

Jing Ji Ying Yong Su Xue

经济应用数学

上册

主编 张 莉 纪跃芝 张 珂

主审 田桂林



哈尔滨工业大学出版社

经济应用数学

上册

主 编	张 莉	纪跃芝	张 珂
主 审	田桂林		
副主编	王 刚	戴 晶	赵 晖
	何晓彤	唐 亮	

哈尔滨工业大学出版社

经济应用数学

Jingji Ying Yong Suxue

(上、下册)

张 莉 纪跃芝 张 珂 主编

田桂林 主审

哈尔滨工业大学出版社出版发行

黑龙江省幼师印刷厂印刷

开本 787×1092 $1/16$ 印张 28 字数 664 千字

1998 年 5 月第 1 版 1998 年 5 月第 1 次印刷

印数: 1—3540

ISBN 7-5603-1311-6/O·91 定价: (套) 29.50 元

前 言

经济数学是随着经济管理科学的发展和数学科学应用性强化而兴起的一门相对独立的学科,经济数学课是经济、财会、外贸和其他相关专业一门重要的基础课。经济数学方法更是从事宏观经济管理者和微观生产经营者不可缺少的专业知识。

为使经济数学的各部分知识更趋完整和系统,以利于该学科的教学,编委会联系和组织了全国十多所高等院校的有关教学人员编写了这部《经济应用数学》,本教材也是计划编写的经济专业系列教材中第4部,供经济管理专业和其相关专业本科和专科教学用教材。

本教材分为上、下册,上册为微积分学,下册介绍线性代数、线性规划以及概率论与数理统计等知识。

本书在编写过程中既考虑到数学学科本身的科学性、系统性,又考虑到培养学生的逻辑思维能力,尽可能的让学生更好地理解和掌握教材中的基本原理和方法。为了体现数学在经济领域中的应用,书中列举了很多经济应用方面的问题,使学生能初步掌握经济分析中的定量方法。每章后配有习题供广大师生参考。

个别章节前加有符号“*”,可作为选学内容。

参加本教材编写的人员有:戴晶(第一、二章),王刚(第三、四章),纪跃芝(第五、六章),张莉(第七、八、九章),许道凡(第十章),范龙儒(第十一、十四章),李凤蛟(第十二、十三章),何晓彤(第十五章、十六章),张丽娅(第十七、十八章),张珂(第十九、二十一章),张丽娜(第二十一、二十三章),赵晖(第二十、二十二章),唐亮(第二十四章),郭春远(第二十五章)。

为保证本教材的质量,于1997年12月下旬在黑龙江商学院对全部书稿进行了会审,参加书稿会审的有李世广、田桂林、奚祥华、张莉和赵晖等同志。

此外,田秋野也参加了本书编写的部分工作。

全书由张莉同志统纂,李世广、田桂林副教授对全书进行了审定。

参加编写的院校有沈阳师范学院、吉林化工学院、吉林工学院、黑龙江商学院、哈尔滨工程大学、工商银行兰州干校、新疆大学、山东外贸职工大学、甘肃联合大学、武汉食品工业学院、兰州市电视大学、哈尔滨市经济管理干部学院、东北林业大学、哈尔滨理工大学和黑龙江省经济干部学院等。

由于时间仓促,加之我们水平有限,书中错误和疏漏在所难免,恳请各位专家和广大读者批评指正。

编 者

1998年4月

0.13/5/01

高等院校经济类教材 编委会

顾	问	黑爱堂	彭瑞玲	杨明远
		竺仙如	潘文儒	
编委会主任		李世广		
编委会副主任		王明琴	王跃先	孙鸿铮
		张晋经	刘萍	秦放鸣
		崔兆林	李杰	
编	委	丁静	奚祥华	郭伟
		吉彦卿	官建国	甄建华
		魏家兴	孙嘉本	杨孝伟
		郭晓军	崔平	秦淑娟
		史葆岭	王来宾	张孝俊
		刘丽君	崔长有	白守忠
		胡远华	荆畅	李雅军
		张佑林	麻晓延	王珂琦
秘	书	王珂琦(兼)		

目 录

第一章 函数

第一节 函数	(1)
第二节 函数的几种常见性态	(4)
第三节 反函数和复合函数	(6)
第四节 初等函数	(8)
第五节 常用的经济函数	(11)
习题	(13)

第二章 极限与连续

第一节 极限的概念	(16)
第二节 无穷大量与无穷小量	(22)
第三节 极限的运算法则	(24)
第四节 两个重要极限	(26)
第五节 函数的连续性	(30)
习题	(35)

第三章 导数与微分

第一节 导数概念	(39)
第二节 导数的基本公式与运算法则	(45)
第三节 高阶导数	(59)
第四节 微分	(60)
习题	(64)

