(I) = \frac{E_0}{L} \sin \omega t \quad (1.1.5)$$

$f(I)$ 是由于 L 非线性引起的 I 的非线性项。对于具有非线性电容的受迫 RC 回路，电容两端的电压也可满足类似的方程。对于激光系统，可以导出光子数 n 满足下列方程

$$\dot{n} = -An - Bn^2 \quad (1.1.6)$$

很快可以看出， n 是依指数规律变化的。虽然 $\dot{n}=0$ 时， $n=0$ 是一个解，但是最后平衡点并不一定处在 $n=0$ 这一点，还要看系数 A 、 B 的情况。例如 $A=-1$ ， $B=1$ ， $n=0$ 是一个不稳定平衡点，系统最后处在 $n=1$ 的态上。这里 A 、 B 称为外参量，即外界条件控制着系统所处的状态(即激光的阈值条件)。态的变化，相当于相变。上式中如果非线性项是三次的，则有

$$\dot{y} = -k_1 y - k_2 y^3 \quad (1.1.7)$$

上述方程对应于激光系统处在阈值以上足够远处，其电场算符的期望值 $\langle E \rangle$ 所满足的方程。容易判断出当 $k_1 > 0$ ， $k_2 > 0$ 时，平衡点为 $y=0$ ；当 $k_1 < 0$ ， $k_2 > 0$ 时， $y=0$ 成为不稳定平衡点。稳定平衡点有两个： $y_{1,2} = \pm (k_1/k_2)^{1/2}$ ，究竟处在哪一个平衡点上，则要看初值。若 $y_0 > 0$ ，系统最后处在正方向平衡点，反之，则稳定在负向处。非线性系统的解在某些条件下，与所取初值有关，这是与线性系统完全不同的。

当自变量是空间坐标 x 时，与(1.1.1)式相对应的是物理量 y 的空间分布特性。典型的例子是一维运动的相迹。考虑下列非线性振子方程

$$\ddot{x} + 2\gamma \dot{x} + ax + bx^3 = 0 \quad (1.1.8)$$

令 $dx/dt=v$ ，消去时间变量 t 后，可得

$$\frac{dv}{dx} = -\frac{2\gamma v + ax + bx^3}{v} = f(v, x) \quad (1.1.9)$$

由上式可在 $x-v$ 图(称为相图)上描绘出一族曲线来，它们代表系统在不同参数与不同初值时的运动情况。非线性运动多数都没有解析解，相图是掌握其运动特征的一个十分重要的手段。在这里计算机就成为描绘相图的一种重要工具了。

在数值解及计算机运用上，一阶方程主要是作为解高阶方程的基础来讨论的。在物理与工程问题上也是如此，实用上主要是高阶，特别是与二阶常微分方程相联系的各种问题，在第二节中还要进一步讨论。

(二) 欧拉(Euler)法与龙格-库塔(Runge-Kutta)法

讨论常微分方程的数值解法，一般都从欧拉法出发，虽然因精度不高在实际问题中这一方法用得不多，但是，它却是了解数值解法中的一把钥匙。

假设图1.1中的那根曲线是从某初值 (t_0, y_0) 出发的方程(1.1.1)精确解中的一小段，从(1.1.1)式可以得出 (t_0, y_0) 点处的斜率为 $\dot{y}(t_0)=f(t_0, y_0)$ 。取 $t_1-t_0=h$ 为步长，从 (t_0, y_0) 点以 $\dot{y}(t_0)$ 为斜率作直线段至 (t_1, y_1) 点，显然， $y_1=y_0+hf(t_0, y_0)$ 。然后再以同样步长 h 从 (t_1, y_1) 点以 $\dot{y}(t_1)=f(t_1, y_1)$ 为斜率作直线段至 (t_2, y_2) 点，依次进行直到所需要的另一端为止，其中与 t_{n+1} 相应的是 $y_{n+1}=y_n+hf(t_n, y_n)$ 。

