高等学校数学学习辅导教材

高等数学

全程学习指导与解题能力训练

国家理工科基地创名牌课程课题组组编

同济·高等数学第四版

王丽燕　秦禹春／编著

大连理工大学出版社

高等学校数学学习辅导教材

高等数学
全程学习指导与解题训练

（同济·高等数学第四版）

国家理科基地创名牌课程课题组组编

王丽燕　秦禹春　编著

大连理工大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

高等数学全程学习指导与解题训练/王丽燕,秦禹春编著.
大连:大连理工大学出版社,2000.11(2001.11 重印)
(高等学校数学学习辅导教材)
ISBN 7-5611-1831-7

Ⅰ.高… Ⅱ.①王… ②秦… Ⅲ.高等数学-高等学校-教学参考资料 Ⅳ.O13

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2000)第 56052 号

大连理工大学出版社出版发行
大连市凌水河 邮政编码 116024
电话:0411-4708842 传真:0411-4701466
E-mail:dutp@mail.dlptt.ln.cn
URL:http://www.dutp.com.cn
大连理工印刷有限公司印刷

开本:850 毫米×1168 毫米 1/32 字数:600 千字 印张:18.875
印数:28001—40000 册
2000 年 11 月第 1 版 2001 年 11 月第 4 次印刷

责任编辑:刘 杰 责任校对:王强源
封面设计:王福刚

定价:22.00 元

前　言

《高等数学》是大学工科、经济学、管理学等门类各专业学生必修的基础课，也是硕士研究生入学考试的一门必考科目。为了帮助理工科学生学好《高等数学》、扩大课堂信息量、提高应试能力，我们根据原国家教委审订的高等工科院校“高等数学课程教学基本要求”(教学大纲)，又根据教育部 2000 年制定的“全国硕士研究生入学统一考试数学考试大纲”的要求，融学习指导和考研为一体编写了这本书。

本书按照被全国许多院校采用的同济大学数学教研室主编的《高等数学》(第四版)(高等教育出版社)的章节顺序，分为十二章，每章均设计了四个板块，即

一、知识点考点精要　列出基本概念、重要定理和主要内容，突出必须掌握或考试出现频率高的核心知识。

二、典型题真题精解　我们从有关书籍和历年研究生入学考试试题中精选了有代表性的例题进行详尽的分析和解析，部分例题还给出了有别于常规思路和解法以活跃思路。这些例题涉及内容广、类型多、技巧性强，旨在提高分析能力，掌握基本概念和理论，开拓解题思路，熟练掌握解题技巧。

三、教材习题同步解析　我们针对《高等数学》(同济)书中的习题，几乎给出了全部的解，它无非方便于读者对照和分析。值得提醒一下，解题能力需要亲自动手，通过本身的实践，才能逐步锻

炼出来，从而不断提高水平。

四、模拟试题自测 自测旨在进一步强化解题训练，反映考试的重点、难点，培养综合能力和应变能力，巩固和提高复习效果。

书中包含了1987年～2000年研究生入学考试数学一、数学二的几乎全部试题。虽然每年的试题都有变化，但是知识的范围和结构基本类同。同时我们还可看出：试题与科学的思维方式，熟练的技巧，涉及知识的使用意识等密切相关。因此，深入掌握基本概念、基础理论、常用方法是至关重要的，精读、学会解决一定数量的范例不失为应试的有效途径。

本书得到了“国家理科基地创建名牌课程”项目经费的资助，还得到国家理科基地国内访问学者：沈阳工业学院沙萍、长春大学敬石心副教授的热情帮助，得到了大连大学教务处和数学系的鼓励，大连理工大学出版社给予了有力的支持，编者在此向他们一并表示衷心的感谢。

限于编者的水平，错漏不当在所难免，诚恳期望同行和读者不吝批评指正。

编　者

浙江大学数学系

2000年6月

目　　录

第一章　函数与极限

一　知识点考点精要

函数的概念，函数的特性(单调性、奇偶性、周期性和有界性)，复合函数、反函数、初等函数的概念。数列与函数极限的定义及它们的性质，函数的单侧极限，极限的四则运算，极限存在的两个准则，两个重要极限。无穷大与无穷小的概念及关系，无穷小的性质及无穷小的比较。函数连续的概念，函数间断点的类型，初等函数的连续性，闭区间上连续函数的性质(有界性、最大值最小值定理和介值定理)。