第四章 中值定理与导数的应用

第一节 中值定理	(69)
第二节 罗必塔法则	(73)
第三节 函数和曲线性态的研究	(76)
第四节 函数图形的描绘	(85)
第五节 一元函数微分学在经济中的应用	(87)
习题	(91)

第五章 不定积分

第一节 不定积分的概念	(94)
第二节 不定积分的性质和基本积分公式	(95)

第三节	换元积分法	(98)
第四节	分部积分法	(103)
* 第五节	简单有理函数的积分	(105)
第六节	不定积分在经济中的应用	(108)
习题		(110)
第六章	定积分	
第一节	定积分的概念	(112)
第二节	定积分的基本性质	(114)
第三节	定积分与不定积分的关系	(117)
第四节	定积分的换元积分法和分部积分法	(120)
第五节	广义积分	(123)
第六节	定积分的应用	(126)
习题		(133)
第七章	多元函数微分法及其应用	
第一节	多元函数的概念	(137)
第二节	偏导数	(144)
第三节	全微分	(146)
第四节	复合函数的微分法与隐函数的微分法	(148)
第五节	二元函数的极值	(152)
第六节	偏导数在经济学中的应用	(157)
习题		(160)
* 第八章	二重积分	
第一节	二重积分的概念与性质	(163)
第二节	二重积分的计算	(165)
习题		(174)
第九章	微分方程	
第一节	微分方程的基本概念	(175)
第二节	一阶微分方程	(177)
第三节	几种简单的二阶微分方程	(186)
* 第四节	二阶常系数线性微分方程	(188)
习题		(192)

第一章 函 数

函数是高等数学的一个最基本概念,是微积分研究的主要对象。在经济领域中涉及的大量数量关系都可以用函数来表达。本章将讨论函数的概念及其简单性质,着重分析作为本学科主要研究对象的初等函数的结构,同时介绍几个经济管理中常见的函数。

第一节 函 数

一、常量与变量

当我们观察某种自然现象或生产过程时,常常遇到各种不同的量。有些量在过程进行中始终保持同一数值,称为**常量**。例如,某种商品的价格在一定时期内是相对稳定的,可以看作常量。有些量在过程进行中取不同的数值,称为**变量**。例如,某种商品的销售量和销售额是变化的,可以看作变量。

常量与变量的概念是相对的。一个量是常量还是变量要根据具体问题、具体条件来分析。例如,销售某种商品,商品的价格在商品滞销或商品更新换代时,其价格也要变化,此时,价格就成了变量。

常量通常用字母 $a, b, c, \dots$ 表示,变量则以字母 x, y, z 表示。常量与变量都可以用数轴上的点表示,如常量 x_0 表示数轴上的一点,变量 x 表示数轴上的动点。

二、区间、邻域

设 a, b 都是实数,且 $a < b$ 。数集 $\{x \mid a < x < b\}$ 称为**开区间**,记作 (a, b) ,即

$$(a, b) = \{x \mid a < x < b\}.$$

a 和 b 称为开区间 (a, b) 的端点。数集 $\{x \mid a \leq x \leq b\}$ 称为**闭区间**,记作 $[a, b]$,即

$$[a, b] = \{x \mid a \leq x \leq b\}$$

a 和 b 称为闭区间 $[a, b]$ 的端点。类似地可以说明:

$$[a, b) = \{x \mid a \leq x < b\}$$

$$(a, b] = \{x \mid a < x \leq b\}$$

$[a, b)$ 和 $(a, b]$ 都称为**半开区间**。

以上这些区间都称为有限区间。数 $b - a$ 称为这些区间的长度。在几何上,区间是指

数轴上介于两个点(区间端点)之间的一条线段(图 1-1)。

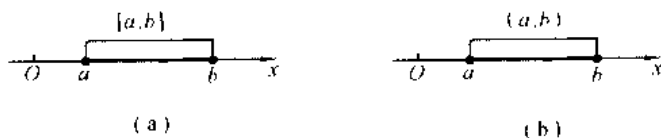


图 1-1

此外还有所谓无限区间。引进记号 $+\infty$ (读作正无穷大) 及 $-\infty$ (读作负无穷大), 则无限的半开或开区间表示如下:

$$[a, +\infty) = \{x \mid a \leq x\}$$

$$(-\infty, b] = \{x \mid x \leq b\}$$

$$(a, +\infty) = \{x \mid a < x\}$$

$$(-\infty, b) = \{x \mid x < b\}$$

$[a, +\infty)$ 及 $(-\infty, b]$ 称为无限半开区间。 $(a, +\infty)$ 及 $(-\infty, b)$ 称为无限的开区间。在几何上, 它们表示长度为无限的半直线(图 1-2)。