从图1.1中可以看出，所谓欧拉法实际上是用一段近似的折线来代替所需要的曲线。计算机本来也只能解出一些离散的近似值，问题是这样的解算偏差究竟有多大？在 t_n 点附近，我们把 $y(t)$ 用泰勒(Taylor)级数展开

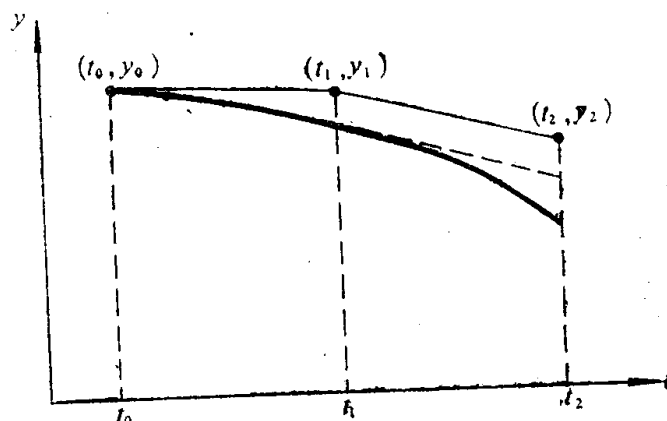


图 1.1 欧拉法数值解的示意图

$$y(t_n+h)=y(t_n)+h\dot{y}(t_n)+\frac{h^2}{2}\ddot{y}(t_n)+\dots \quad (1.1.10)$$

与 $y_{n+1}=y_n+hf(t_n, y_n)$ 比较可以看出，欧拉法只取了展开式中的一次项，把二次以上的高次项忽略了，我们用 $O(h^2)$ 代表被忽略了的余项值，称之为每一步的局部截断误差。显然这些误差是逐步积累的，我们还需要知道积累误差。在图1.1中我们从 (t_1, y_1) 点处的精确值引了一段与相应折线平行的虚线，很快就可以看出，积累误差是 $O(h^2)$ 的约两倍。如果到最后一步，我们一共走了 N 步，那么积累误差，或者叫总体截断误差大约是 $N \cdot O(h^2)$ ，相当于 h 的一次项 $O(h)$ 。这种分析虽然粗糙，但却可以得出有关误差的形象化概念。

作为第一个应用，我们试着用欧拉法对(1.1.7)式编制一个计算机程序，并作相应的解释。一阶常微分方程欧拉解法的Fortran计算机程序见程序1.1。

程序 1.1 欧拉法解一阶常微分方程 (Apple II 机上运行)

```

1: C      EULER' S METHOD FOR O.D.E..
2:      F(A, B, X)=A*X+B*X*X*X
3:      READ(3, 1) A, B, T, X, H
4: 1      FORMAT(1X, 5F7.4)
5:      WRITE(2, 2) T, X
6: 2      FORMAT(8X, 1HT, 8X, 1HX//5X, 1H(, F8.5, 3X, F8.5, 1H)///)
7: 3      DELT=H*F(A, B, X)
8:      X=X+DELT

```

```

9:      T=T+H
10:     C=X
11:     DELT=H*F(A, B, X)
12:     X=X+DELT
13:     T=T+H
14:     D=X
15:     E=ABS(C-D)
16:     WRITE(3, 11) T, X
17:     FORMAT(1X, 2F15.8)
18:     IF(E.GT.0.0008) GOTO 3
19:     WRITE(2, 5) T, X
20:     5   FORMAT(1X, 2F15.4)
21:     STOP
22:     END

```

[程序说明] :

