面向21世纪高等学校课程教材
高等职业技术教育课程教材

HIGHER MATHEMATICS

高等数学

上册

邱忠文 李君湘 主编

国防工业出版社

面向21世纪高等学校课程教材

高等职业技术教育课程教材

高等数学

上册

邱忠文　李君湘　主编

国防工业出版社
·北京·

图书在版编目(CIP)数据

高等数学．上册/邱忠文,李君湘主编．—北京:国防工业出版社,2001.9

ISBN 7-118-02561-5

Ⅰ.高… Ⅱ.①邱… ②李… Ⅲ.高等数学—技术学校:高等学校—教材 Ⅳ.013

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2001)第 042311 号

国防工业出版社出版发行

(北京市海淀区紫竹院南路 23 号)

(邮政编码 100044)

北京奥隆印刷厂印刷

新华书店经售

*

开本 850×1168 1/32 印张 11⅛ 291 千字

2001 年 9 月第 1 版 2001 年 9 月北京第 1 次印刷

印数:1—4000 册 定价:16.00 元

前　言

“高等数学”是高等院校的一门重要的基础理论课程，为了适应当前不同层次的学生学习“高等数学”课程的需要，按照原国家教委批准印发的“高等数学课程教学基本要求”，结合当前的教学实际，我们参加教学工作的教师，编写了这套主要供“新高职”学生使用的“高等数学”教材。书中有 * 的部分，供选学。

为了满足学生今后进一步学习数学课程的需要，本教材的内容基本上涉及到了“高等数学”课程的主要内容，也可供一般大学本科学生作教学参考书。

为了读者学习方便，本书附有初等数学常用公式、曲线汇编，作为附录。最后还有计算题参考解答供学习参考。

参加本书上册编写工作的有邱忠文、李君湘、李彩英、于桂贞、薛家治、孙秀萍等。限于编者的水平，书中不免仍有疏误，恳请读者指正。

编　者

2001 年 5 月于天津大学

内 容 提 要

本版《高等数学》上、下册系高等院校“新高职”或“一般本科”高等数学课程使用的教材，本教材基本保留了“高等数学”课程内容的传统风格，编写时参照了《高等数学课程教学基本要求》。

本书上册包括函数、极限与连续、导数与微分、微分中值定理及导数的应用、不定积分、定积分和微分方程等7章；下册包括矢量代数与空间解析几何、多元函数微分学、重积分、曲线积分与曲面积分和级数等5章。

本书可作为“新高职”学生使用的“高等数学”教材，亦可供一般大学本科学生作教学参考书。

目　　录

第1章　函　　数

函数概念是现实世界中变量依从关系在数学中的反映,是高等数学研究的主要对象.在本章中,我们主要对初等函数的概念和性质作简略的介绍.

1.1　函数的概念

在高等数学课程中,研究问题所涉及到的数,绝大多数都是在实数范围内进行的.今后如果没有声明,本书中所提到的数,都是实数;所提到的数集,都是实数集.按照习惯,全体自然数的集合记为 $\mathbf{N}$;全体整数的集合记为 $\mathbf{Z}$;全体有理数的集合记为 $\mathbf{Q}$;全体实数的集合记为 $\mathbf{R}$.

1.1.1　区间与邻域

定义 1.1　设数 a 与 b 满足 $a<b$,则数集 $\{x \mid a<x<b\}$ 称为开区间,记为 (a,b),即

$$(a,b)=\{x \mid a<x<b\}.$$

这里 a 和 b 分别称为开区间 (a,b) 的左端点和右端点.

对开区间 (a,b) 而言,显然有 $a \notin (a,b)$, $b \notin (a,b)$.

类似地,$[a,b]=\{x \mid a \leqslant x \leqslant b\}$,称为闭区间. a 和 b 仍然称为闭区间 $[a,b]$ 的左端点和右端点.显然 $a \in [a,b]$, $b \in [a,b]$.

而把数集

$$[a,b)=\{x \mid a \leqslant x<b\},$$
$$(a,b]=\{x \mid a<x \leqslant b\}$$

都称为半开区间.