$(-\infty, +\infty)$ 表示全体实数, 它是无限的开区间。

设 a 与 δ 是两个实数, 且 $\delta > 0$ 。

数集 $\{x \mid |x - a| < \delta\}$

称为点 a 的 δ 邻域, 点 a 叫做邻域的中心, δ 叫做邻域的半径。

因为 $|x - a| < \delta$ 等价于 $a - \delta < x < a + \delta$, 所以点 a 的 δ 邻域就是开区间 $(a - \delta, a + \delta)$, 这个开区间以点 a 为中心, 而长度为 2δ (图 1-3)。

在几何上, 点 a 的 δ 邻域表示与点 a 距离小于 δ 的一切点 x 的全体, 这正是开区间 $(a - \delta, a + \delta)$ 。数集 $\{0 < |x - a| < \delta\}$ 称为点 a 的去心 δ 邻域。与点 a 的 δ 邻域不同的是此邻域内不含点 a 。

例如, 点 2 的 0.5 邻域就是 $(1.5, 2.5)$, 而 -2 的去心 0.1 邻域就是 $(-2.1, -2) \cup (-2, -1.9)$ 。

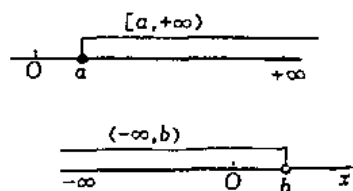


图 1-2

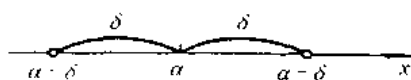


图 1-3

三、函数的概念

1. 函数的定义

在自然科学和经济管理中, 所遇到的问题往往同时有几个变量同时在变化, 它们之间并不是孤立的, 而是相互联系、相互依赖, 并按一定规律变化着。这种关系就是所谓的函数关系, 下面考察几个实例。

例 1 商店在销售某种商品的过程中, 销售总收入 R 与该商品销售量 Q 之间有下列关系:

$$R = PQ$$

其中, P 是该商品单价。上式表明了销售总收入 R 与商品销售量 Q 之间的相互依存关系, 即 R 与 Q 成正比, P 是比例系数。

例 2 为了进行市场预测,调查了某企业 1~6 月份某种商品的销售量分别为 100, 105, 110, 115, 111 和 120 件,将其列成表格,则月份 t 与销售量 Q 有如下表所列的对应关系:

月份(t)	1	2	3	4	5	6
销售量(Q)	100	105	110	115	111	120

根据这个表格,当 t 取定 1~6 的整数中的任一个值时, Q 就有一个确定的数值与之对应。

例 3 设某地一天的气温 T 用自动记录仪记录如图 1-4。则此图反映时刻 t 与气温 T 之间的相互依存关系,对于时刻 t_0 ,在图上就能找到此时刻的气温 T_0 。

上面的例子所反映的问题虽然各不相同,但却具有一个共同的特点,那就是它们反映了两个变量之间的相依关系,即当其中一个变量在某一范围内取定一数值时,按照某种规律,另一个变量就有一个确定的值与之对应。两个变量间的这种对应关系,就是函数概念的实质。

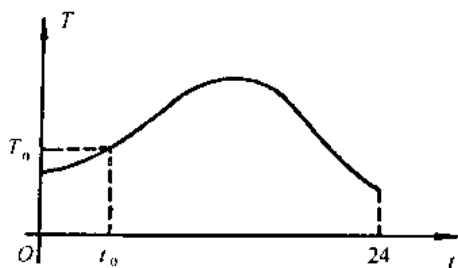


图 1-4

定义 1.1 设 x 和 y 是两个变量,如果变量 x 在某数集 D 内取值时,变量 y 按照一定法则总有确定的值和它对应,则称 y 是 x 的函数,记作

$$y = f(x)$$

数集 D 叫做这个函数的定义域,记作 $D(f)$, x 叫做自变量, y 叫做因变量。

当自变量 x 取定值 x_0 时,与之对应的 y 的数值称为函数 $y = f(x)$ 在点 x_0 处的函数值,记作 $f(x_0)$ 。当 x 取遍 D 的各个数值时,对应的函数值全体组成的数集称为函数的值域。

从函数的定义中可以看到函数包含两个要素:

- 1° 定义域;
- 2° 对应法则。

值得注意的是,函数的符号 $f(x)$ 是一个整体,字母“ f ”应理解为变量 x 与 y 之间的对应规律。

函数 $y = f(x)$ 中表示对应关系的记号 f 也可改用其它字母,例如“ φ ”,“ F ”,等等,这时函数记作 $y = \varphi(x)$, $y = F(x)$, 等等。