左方“行”的标志是为便于解释说明另外加上去的(以下同),不是语句编号。第二行列出了(1.1.7)式中 $\dot{y}$ 表达式(程序中用 x 代替 y),其中 x^3 用连乘而未用幂指数表示,可节省运算时间。第3、4两行是输入说明符,由输入不同的 A 、 B 值经19、20行将终值 x 打印出来。例如 $A=1$, $B=-1$, $x_0=0.5$ 时,得 $x=0.9990$; $x_0=-0.5$ 时,得 $x=-0.9978$; $A=-1$ 时,得 $x=0$ 。终值由第10、14、15、18等行控制,使 x 值的变化小于0.0008时作为到达平衡点而终止运算。接近平衡点时, x 产生慢化现象,若终值的控制定得过小,将增加大量运算时间。慢化现象在计算机运算中经常出现,编制程序时应特别注意。第16、17行为解的屏幕显示,便于观察输出情况,及时调整程序或有关控制参数。

从(1.1.10)式可知,欧拉法实际上是在泰勒展开式中取一次项,其截断误差为 $O(h^2)$,总体截断误差为 $O(h)$,称为一阶方法。提高精度的方法,可在欧拉法的基础上提高截断误差的阶数,这类方法中有梯形法;预测-校正法等。我们主要介绍用得较多的龙格-库塔法。

设有微分方程 $y'=f(x, y)$,现由已解得前一点的 (x_n, y_n) 值来推算下一点的 y_{n+1} 值(称为单步法)。为此,将 y_{n+1} 依 h 在 $x=x_n$ 附近展开

$$y_{n+1} = y_n + hy'_n + \frac{h^2}{2} y''_n + \frac{h^3}{3!} y'''_n + \dots \quad (1.1.11)$$

$$y'_n = f(x_n, y_n)$$

$$\text{其中 } y''_n = \left[\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot f \right]_n \quad (1.1.12)$$

$$y'''_n = \left\{ \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + 2f \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} f^2 + \frac{\partial f}{\partial x} \cdot \frac{\partial f}{\partial y} + \left[\frac{\partial f}{\partial y} \right]^2 f \right\}_n$$

此外,也可写成

$$y_{n+1} = y_n + ahf(x_n, y_n) + bhf(x_n + a'h, y_n + b'\Delta y) \quad (1.1.13)$$

$$= y_n + a\Delta y + bhf(x_n + a'h, y_n + b'\Delta y)$$

在上式中令 $a=1, b=0$ 即得欧拉法。上式表明, y_{n+1} 的值并不单由 (x_n, y_n) 处的斜率来决定, 而是由前后两处综合起来考虑, 其中 a, b, a', b' 等为待定系数, 由上式作泰勒展开后与 (1.1.12) 式相比较后可定出。所需的精度依两泰勒展开式所取项数而定。由于推导较繁, 但并不难, 我们只介绍大致的方法。对于常用的四阶龙格-库塔法, 计算公式如下:

$$y_{n+1} = y_n + \frac{1}{6}(K_1 + 2K_2 + 2K_3 + K_4) \quad (1.1.14)$$

$$K_1 = hf(x_n, y_n) \quad (1.1.14a)$$

$$K_2 = hf(x_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{K_1}{2}) \quad (1.1.14b)$$

$$K_3 = hf(x_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{K_2}{2}) \quad (1.1.14c)$$

$$K_4 = hf(x_n + h, y_n + K_3) \quad (1.1.14d)$$

四阶龙格-库塔法的截断误差为 $O(h^5)$, 比欧拉法的精度高得多。现用该法重新解算 (1.1.7) 式, 取初值 $x_0 = 0.5$, 步长 $h = 0.05$, $A = 1, B = -1$ 。解算过程见程序 1.2。