上面介绍的区间都是有限区间,数“$b-a$”称为这些有限区间的长度.除了有限区间之外,还有无限区间.引进记号“$+\infty$”(读为“正无穷大”)及“$-\infty$”(读为“负无穷大”),则

$$(a,+\infty)=\{x\mid x>a\};[a,+\infty)=\{x\mid x\geqslant a\};$$

$$(-\infty,b)=\{x\mid x<b\};(-\infty,b]=\{x\mid x\leqslant b\}$$

都是无限区间.而全体实数的集合 $\mathbf{R}$,可以记为$(-\infty,+\infty)=\{x\mid -\infty<x<+\infty\}$,当然也是无限区间.

今后,在不需要辨明所讨论的区间是否包含端点,以及是有限区间还是无限区间的场合,就简称为“区间”并常用字母“I”表示.

邻域也是一个经常用到的数学概念,它实际上是微观条件下的区间.

定义 1.2 设 a 与 $\delta(\delta>0)$是两个数,称数集$\{x\mid a-\delta<x<a+\delta\}$为点 a 的 δ 邻域,记为 $N(a,\delta)$,即

$$N(a,\delta)=\{x\mid a-\delta<x<a+\delta\}.$$

点 a 叫做这个邻域的中心,δ 叫做这个邻域的半径.

从定义 1.2 可知,邻域 $N(a,\delta)$实际上就是开区间$(a-\delta,a+\delta)$.为了体现微观性,尽管定义 1.2 中对 δ 没有什么限制,一般总认为 δ 是很小的正数.

因为 $a-\delta<x<a+\delta$ 相当于$|x-a|<\delta$,所以邻域 $N(a,\delta)$又可以表示为

$$N(a,\delta)=\{x\mid |x-a|<\delta\}.$$

有时候用到邻域的概念时,需要把邻域的中心去掉.去掉中心 a 的邻域$N(a,\delta)$,称为点 a 的去心邻域,记为 $N(\hat{a},\delta)$,即

$$N(\hat{a},\delta)=\{x\mid 0<|x-a|<\delta\},$$

或

$$N(\hat{a},\delta)=N(a,\delta)\setminus\{a\}.$$

今后把点 a 的某一邻域也记为$N(a,\delta)$.

1.1.2 函数的定义

定义 1.3 设有两个数集 X、Y,f 是一个确定的对应规律,若

对于每一个 $x\in X$,通过 f 都有惟一的 $y\in Y$ 和它对应.记为

$$f(x) = y,$$

则称 f 为定义在 X 上的一元函数,简称为函数.

在定义 1.3 中,X 为 f 的定义域,通常用记号 D_f 来表示.当 x 取遍 X 中的一切数时,与之对应的数 y 组成的数集 $V_f=\{y\mid y=f(x),x\in X\}$,称为函数 f 的值域.

一个函数是由对应规律和函数的定义域确定的,而值域则是随着对应规律和定义域的给定而确定的.习惯上把函数 f 说成"变量 y 是变量 x 的函数",并用记号 $y=f(x)$来表示.通常称 y 为因变量或函数,而把 x 称为自变量.

函数中表示对应关系的记号"f"也可以用其它的字母表示,例如"g"、"φ"、"F"、"G"等.这时函数的记号相应地表示为 $y=g(x)$、$y=\varphi(x)$、$y=F(x)$和 $y=G(x)$等.

在不考虑函数的实际意义的时候,函数的定义域就是自变量所能取的使函数关系成立的一切实数的集合,而函数的定义域 D_f 和值域 V_f 通常都是由区间或数集来表示的.

我们在平面上建立直角坐标系 xOy,把满足对应关系 $y=f(x)(x\in D_f)$的数值(x,y),看作 xOy 平面上的一个点,当 x 取遍 D_f 上的每一个数值时,就得到点(x,y)的一个集合 P

$$P = \{(x,y)\mid y = f(x),x \in D_f\}.$$

点集 P 称为函数 $y=f(x)$的图形.

1.1.3 函数值

如果对于自变量 x 的某一个确定的值 $x=x_0$,函数 f 有一个确定的对应值 $f(x_0)$,则称 $f(x_0)$为函数 f 在点 $x=x_0$ 处的函数值.这时也称函数 f 在点 $x=x_0$ 处是有定义的.

例 1.1 求函数 $y=\sqrt{1-x^2}$的定义域 D_f 及函数值$f(\frac{1}{2})$.

解 函数 $y=\sqrt{1-x^2}$的定义域 $D_f=[-1,1]$;函数值$f(\frac{1}{2})=$

$\sqrt{1-\left(\frac{1}{2}\right)^2}=\frac{\sqrt{3}}{2}$.