在实际问题中,函数的定义域是根据问题的实际意义确定的。如例 1 中,定义域 $D = (0, +\infty)$;在例 2 中,定义域 $D = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$;在例 3 中,定义域 $D = [0, 24]$ 。

在只给出函数的表达式 $y = f(x)$, 而没有指出它的定义域时,则其定义域就是使 y 有意义的自变量 x 的全体。

例 4 求下列函数的定义域:

$$(1) f(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2 - 1}} \quad (2) f(x) = \lg(3 - 2x) + \arcsin(x - 1)$$

解 (1) 要使函数有意义,必须满足 $x^2 - 1 > 0$, 即 $x > 1$ 或 $x < -1$, 所以函数的定

义域为

$$D(f) = (-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$$

(2) 因为只有当 $3 - 2x > 0$ 且 $|x - 1| \leq 1$ 时函数才有意义, 所以由不等式组

$$\begin{cases} 3 - 2x > 0 \\ |x - 1| \leq 1 \end{cases}$$

可得解集为 $0 \leq x < \frac{3}{2}$ 。故函数的定义域为

$$D(f) = [0, \frac{3}{2}), \text{或记为 } D(f) = \{x \mid 0 \leq x < \frac{3}{2}\}$$

例5 设 $f(x) = x^2 + x - 2$ 。计算 $f(0), f(2), f(-2), f(t+1)$

解 $f(0) = 0^2 + 0 - 2 = -2$

$$f(2) = 2^2 + 2 - 2 = 4$$

$$f(-2) = (-2)^2 - 2 - 2 = 0$$

$$f(t+1) = (t+1)^2 + (t+1) - 2 = t^2 + 3t$$

2. 函数的表示法

从上面例1~例3我们可以看到, 函数的表示法有三种: 公式法, 表格法和图示法。

公式法就是直接用数学式子表示两个变量间的函数关系的方法, 它便于运算和分析, 是微积分中常采用的方法。表格法是将自变量 x 的一系列取值与对应的函数值列成表格, 便于直接查询。

图示法可对函数的变化一目了然, 直观醒目, 缺点是不够准确和完整。

需要指出, 公式法不一定用一个公式表示, 有的在几个不同的定义域内分别用几个不同的式子来表示一个函数, 称为分段函数。

对于分段函数强调以下两点:

(1) 分段函数是用几个式子表示一个函数, 而不是几个函数;

(2) 分段函数的定义域是各段分析式子定义域的“并”。

$$\text{例6 设 } f(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ x^2 & 0 \leq x \leq 1 \\ 2 - x & 1 < x \leq 2 \end{cases}$$

试指出 $f(x)$ 的定义域, 并计算 $f(-3), f(-\frac{1}{3}), f(0), f(\frac{1}{3}), f(\frac{4}{3})$ 。

解 函数的定义域 $D(f) = (-\infty, 0) \cup [0, 1] \cup (1, 2] = (-\infty, 2]$

因为 $x < 0$ 时, $f(x) = 0$, 故 $f(-3) = f(-\frac{1}{3}) = 0$

同理可得 $f(0) = 0^2 = 0, f(\frac{1}{3}) = (\frac{1}{3})^2 = \frac{1}{9}, f(\frac{4}{3}) = 2 - \frac{4}{3} = \frac{2}{3}$

第二节 函数的几种常见性态

一、单调性

定义1.2 设函数 $y = f(x)$ 的定义域为 D , 若对任意的 $x_1, x_2 \in (a, b)$, 当 $x_1 < x_2$

时, 有 $f(x_1) < f(x_2)$ (或 $f(x_1) > f(x_2)$) 则称该函数在区间 (a, b) 内单调增加 (或单调减少)

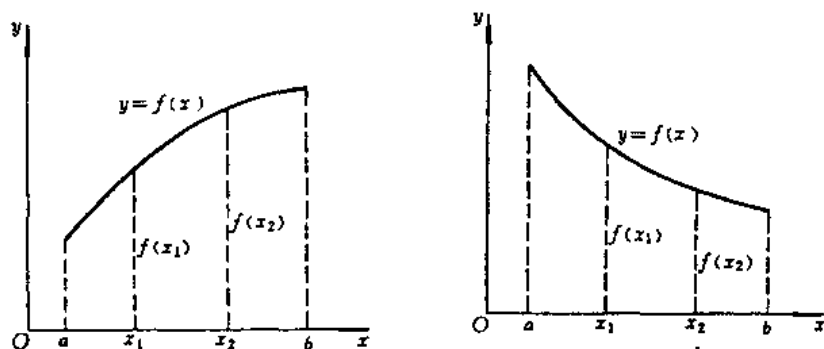


图 1-5

在区间 (a, b) 内单调增加和单调减少的函数统称为**单调函数**。如图 1-5 所示。

例如, 函数 $f(x) = x^2$ 在区间 $(0, +\infty)$ 内单调增加, 在区间 $(-\infty, 0)$ 内单调减少; 在区间 $(-\infty, +\infty)$ 内函数 $f(x) = x^2$ 不是单调函数 (图 1-6)。