程序 1.2 龙格-库塔法解一阶常微分方程 (Apple II 机上运行)

```

1: C      RUNGE-KUTTA METHOD
2:        DIMENSION C(2)
3:        F(X)=X-X*X*X
4:        READ(3, 1) X, H
5: 1       FORMAT(1X, 2F7.4)
6:        ISTEP=0
7: 2       DO 3 I=1, 2
8:         AK1=H*F(X)
9:         AK2=H*F(X+AK1/2)
10:        AK3=H*F(X+AK2/2)
11:        AK4=H*F(X+AK3)
12:        X=X+(AK1+2.0*AK2+2.0*AK3+AK4)/6.0
13:        ISTEP=1+ISTEP
14: 3       C(I)=X
15:        D=ABS(C(1)-C(2))
16:        WRITE(3, 10) C(1), C(2), X
17: 10      FORMAT(1X, 3F15.5)
18:        IF (D.GT.0.0001) GOTO 2
19:        WRITE(2, 5) X, ISTEP
20: 5       FORMAT(1X, 2HX=, F8.5, 5HSTEP=, I4)
21:        STOP

```

[程序说明]:

第二行定义数组 $c(2)$ 是为了用以控制到达终值的步数,与程序1.1意义相同。通过第13行语句将一共走过的步数打印出来,从末行可以看出总共运行了314步。整过程相当简单,与欧拉法相比,由于精度提高很多,故步长可适当放长。虽然每运行一次的时间比欧拉法的要长,但步长加大后,总的运行时间并不会更多,所以,用计算机解题时欧拉法用得很少。

(三) 阿达姆斯(Adams)法

以上介绍的龙格-库塔法,其后一步的解算只与前一步的数值有关,称为一步法。但是龙格-库塔法有一个缺点,每向前走一步,就要运算 $K_1 \sim K_4$ 四个系数,当 $f(x, y)$ 的形式比较复杂,反复运算次数很多时(例如要了解系统随参量变化的情况,参量变化成百上千个值,每运行一次又要走上千步),运算时间就相当可观了。本段介绍的阿达姆斯法是在保证同样精度情况下,运算时间相对缩短。阿达姆斯法是多步法,即要算出后一个 y_{n+1} 的值,需要用上前后 $f_{n-r}, \dots, f_n, f_{n+1}$ 等多个值。用待定系数法将 y_{n+1} 的推算公式写出如下:

$$y_{n+1} = a_0 y_n + a_1 y_{n-1} + \dots + a_r y_{n-r} + h(b_{-1} f_{n+1} + b_0 f_n + b_1 f_{n-1} + \dots + b_r f_{n-r}) \quad (1.1.15)$$

实用上一般取 $r=3$, 此时有

$$y_{n+1} = a_0 y_n + a_1 y_{n-1} + a_2 y_{n-2} + a_3 y_{n-3} + h(b_{-1} f_{n+1} + b_0 f_n + b_1 f_{n-1} + b_2 f_{n-2} + b_3 f_{n-3}) \quad (1.1.16)$$

式右的 y_i, f_i 可以近似地认为 $y_i \approx y(x_i), f_i \approx f(t_i, y(x_i))$ 。将 $y(x_{n-i})$ ($i=1, 2, 3$)与 $y'(x_{n-i})$ ($i=-1, 1, 2, 3$)在点 $x=x_n$ 按 h 的幂作泰勒展开

$$y(x_{n+1}) = y(x_n) + \frac{y'(x_n)}{1!} h + \frac{y''(x_n)}{2!} h^2 + \dots \quad (1.1.17a)$$

$$\begin{aligned} y_{n+1} = & (a_0 + a_1 + a_2 + a_3)y(x_n) + (-a_1 - 2a_2 - 3a_3 + b_{-1} + b_0 + b_1 + b_2 + b_3) \cdot \\ & y'(x_n) \cdot h + \left(\frac{1}{2}a_1 + 2a_2 + \frac{9}{2}a_3 + b_{-1} - b_1 - 2b_2 - 3b_3\right) \cdot y''(x_n)h^2 \\ & + \dots \end{aligned} \quad (1.1.17b)$$

比较上面两式,可得系数关系式为

$$\begin{aligned} a_0 + a_1 + a_2 + a_3 &= 1 \\ -a_1 - 2a_2 - 3a_3 + b_{-1} + b_0 + b_1 + b_2 + b_3 &= 1 \\ \frac{1}{2}a_1 + 2a_2 + \frac{9}{2}a_3 + b_{-1} - b_1 - 2b_2 - 3b_3 &= \frac{1}{2} \\ &\vdots \end{aligned} \quad (1.1.18)$$