(一)几个重要概念

函数与反函数的概念以及函数的单调性、奇偶性、周期性在中学数学中就已经很熟悉了，这里不再赘述。

1.函数的有界性

设 $f(x)$ 的定义域为 D，数集 $X\subset D$，如果存在数 K，对于所有的 $x\in X$，恒有

$$f(x)\leqslant K \quad (f(x)\geqslant K)$$

则称函数 $f(x)$ 在 X 上是有上界(下界)的。如果 $f(x)$ 在 X 上既有上界又有下界，则称它在 X 上有界。否则称它在 X 上无界。显然函数 $f(x)$ 在 X 上有界的充要条件是，存在一个正数 M，使得对于所有的 $x\in X$，总有

$$|f(x)|\leqslant M$$

2.初等函数

(1)基本初等函数。下列函数称为基本初等函数：

Ⅰ.幂函数 $y=x^{\mu}$(μ 为常数)

Ⅱ.指数函数 $y=a^{x}$(a 是常数，$a>0$ 且 $a\neq 1$)

Ⅲ.对数函数 $y=\log_{a}x$(a 是常数，$a>0$ 且 $a\neq 1$)

Ⅳ. 三角函数 $y=\sin x, y=\cos x, y=\tan x, y=\cot x, y=\sec x, y=\csc x$

Ⅴ. 反三角函数 $y=\arcsin x, y=\arccos x, y=\arctan x, y=\text{arccot}\, x$

(2)复合函数。若函数 $y=f(u)$的定义域为 D_1，函数 $u=\varphi(x)$的定义域为 D_2，值域为 $W_2=\{u\mid u=\varphi(x), x\in D_2\}$且 $W_2\cap D_1\neq\varnothing$，则 $y=f[\varphi(x)]$确定了一个函数，它称为由 $y=f(u), u\in D_1$ 和 $u=\varphi(x), x\in D_2$ 复合而成的复合函数。f 又称为外函数，φ 称为内函数，x 为自变量，y 为因变量，u 为中间变量。

(3)初等函数。由常数和基本初等函数经过有限次的四则运算和复合步骤所构成的，并可用一个式子表示的函数，称为初等函数。

3. 数列极限的定义(ε—N 定义)

$$\lim_{n\to\infty}x_n=a\Leftrightarrow\overset{(1)}{\forall}\ \varepsilon>0,\exists\overset{(2)}{\ }N\overset{(3)}{\ni}\ n>N\Rightarrow|x_n-a|<\varepsilon$$

4. 函数极限的定义(ε—δ 定义，ε—X 定义)

$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A\Leftrightarrow\forall\ \varepsilon>0,\exists\ \delta>0\ni 0<|x-x_0|<\delta\Rightarrow|f(x)-A|<\varepsilon$

$\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=A\Leftrightarrow\forall\ \varepsilon>0,\exists\ X>0\ni|x|>X\Rightarrow|f(x)-A|<\varepsilon$

注意　1°在上述定义中，若特殊地取 $A=0$，则函数 $f(x)$叫做 $x\to x_0$ 或 $x\to\infty$时的无穷小，即无穷小是以 0 为极限的函数。0 是惟一的作为无穷小的数。

2°在$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$ 的定义中，x 是既从 x_0 的左侧也从 x_0 的右侧趋于 x_0 的。若仅考虑 x 从 x_0 的左侧趋于 x_0(记做 $x\to x_0-0$ 或 $x\to x_0^-$)，此时把 $0<|x-x_0|<\delta$ 改为 $x_0-\delta<x<x_0$，那么 A 就叫做 $f(x)$当 $x\to x_0$ 时的左极限，记做

$$\lim_{x\to x_0^-}f(x)=A\quad 或\quad f(x_0-0)=A$$

若仅考虑 x 从 x_0 的右侧趋于 x_0(记做 $x\to x_0+0$ 或 $x\to x_0^+$)，此时把 $0<|x-x_0|<\delta$ 改为 $x_0<x<x_0+\delta$，那么 A 就叫做 $f(x)$当 $x\to x_0$ 时的右极限，记做

$$\lim_{x\to x_0^+}f(x)=A\quad 或\quad f(x_0+0)=A$$

说明：(1)符号“∀ ”表示“对于任意给定的”。

(2)符号“∃ ”表示“存在”。

(3)符号“∋”表示“使得”.