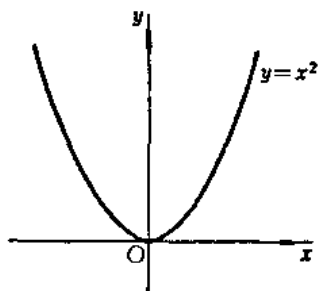


图 1-6

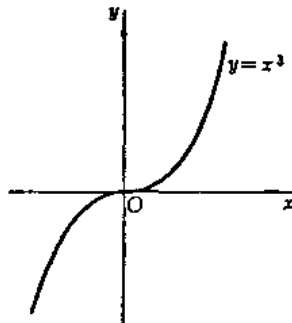


图 1-7

又例如, 函数 $f(x) = x^3$ 在区间 $(-\infty, +\infty)$ 内是单调增加函数 (图 1-7)。

二、奇偶性

定义 1.3 设函数 $y = f(x)$ 的定义域 D 关于原点对称 (即若 $x \in D$, 则 $-x \in D$)。如果对于任一 $x \in D$, 都有

$$f(-x) = f(x) \text{ (或 } f(-x) = -f(x) \text{)}$$

恒成立, 则称该函数为偶函数 (或奇函数)。

例如, $y = f(x) = x^2$ 是偶函数, 因为 $f(-x) = (-x)^2 = x^2 = f(x)$ 。

又例如, $f(x) = x^3$ 是奇函数, 因为 $f(-x) = (-x)^3 = -x^3 = -f(x)$ 。

奇函数的图形关于原点对称 (图 1-8), 偶函数的图形关于 y 轴对称 (图 1-9)。

可以证明, $f(x) = \sin x + \cos x$ 既不是奇函数, 也不是偶函数, 此类函数为**非奇非偶函数**。

三、周期性

定义 1.4 设函数 $y = f(x)$, $x \in (-\infty, +\infty)$ 。若存在一个不为零的常数 l , 使

$$f(x+l) = f(x)$$

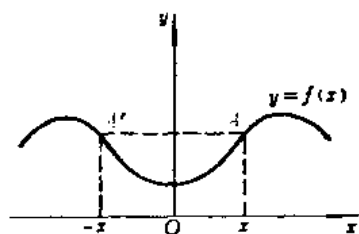


图 1-8

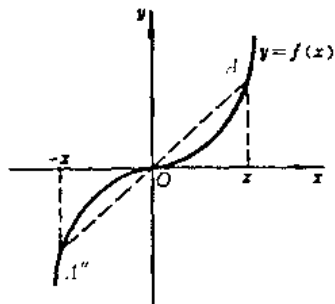


图 1-9

恒成立,则称 $f(x)$ 为周期函数 T 叫做 $f(x)$ 的周期。通常,我们说周期函数的周期是指最小正周期。

例如,函数 $y = \sin x, y = \cos x$ 是以 2π 为周期的周期函数;函数 $y = \lg x, y = \operatorname{ctg} x$ 是以 π 为周期的周期函数。

四、有界性

定义 1.5 设函数 $y = f(x)$ 在区间 (a, b) 内有定义。若存在一个正数 M , 对一切 $x \in (a, b)$, 恒有 $|f(x)| \leq M$, 则称函数 $f(x)$ 在 (a, b) 内是有界的。如果不存在这样的正数 M , 则称 $f(x)$ 在 (a, b) 内是无界的。

例如,函数 $y = \sin x$, 对一切 $x \in (-\infty, +\infty)$, 恒有 $|\sin x| \leq 1$, 故此函数在 $(-\infty, +\infty)$ 内是有界的。

与函数的单调性一样,函数的有界性也是一个与区间有关的概念。例如函数 $y = \frac{1}{x}$ 在 $(0, 1)$ 内是无界的, 在 $[1, +\infty)$ 内是有界的。

第三节 反函数和复合函数

一、反函数

设某种商品销售总收益为 y , 销售量为 x , 已知该商品的单价为 a , 对每一个给定的销售量 x , 可以通过函数 $y = ax$ 确定销售总收益 y , 这种由销售量确定销售总收益的关系称为销售总收益是销售量的函数。反过来, 对每一个给定的销售总收益 y , 则可以由函数 $x = \frac{y}{a}$ 确定销售量 x , 这种由销售总收益确定销售量的关系称为销售量是销售总收益的函数。我们称后一函数 ($x = \frac{y}{a}$) 是前一函数 ($y = ax$) 的反函数, 或者说它们互为反函数。