若令 $a_1 = a_2 = a_3 = b_{-1} = 0$, 从上述方程可以解得阿达姆斯外推公式

$$y_{n+1}^{(0)} = y_n + \frac{h}{24} [55f_n - 59f_{n-1} + 37f_{n-2} - 9f_{n-3}] \quad (1.1.19)$$

若令 $a_1 = a_2 = a_3 = b_3 = 0$ 可解得阿达姆斯内插公式

$$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{24} [9f_{n+1}^{(0)} + 19f_n - 5f_{n-1} + f_{n-2}] \quad (1.1.20)$$

其中 $f_{n+1}^{(0)} = f(x_{n+1}, y_{n+1}^{(0)})$ 。

内插公式是隐式，式中的 $f_{n+1}^{(0)}$ 要先解得 $y_{n+1}^{(0)}$ 后才能算出，一般先用 (1.1.19) 外推式算出 y_{n+1} 的初值 $y_{n+1}^{(0)}$ ，再由 (1.1.20) 式进一步算出 y_{n+1} 的值。阿达姆斯法也可单独使用外推法。用外推法时，最初几个点 y_1, y_2, y_3 只能用其它方法算出（一般可用龙格-库塔法）。阿达姆斯法还有可顺便估计出截断误差的优点。假定允许误差是 ε ，令 $y_{n+1}^{(i)}$ 与 $y_{n+1}^{(E)}$ 分

别代表由外推和内插公式算得的值，若 $\left| -\frac{19}{720}(y_{n+1}^{(i)} - y_{n+1}^{(E)}) \right|$ 比 ε 小得多，则可放大步长，以减少运算时间，否则应缩小步长。

作为例子，我们在 (1.1.7) 式的基础上再加上强迫项后得

$$\ddot{x} = Ax + Bx^3 + C\sin(2\pi t) \quad (1.1.21)$$

上式与 (1.1.5) 式相对应，即在 LC 回路中加上交流源。运算程序见 1.3。

程序 1.3 阿达姆斯 (Adams) 法解一阶常微分方程 (Apple II 机上运行)

```

1: C ADAMS METHOD FOR O.D.E
2: F(T, X, A, B, C) = A * X + B * X * X * X + C * SIN(2.0 * 3.1415926 * T)
3: READ(3, 1) T, X, H, A, B, C
4: WRITE(2, 1) T, X, H, A, B, C
5: 1 FORMAT(1X, 6F8.4)
6: FN3 = F(T, X, A, B, C)
7: I = 1
8: 6 AK1 = H * F(T, X, A, B, C)
9: AK2 = H * F(T + H/2.0, X + AK1/2.0, A, B, C)
10: AK3 = H * F(T + H/2.0, X + AK2/2.0, A, B, C)
11: AK4 = H * F(T + H, X + AK3, A, B, C)
12: X = X + (AK1 + 2.0 * AK2 + 2.0 * AK3 + AK4) / 6.0
13: T = T + H
14: IF (I - 2) 2, 3, 4
15: 2 FN2 = F(T, X, A, B, C)
16: GOTO 5
17: 3 FN1 = F(T, X, A, B, C)
18: GOTO 5
19: 4 FN = F(T, X, A, B, C)
20: 5 CONTINUE
21: I = I + 1