例 1.2 求函数 $y=|x|=\begin{cases}x, 当\ x\geqslant 0,\\ -x, 当\ x<0\end{cases}$ 的定义域 D_f、值域 V_f 及函数值 $f(-1)$.

解 函数 $y=|x|$ 的定义域为 $D_f=(-\infty,+\infty)$；值域 $V_f=[0,+\infty)$；函数值 $f(-1)=1$.

例 1.3 求符号函数

$$y=\operatorname{sgn}x=\begin{cases}1, 当\ x>0,\\ 0, 当\ x=0,\\ -1, 当\ x<0\end{cases}$$

的定义域 D_f 及值域 V_f.

解 函数的定义域 $D_f=(-\infty,+\infty)$；值域为 $V_f=\{-1,0,1\}$，其图形如图 1-1 所示.

例 1.4 设 $x\in\mathbf{R}$，不超过 x 的最大整数记为 $[x]$，则 $\left[\frac{4}{7}\right]=0$，$[\sqrt{3}]=1$，$[-\pi]=-4$，$[-2]=-2$，$[3]=3$. 求函数 $y=[x]$ 的定义域 D_f、值域 V_f.

解 函数 $y=[x]$ 的定义域为 $D_f=(-\infty,+\infty)$，值域为 $V_f=\mathbf{Z}$（全体整数）. 其图形如图 1-2 所示.

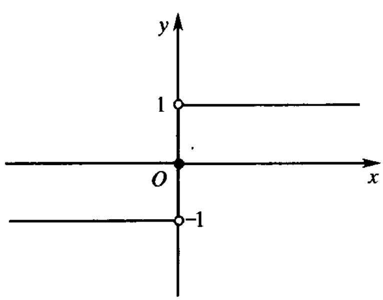

图 1-1

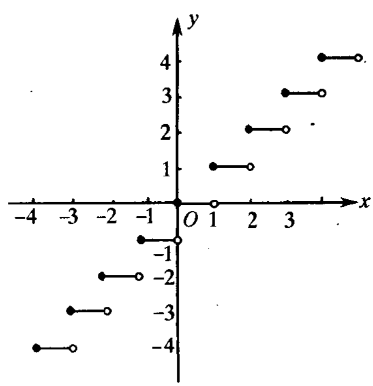

图 1-2

例 1.5 求函数

$$y = f(x) = \begin{cases} 2\sqrt{x}, 当 0 \leqslant x \leqslant 1, \\ x+1, 当 x > 1 \end{cases}$$

的定义域 D_f、值域 V_f.

解 函数的定义域 $D_f = [0, +\infty)$,值域 $V_f = [0, +\infty)$.

当 $x \in [0,1]$时,对应的函数值为 $f(x) = 2\sqrt{x}$,如 $f\left(\frac{1}{2}\right) = 2\sqrt{\frac{1}{2}} = \sqrt{2}$;

当 $x \in (1, +\infty)$时,对应的函数值为 $f(x) = x + 1$,如 $f(3) = 3 + 1 = 4$.

1.1.4 函数的性质

1. 有界性

若有正数 M 存在,使函数 $f(x)$在区间 I 上恒有 $|f(x)| \leqslant M$,则称 $f(x)$在区间 I 上是有界函数;否则,$f(x)$在区间 I 上是无界函数.

如果存在常数 M(不一定局限于正数),使函数 $f(x)$在区间 I 上恒有$f(x) \leqslant M$,则称 $f(x)$在区间 I 上有上界,并且任意一个 $N \geqslant M$ 的数 N 都是$f(x)$在区间 I 上的一个上界;如果存在常数 m,使 $f(x)$在区间 I 上恒有$f(x) \geqslant m$,则称 $f(x)$的区间 I 上有下界,并且任意一个 $l \leqslant m$ 的数 l 都是$f(x)$在区间 I 上的一个下界.

显然,函数 $f(x)$在区间 I 上有界的充分必要条件是$f(x)$在区间 I 上既有上界又有下界.

例 1.6 函数 $f(x) = \sin x$ 在$(-\infty, +\infty)$内是有界函数.

解 因为无论 x 取任何实数,都有 $|\sin x| \leqslant 1$,所以 $f(x) = \sin x$ 在$(-\infty, +\infty)$内是有界函数.