定义 1.6 设已知函数 $y = f(x), x \in D(f)$ 的值域为 R , 如果对于 R 中的每一个 y , $D(f)$ 中只有一个 x 使 $f(x) = y$, 则在 R 上确定了以 y 为自变量 x 为因变量的新函数 $x = \varphi(y)$, 称为 $y = f(x)$ 的**反函数**, 记作 $x = f^{-1}(y), y \in R$ 。或称它们互为反函数。

习惯上用 x 表示自变量, 用 y 表示因变量, 则函数 $y = f(x), x \in D(f)$ 的反函数表示为

$$y = f^{-1}(x) \quad x \in R$$

$y = f(x)$ 与 $y = f^{-1}(x)$ 的关系是 x 与 y 互换, 所以它们的图形是关于直线 $y = x$ 对称, 如图 1-10。

例 1 求 $y = 2x - 1$ 的反函数。

解 由 $y = f(x) = 2x - 1$ 可以求出

$$x = f^{-1}(y) = \frac{y+1}{2}$$

将上式中的 x 换成 y , 将 y 换成 x , 因此得出 $y = 2x - 1$ 的反函数是 $y = \frac{x+1}{2}$, 如图 1-11。

一个函数如果有反函数, 它必定是一一对应的函数关系。例如, 在 $(-\infty, +\infty)$ 内 $y = x^2$ 不是一一对应的函数关系, 所以它没有反函数; 而在 $(0, +\infty)$ 内, $y = x^2$ 有反函数 $y = \sqrt{x}$; 在 $(-\infty, 0)$ 内, $y = x^2$ 有反函数 $y = -\sqrt{x}$ 。

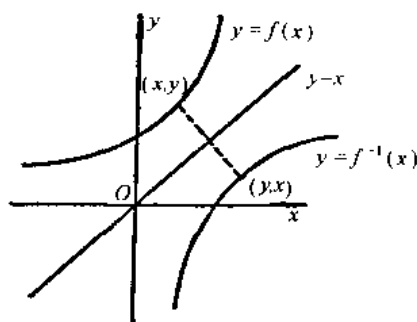


图 1-10

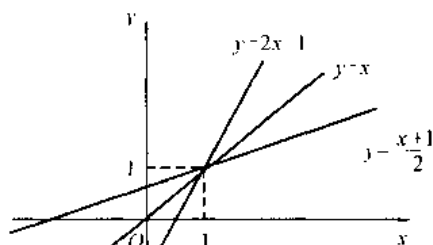


图 1-11

二、复合函数

先举一个例子。设 $y = \sqrt{u}$, 而 $u = 1 - x^2$, 由以上的两个函数就可以构成一个新的函数:

$$y = \sqrt{1 - x^2}$$

我们把这类函数称为复合函数。

定义 1.7 设 $y = f(u)$, $u \in D(f)$, $u = \varphi(x)$, $x \in D(\varphi)$ 。若对于 $x \in D(\varphi)$, 有 $\varphi(x) \in D(f)$, 则称函数 $y = f[\varphi(x)]$ 为复合函数。 x 为自变量, y 为因变量, u 称为中间变量。

例 2 由函数 $y = \sqrt{u}$, $u \in (0, +\infty)$, $u = x^2 + 1$, $x \in (-\infty, +\infty)$ 可以构成复合函数 $y = \sqrt{x^2 + 1}$, $x \in (-\infty, +\infty)$ 。

例 3 由函数 $y = \lg u$, $u \in (0, +\infty)$, $u = x - 2$, $x \in (-\infty, +\infty)$ 可以构成复合函数 $y = \lg(x - 2)$, $x \in (2, +\infty)$ 。

例 4 函数 $y = \sin^2 x$ 是由 $y = u^2$, $u = \sin x$ 两个函数复合而成的复合函数。

例5 求复合函数 $y = \arccos \frac{2x-1}{3}$ 的定义域。

解 $y = \arccos u, u = \frac{2x-1}{3}$

要求 $|u| \leq 1$, 即 $|\frac{2x-1}{3}| \leq 1$, 因此有 $-1 \leq x \leq 2$ 。

于是得出 $y = \arccos \frac{2x-1}{3}$ 的定义域为 $[-1, 2]$ 。

利用复合函数的概念, 可以将一个较复杂的函数看成由几个简单函数复合而成, 也就是说, 复合函数可以由两个或两个以上的函数复合构成。

例6 函数 $y = e^{\sqrt{x^2+1}}$ 是由 $y = e^u, u = \sqrt{v}, v = x^2 + 1$ (u, v 为中间变量) 三个函数复合而成的复合函数。