```

```

22:      IF(I.LE.3) GOTO 6
23:      N=INT(6.0/H)
24:      M=INT(4.5/H)
25:      K=INT(1.0/(10.*H))
26:      KK=K
27:      DO 10 I=1, N
28:      X1=X
29:      X=X+H*(55.0*FN-55.0*FN1+37.0*FN2-9.0*FN3)/24.0
30:      T=T+H
31:      F1N=F(T, X, A, B, C)
32:      X=X1+H*(9.0*F1N+19.0*FN-5.0*FN1+FN2)/24.
33:      F1N=F(T, X, A, B, C)
34:      FN3=FN2
35:      FN2=FN1
36:      FN1=FN
37:      FN=F1N
38:      IF(I.LE.M) GOTO 10
39:      IF(I-M.LE.KK) GOTO 10
40:      WRITE(3, 8) T, X
41: 8      FORMAT(1X, 2HT=, G15.6, 3X, 2HX=, G20.8)
42:      KK=KK+K
43: 10     CONTINUE
44:      STOP
45:      END

```

〔程序说明〕：

第6至22行为用龙格-库塔法计算最初三个点。23, 24两行中定义的两个整数用来丢去前四个半周期的暂态过程，读出稳定后的一个半周期的 x 值，由第38行的语句控制。究竟该丢弃多少以消除暂态的影响，需事先用(1.1.21)式中相当于阻尼项的系数大致估出。25行语句中的 K 用来控制打印点。因振荡周期为1，故 K 等于1/10周期中所取步数。第39与42行的语句是控制一个周期内打印出10个点。

§1.2 高阶常微分方程的数值解

(一) 非线性振动与计算机求解

非线性振动系统由下列二阶常微分方程描述

$$\ddot{x} + f_1(\dot{x}) + f_2(x) = f(t) \quad (1.2.1)$$

其中质量 m 可作归一化处理而略去。式中 f_1 和 f_2 分别代表非线性阻尼与非线性力项，也可以只有其中之一是非线性的。很容易把上式想象为弹簧振子的运动方程，其实(1.2.1)式代表了自然界中很大一类物理现象，甚至比线性系统还要普遍得多。非线性振动的研究除去力学

外,对光学、流体力学、自动控制、生物学、医学、微电子学和机械制造等各学科的发展都有重要意义。由上述方程描述的各类系统,都可用“广义”的弹簧振子来理解,其中 $f_1(\dot{x})$ 代表系统的耗散, $f(t)$ 代表与外界能量的交换。随着系统参量或外界条件的变化,系统有着十分复杂与丰富的运动特征,有的至今尚在研究之中。为了进一步了解(1.2.1)式的普遍性,将耗散项写成熟知的线性项 $2r\dot{x}$,其中 $1/(2r)=\tau$ 代表衰变寿命。设系统的本征频率为 ω_0 ,相应的周期为 T_0 ,当 $T_0 \gg \tau$ 时,可得熟知的品质因子 Q 值为: $Q=\omega_0\tau$ 。 Q 值在电路中是我们很熟悉的量:将 Q 写成 $Q=\nu_0/\Delta\nu$,其中 $\Delta\nu$ 就代表原子发光时由自发辐射引起的谱线展宽。

非线性振动能得到精确解的极少,一般都采用近似法,将非线性项作为微扰项逐级展开求解。利用电子计算机数值求解可直接从原方程出发,因此可以处理具有强非线性项的系统。下面我们结合一些具体例子,说明计算机在求解非线性问题时的作用。

设(1.2.1)式中非线性力项 $f_2(x)$ 具有如下形式:

$$f_2(x) = Ax + Bx^3 \quad (1.2.2)$$

这是最常见的非线性力的形式,若其中 $A > 0$, $B > 0$,则称此弹性力为“硬特性”的,因三次方项增加了线性部分的弹性力,使弹簧变“硬”;反之,若 $A > 0$, $B < 0$,此时的弹性力称为“软特性”的。在(1.1.7)式中已初步讨论了这一问题,在该式中再加上惯性力项即为现在讨论的形式。一个熟知的例子是单摆振动,当摆幅不是很小,需将 $\sin x$ 展开取三次项(即 $\sin x = x - (1/6) \cdot x^3$),此时即得软特性弹性力。上述带有硬、软特性的非线性振动,在理论上已有各种近似解法,如微扰法(将非线性因子作为 ϵ 小项,将解依 ϵ 幂展开)、渐近法(将振幅与相位作为缓变函数来处理求近似解)等。用计算机来求数值解时,程序编制很容易,解算也快得多(见(二)段中的例子)。特别是当非线性因子较为复杂时,理论分析就有一定的困难。上面讨论的方程实际上是杜芬(Duffing)方程