从例 1.6 中可以看到,任何大于 1 的常数都可以作为 $\sin x$ 的上界;而任何小于 -1 的常数都可以作为 $\sin x$ 的下界.

例 1.7 试验证函数 $f(x) = \frac{1}{x}$在区间$[1,2]$上是有界的,在区

间(0,1)内是无界的.

解 由于$f(x)=\frac{1}{x}$在$x\in[1,2]$上满足$|f(x)|\leqslant 1$,显然$f(x)$在[1,2]上是有界的.

而$f(x)=\frac{1}{x}$在区间(0,1)内,无论给定多么大的正数M(当然会有$M>1$),必有$x_1=\frac{1}{2M}\in(0,1)$,使$|f(x_1)|=2M>M$.也就是说,$f(x)$在区间(0,1)内的某一点处,对应的函数值的绝对值,必定大于预先给定的任何正数,故$f(x)=\frac{1}{x}$在(0,1)内是无界的.

2. 单调性

设函数$f(x)$在区间I上的任意两点$x_1<x_2$,都有$f(x_1)<f(x_2)$(或$f(x_1)>f(x_2)$)则称$y=f(x)$在区间I上为严格单调增加(或严格单调减少)的函数.

如果函数$f(x)$在区间I上的任意两点$x_1<x_2$,都有$f(x_1)\leqslant f(x_2)$(或$f(x_1)\geqslant f(x_2)$),则称$y=f(x)$在区间I上为广义单调增加(或广义单调减少)的函数.广义单调增加的函数,通常简称为单调增加的函数或非减函数;广义单调减少的函数则简称为单调减少的函数或非增函数.

显然函数$y=x^2$在区间$(-\infty,0)$内是严格单调减少的;在区间$(0,+\infty)$内是严格单调增加的.

而函数$y=x$、$y=x^3$在区间$(-\infty,+\infty)$内都是严格单调增加的.

3. 奇偶性

若函数$f(x)$在关于原点对称的区间I上满足$f(-x)=f(x)$(或$f(-x)=-f(x)$),则称$f(x)$为偶函数(或奇函数).

偶函数的图形是关于y轴对称的;奇函数的图形是关于原点对称的.

例如,$f(x)=x^2$、$g(x)=x\sin x$在定义区间上都是偶函数,而$F(x)=x$、$G(x)=x\cos x$在定义区间上都是奇函数.

4. 周期性

对于函数 $y=f(x)$,如果存在一个非零常数 T,对一切的 x 均有 $f(x+T)=f(x)$,则称函数 $f(x)$为周期函数,并把 T 称为$f(x)$的周期.应当指出的是,通常讲的周期函数的周期是指最小的正周期.

对三角函数而言,$y=\sin x$、$y=\cos x$ 都是以 2π 为周期的周期函数,而 $y=\tan x$、$y=\cot x$ 则是以 π 为周期的周期函数.

关于函数的性质,除了有界性与无界性之外,单调性、奇偶性、周期性都是函数的特殊性质,而不是每一个函数都一定具备的.

1.1.5 复合函数与反函数

1. 复合函数

设 $y=f(u)$是数集 Y 上的函数,$u=\varphi(x)$是由数集 X 到数集 Y 的一个非空子集 Y_φ 的函数.因此,对每一个 $x\in X$,通过 u 都有惟一的y 与它对应,这时在 X 上产生了一个新的函数,用 $f\circ\varphi$ 表示,并称 $f\circ\varphi$ 为X 上的复合函数,记为

$$(f\circ\varphi)(x)=y \text{ 或 } y=f[\varphi(x)],x\in X.$$

其中 u 叫做中间变量,X 是复合函数$f\circ\varphi$ 的定义域,$f\circ\varphi$ 表示由 x 产生y 的对应规律.

应当说明的是,复合函数$(f\circ\varphi)(x)$的定义域 X 是不能等同于函数$u=\varphi(x)$的定义域的.数集 X 是由使函数$u=\varphi(x)$的值域 Y_φ 满足 $Y_\varphi\subseteq Y$ 的实数所组成的.