必须注意, 不是任何两上函数都可以复合成一个复合函数的。例如, $y = \arccos u, u = x^2 + 5$ 就不能复合成一个复合函数。因为 $u = x^2 + 5$ 的定义域为 $(-\infty, +\infty)$, 值域为 $[5, +\infty)$, 而 $y = \arccos u$ 的定义域为 $[-1, 1]$, 在 $u = x^2 + 5$ 中无论 x 取什么数值, 对应的 u 值都不属于区间 $[-1, 1]$, 因而不能使 $y = \arccos u$ 有意义。

第四节 初等函数

一、基本初等函数

在实际问题中遇到的函数是各种各样的, 有简单的, 也有复杂的。根据人们长期的社会实践总结出一类最基本的函数, 它们是: 常数函数、幂函数、指数函数、对数函数、三角函数以及反三角函数, 这六种函数通称为**基本初等函数**。人们经常遇到的函数往往都是由这些函数构成的, 因此熟悉这些函数的性质和图形是十分重要的。

1. 常值函数 $y = c$ (c 为常数)

它的定义域是 $(-\infty, +\infty)$, 图形为平行于 x 轴截距为 c 的直线, 如图 1-12。

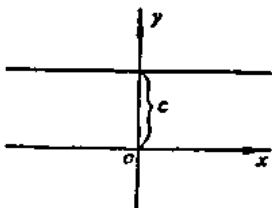


图 1-12

2. 幂函数 $y = x^\alpha$ (α 为实数)

它的定义域随 α 而异, 但不论 α 为何值, x^α 在 $(0, +\infty)$ 内总有定义, 而且图形都经过 $(1, 1)$ 点。

例如 $y = x^2$ 与 $y = x^{\frac{2}{3}}$, 定义域为 $(-\infty, +\infty)$, 图形对称于 y 轴, 如图 1-13。

$y = x^3, y = x^{\frac{1}{3}}$, 定义域为 $(-\infty, +\infty)$, 图形对称于原点, 如图 1-14。

$y = x^{-1}$, 定义域为 $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$, 图形对称于原点, 如图 1-15。

$y = x^{\frac{1}{2}}$, 定义域为 $[0, +\infty)$, 如图 1-16。

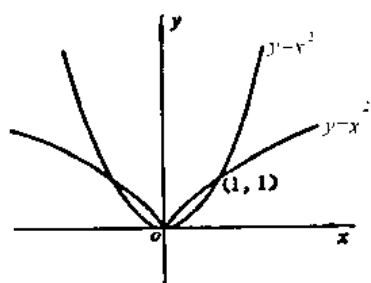


图 1-13

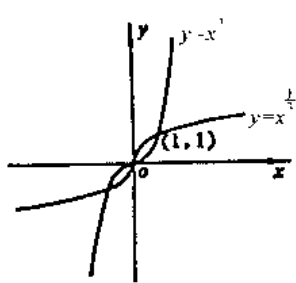


图 1-14

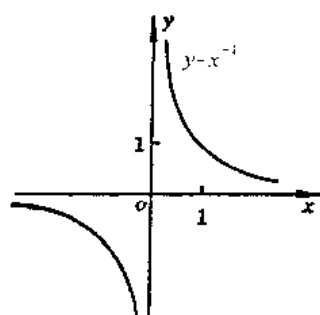


图 1-15

3. 指数函数 $y = a^x$ ($a > 0, a \neq 1$)

定义域为 $(-\infty, +\infty)$, 值域为 $(0, +\infty)$, 都通过 $(0, 1)$ 点, 当 $a > 1$ 时, 函数单调增加, 当 $0 < a < 1$ 时, 函数单调减少, 如图 1-17。

在实际问题中, 用的最多的是形如 $y = e^x$, $y = (\frac{1}{e})^x = e^{-x}$ 的指数函数, 其中 $e = 2.71828 \dots$

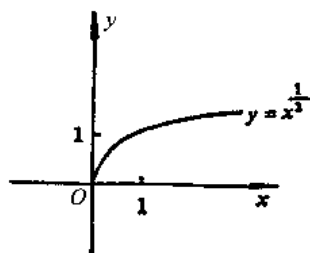


图 1-16

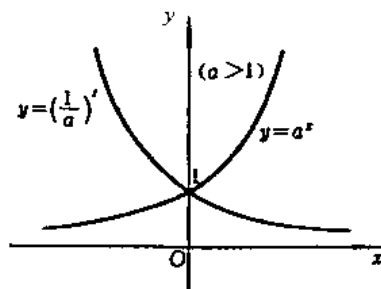


图 1-17

4. 对数函数 $y = \log_a x$ ($a > 0, a \neq 1$)