$$\ddot{x} + k\dot{x} + f(x) = g(t) \quad (1.2.3)$$

的一个特例,其中 $g(t)$ 是周期函数。有时当 $f(x)$ 的形式稍有不同,理论分析就变得十分困难,但对计算机求解来说却是类似的。理论分析与计算机解相配合,使过去用纯理论分析难以取得进展的问题,取得了不少突破。例如(1.2.2)式中当 $A > 0$, $B < 0$ 时(在 $|Ax| < |Bx^3|$ 时弹性力对原点来说不是“恢复”而是“推斥”力),系统随参量 A 和 B 的变化会出现一系列突变现象,包括逐级分频直至出现混沌现象。这与传统的系统最终被套在强迫力的频率上的概念是完全不同的;与非线性因子会引起谐波(即倍频)成分的结论也不相同(这里出现的是分频)。分岔与混沌理论是近年来取得迅速进展的一个分支,已被广泛地应用于力、热、光、声、电、生物、医学、生态、低温工程、等离子体……等等领域中,它的发展与计算机的出现是密切相关的。

计算机最适用于做大量重复性的繁杂计算工作。例如,我们要求出非线性振子的振幅随强迫频率 ω 变化的谐振曲线, ω 要取成百上千个值,每取一个值都要计算一次振幅值,这样的工作脱离了计算机几乎是无法完成的。但计算机则可在不长时间内就运算出结果,并将曲线打印出来。又如要了解当参量变动时,系统状态如何经历各种突变的过程,也需要逐点变

动各参量，对方程进行重复运算。

上面已经提到，这里所举的例子，并非局限于只讨论非线性振子的问题。它反映了很大一类系统的“横”的特征。近年来，各学科间又渐渐走向“从分到合”的阶段，即学科的交叉。原来看来很不相同的领域，现在发现可以被纳入同一运动模式之中。例如，激光与超导可以化为满足同一部之万方程的形式。再举一个例子，处在单色光场中的电偶极子 d ，可化为满足以下的标量方程。

$$\ddot{d} + 2\gamma\dot{d} + \omega_0^2 d = 2d\cos\omega t \quad (1.2.4)$$

经变量代换后上述方程又可化为

$$\ddot{x} + (\alpha + \beta\cos t)x = 0 \quad (1.2.5)$$

的形式，称为麦修 (Mathieu) 方程。上式 x 的振动由参量的周期变化所引起，则称为参量激发摆。它是更普遍形式海尔 (Hill) 方程的一个特例

$$\ddot{x} + (\alpha + p(t))x = 0 \quad (1.2.6)$$

其中 $p(t)$ 是周期函数。有一类系统的运动都可纳入这类方程之中。随参量 α 与 β 的变化，它也有许多突变域，在物理上我们可以把这些突变理解成非线性光学中的某些特殊现象，直至原子或分子的电离。上述方程的突变域及运动特征已有部分理论结果。计算机的解算可以帮助我们揭示出更丰富的内容，对我们研究物理与工程问题起着有力的助手作用。

(二) 常微分方程组的数值解

高阶常微分方程可以通过变量代换转为常微分方程组，例如对于 (1.2.1) 式，由 $\dot{x} = v$ 即可化为

$$\left. \begin{aligned} dv/dt &= -f_1(v) - f_2(x) + f(t) \\ dx/dt &= v \end{aligned} \right\} \quad (1.2.7)$$