复合函数是经常遇到的一种函数结构.例如,由物理学知道,物体的动能 E 与速度 v 的函数关系是 $E=\frac{1}{2}mv^2$(这里 m 为物体的质量),如果将此物体以初速度 v_0 垂直向上抛出,由于地球引力的关系,这时速度 v 与时间t 有下面的函数关系 $v=v_0-gt$,于是,物体的动能成为时间 t 的函数

$$E=\frac{1}{2}m(v_0-gt)^2.$$

它就是复合函数,其中 v 是中间变量.

又例如 $y=\sin x^2$,是由 $y=\sin u$ 和 $u=x^2$ 复合而成的复合函数,其定义域为 $\mathbf{R}$. 而函数 $y=\sqrt{x+4}$是由 $y=\sqrt{u}$和 $u=x+4$ 复合而成的复合函数,其定义域为$[-4,+\infty)$. 它是中间变量 $u=x+4$ 的定义域 $\mathbf{R}$ 的子集.

例 1.8 设 $f(x)=x^2,\varphi(x)=2^x$. 求 $f[\varphi(x)]$、$\varphi[f(x)]$.

解 $f[\varphi(x)]=[\varphi(x)]^2=(2^x)^2=2^{2x}$;

$$\varphi[f(x)]=2^{f(x)}=2^{x^2}.$$

从例 1.8 可以看出 $f\circ\varphi\neq\varphi\circ f$,也就是说复合函数的复合次序是不能交换的.

2. 反函数

设函数 $y=f(x)$的定义域为 D_f,值域为 V_f. 对任意的 $y\in V_f$,在 D_f 上确定了一个 x 与 y 对应,且满足 $y=f(x)$. 如果把 y 看作自变量,x 看作因变量,就可以得到一个新的函数:$x=f^{-1}(y)$. 我们称 $x=f^{-1}(y)$为函数 $y=f(x)$的反函数,而把函数 $y=f(x)$称为直接函数. 一般地说,直接函数 f 与反函数f^{-1}是不相同的两个函数,这是因为定义域和对应规律不相同的缘故.

由于习惯上 x 表示自变量,y 表示因变量,我们约定 $y=f^{-1}(x)$也是直接函数 $y=f(x)$的反函数,通常称它为习惯反函数. 今后如不特别声明,求某一个直接函数 $y=f(x)$的反函数,均指求它的习惯反函数.

例 1.9 求函数 $y=2x+3$ 的反函数.

解 由 $y=2x+3$,有 $x=\frac{1}{2}y-\frac{3}{2}$,于是得到反函数

$$y=\frac{1}{2}x-\frac{3}{2}.$$

类似地,不难求出函数 $y=x^3$ 的反函数为 $y=x^{\frac{1}{3}}$.

应当说明的是直接函数 $y=f(x)$与它的反函数 $y=f^{-1}(x)$的

图形是关于直线 $y=x$ 对称的.并且单调的直接函数的反函数也是单调的.

习题 1-1

1. 求下列函数的定义域:

(1) $y=\dfrac{x+2}{x^2-4}$;　　(2) $y=\arcsin\dfrac{2x-1}{7}$;

(3) $y=\sqrt{\lg(x^2-3)}$;　　(4) $y=\sqrt{x+1}+\dfrac{1}{\lg(1-x)}$.

2. 设 $f(\sin\frac{x}{2})=1+\cos x$,求 $f(x)$、$f(\cos\frac{x}{2})$.

3. 设 $f(u)$满足:

$f^2(\lg u)-2uf(\lg u)+u^2\lg u=0,\ u\in(0,10]$,且 $f(0)=0$,求 $f(x)$.

4. 设 $y=\frac{x}{2}f(t-x)$,且当 $x=1$ 时,$y=\frac{1}{2}t^2-t+\frac{1}{2}$,求$f(x)$.

5. 判定函数 $f(x)=\left(\dfrac{1}{2+\sqrt{3}}\right)^x+\left(\dfrac{1}{2-\sqrt{3}}\right)^x$ 的奇偶性.

6. 求函数 $f(x)=\sin^2 2x$ 的周期.

7. 求由函数 $f(x)=\dfrac{1}{1+x}$所确定的复合函数$f[f(x)]$的定义域.

8*. 求函数 $y=\lg(\sin\frac{\pi}{x})$的定义域.

1.2 初等函数

1.2.1 基本初等函数

基本初等函数是指:幂函数、指数函数、对数函数、三角函数、反三角函数和常数这 6 类函数.这些函数在中学的数学课程里已