定义域为 $(0, +\infty)$, 都通过 $(1, 0)$ 点, 当 $a > 1$ 时, 函数单调增加, 当 $0 < a < 1$ 时, 函数单调减少, 如图 1-18。

对数函数与指数函数互为反函数。指数函数 $y = e^x$ 的反函数是以 e 为底的对数函数 $y = \ln x$ 。

5. 三角函数

三角函数有 $y = \sin x$, $y = \cos x$, $y = \operatorname{tg} x$, $y = \operatorname{ctg} x$, $y = \sec x$, $y = \csc x$ 。

正弦函数 $y = \sin x$ 与余弦函数 $y = \cos x$ 定义域均为 $(-\infty, +\infty)$, 均以 2π 为周期。 $y = \sin x$ 为奇函数, $y = \cos x$ 为偶函数。由于 $|\sin x| \leq 1$, $|\cos x| \leq 1$, 所以它们都是有界函数, 如图 1-19。

正切函数 $y = \operatorname{tg} x$ 定义域为 $x \neq (2n+1)\frac{\pi}{2}$ ($n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$) 的实数, $\operatorname{tg} x$ 以 π 为周期, 且为奇函数, 如图 1-20。

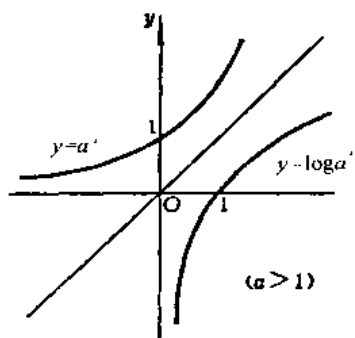


图 1-18

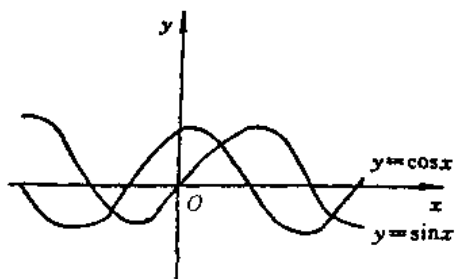


图 1-19

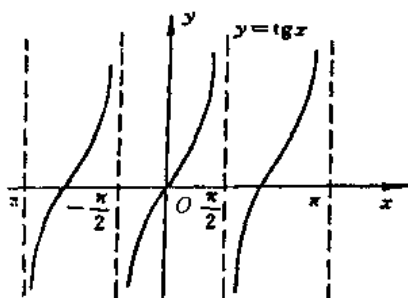


图 1-20

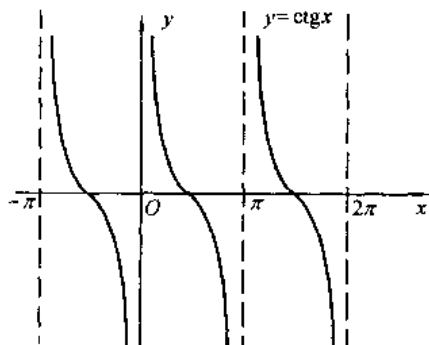


图 1-21

余切函数 $y = \text{ctg} x$ 定义域为 $x \neq n\pi (n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots)$ 的实数, $\text{ctg} x$ 以 π 为周期, 且为偶函数, 如图 1-21。

6. 反三角函数

三角函数 $y = \sin x, y = \cos x, y = \text{tg} x, y = \text{ctg} x$ 等的反函数统称为反三角函数, 分别记为 $y = \text{Arcsin} x, y = \text{Arccos} x, y = \text{Arctg} x, y = \text{Arccotg} x$ 等, 它们的图形分别与其相应的三角函数的图形对称于直线 $y = x$, 我们按下列区间取其一段, 称为主值分支, 分别记作

反正弦函数: $y = \arcsin x \quad y \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$

反余弦函数: $y = \arccos x \quad y \in [0, \pi]$

反正切函数: $y = \arctg x \quad y \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$

反余切函数: $y = \text{arccotg} x \quad y \in (0, \pi)$

它们的图形分别如图 1-22, 图 1-23, 图 1-24 和图 1-25。

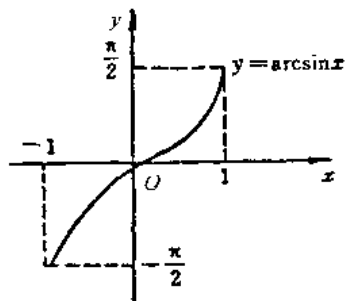


图 1-22

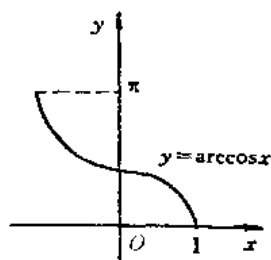


图 1-23