一阶方程中几种数值解的方法很容易推广到高阶来，无论在原理与形式上都是类似的。我们分别将二阶方程的龙格-库塔与阿达姆斯两种方法初值问题的计算公式列出来，设有微分方程组

$$\left. \begin{aligned} dy/dx &= f_1(x, y, z) \\ dz/dx &= f_2(x, y, z) \end{aligned} \right\} \quad (1.2.8a)$$

满足初始条件

$$y(x_0) = y_0, \quad z(x_0) = z_0 \quad (1.2.8b)$$

四阶龙格-库塔法的计算公式为

$$\left. \begin{aligned} y_{n+1} &= y_n + (1/6)(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4) \\ z_{n+1} &= z_n + (1/6)(l_1 + 2l_2 + 2l_3 + l_4) \end{aligned} \right\} \quad (1.2.9)$$

其中

$$\begin{aligned}
k_1 &= hf_1(x_n, y_n, z_n) \\
k_2 &= hf_1\left(x_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{k_1}{2}, z_n + \frac{l_1}{2}\right) \\
k_3 &= hf_1\left(x_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{k_2}{2}, z_n + \frac{l_2}{2}\right) \\
k_4 &= hf_1(x_n + h, y_n + k_3, z_n + l_3) \\
l_1 &= hf_2(x_n, y_n, z_n) \\
l_2 &= hf_2\left(x_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{k_1}{2}, z_n + \frac{l_1}{2}\right) \\
l_3 &= hf_2\left(x_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{k_2}{2}, z_n + \frac{l_2}{2}\right) \\
l_4 &= hf_2(x_n + h, y_n + k_3, z_n + l_3)
\end{aligned} \tag{1.2.10}$$

阿达姆斯法的外推公式为

$$\begin{aligned}
y_{n+1}^{(0)} &= y_n + \frac{h}{24} [55f_1(x_n, y_n, z_n) - 59f_1(x_{n-1}, y_{n-1}, z_{n-1}) \\
&\quad + 37f_1(x_{n-2}, y_{n-2}, z_{n-2}) - 9f_1(x_{n-3}, y_{n-3}, z_{n-3})] \\
z_{n+1}^{(0)} &= z_n + \frac{h}{24} [55f_2(x_n, y_n, z_n) - 59f_2(x_{n-1}, y_{n-1}, z_{n-1}) \\
&\quad + 37f_2(x_{n-2}, y_{n-2}, z_{n-2}) - 9f_2(x_{n-3}, y_{n-3}, z_{n-3})]
\end{aligned} \tag{1.2.11}$$

阿达姆斯法的内插公式为

$$\begin{aligned}
y_{n+1} &= y_n + \frac{h}{24} [9f_1(x_{n+1}, y_{n+1}^{(0)}, z_{n+1}^{(0)}) + 19f_1(x_n, y_n, z_n) \\
&\quad - 5f_1(x_{n-1}, y_{n-1}, z_{n-1}) + f_1(x_{n-2}, y_{n-2}, z_{n-2})] \\
z_{n+1} &= z_n + \frac{h}{24} [9f_2(x_{n+1}, y_{n+1}^{(0)}, z_{n+1}^{(0)}) + 19f_2(x_n, y_n, z_n) \\
&\quad - 5f_2(x_{n-1}, y_{n-1}, z_{n-1}) + f_2(x_{n-2}, y_{n-2}, z_{n-2})]
\end{aligned} \tag{1.2.12}$$

前几个 y_i, z_i 的计算用 (1.2.10) 式龙格-库塔法计算。

我们以带高阶展开项，加有强迫力的单摆运动为例，用龙格-库塔法解算在不同外加频率下的振幅值，其运动方程为

$$\ddot{x} + 0.24\dot{x} + 4x - 0.67x^3 = 0.58\cos(\omega t) \tag{1.2.13}$$

相应的程序见程序1.4。

程序 1.4 龙格-库塔法解二阶常微分方程 (VAX-11/780机上运行)

1: C RUNGE - KUTTA METHOD TO SOLVE DIFFERENTIAL EQ. OF
HIGHER ORDER