3°研究 $x\to x_0$ 时 $f(x)$ 的极限，是为了研究在自变量 $x\to x_0$ 的变化过程中 $f(x)$ 的性态，此时 $f(x)$ 有无极限与 $f(x)$ 在点 x_0 有无定义完全无关。即使 $f(x)$ 在点 x_0 有定义，在讨论 $x\to x_0$ 时 $f(x)$ 的极限的过程中，函数值 $f(x_0)$ 不起任何作用，因此在定义中要求 $0<|x-x_0|<\delta$。

4°在 $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=A$ 的定义中，若 $x>0$ 且无限增大，则只要把定义中的 $|x|>X$ 改为 $x>X$ 即可得 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=A$ 的定义。同样若 $x<0$ 而 $|x|$ 无限增大，则只要把 $|x|>X$ 改为 $x<-X$ 便得 $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=A$ 的定义。

5. 无穷大的定义（M—$\delta(X)$ 定义）

$\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\(x\to\infty)}} f(x)=\infty\Leftrightarrow\forall\ M>0,\exists\ \delta>0(X>0)\ni 0<|x-x_0|<\delta(|x|>X)\Rightarrow |f(x)|>M$

注意　1° $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\(x\to\infty)}} f(x)=\infty$，此时 $f(x)$ 的极限是不存在的，为了反映 $|f(x)|$ 无限增大这种性态，也说成 $f(x)$ 的极限为无穷大。

2°在定义中把 $|f(x)|>M$ 换成 $f(x)>M$（或 $f(x)<-M$），就记做 $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\(x\to\infty)}} f(x)=+\infty$（或 $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\(x\to\infty)}} f(x)=-\infty$）。

（二）极限存在的判别法

1. $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A\Leftrightarrow f(x_0-0)=f(x_0+0)=A$

2. $\lim^{(1)}f(x)=A\Leftrightarrow f(x)=A+\alpha$，其中 α 为无穷小量。

3. 两边夹定理：若数列 $\{x_n\}$，$\{y_n\}$，$\{z_n\}$ 满足

(1) $y_n\leqslant x_n\leqslant z_n\quad(n=1,2,3,\cdots)$；

(2) $\lim\limits_{n\to\infty}y_n=a$，$\lim\limits_{n\to\infty}z_n=a$，则数列 $\{x_n\}$ 的极限存在，且 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$。这一准则可以推广到函数极限情形。

4. 单调有界数列必有极限。

（三）极限的性质

1. 极限的惟一性　数列 $\{x_n\}$ 不能收敛于两个不同的极限。

说明：(1)符号 lim 表示 $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\(x\to\infty)}}$，即对于 $x\to x_0$ 或 $x\to\infty$ 自变量这两种变化过程均成立。

2. 收敛数列的有界性　收敛数列必有界。

3. 收敛数列与其子列间的关系　收敛数列的任一子列必收敛，且极限相同。

4. 保号性　(1)若$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$，且$A>0$(或$A<0$)，则必存在$x_0$的某一去心邻域$\dot{U}(x_0,\delta)$，当$x\in\dot{U}(x_0,\delta)$时，$f(x)>0$(或$f(x)<0$)。

(2)若在x_0的某一去心邻域内$f(x)\geqslant 0$(或$f(x)\leqslant 0$)，且$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$，则$A\geqslant 0$(或$A\leqslant 0$)。

5. 保序性　若$f(x)\geqslant g(x)$，则$\lim f(x)\geqslant\lim g(x)$。

(四)极限的运算

若$\lim f(x)=A$，$\lim g(x)=B$，则

1. $\lim[f(x)\pm g(x)]=\lim f(x)\pm\lim g(x)=A\pm B$

$\lim[f(x)\cdot g(x)]=\lim f(x)\cdot\lim g(x)=AB$

上述情形均可以推广到有限个函数的和、差、积的情形，特别地

$$\lim[cf(x)]=c\cdot\lim f(x)$$

且有限个无穷小的和、差、积仍为无穷小，有界函数与无穷小之积仍为无穷小。

2. $\lim\dfrac{f(x)}{g(x)}=\dfrac{\lim f(x)}{\lim g(x)}=\dfrac{A}{B}\quad(B\neq 0)$

上述四则运算对数列情形依然成立。

3. 若$\lim\limits_{x\to x_0}\varphi(x)=a$，$\lim\limits_{u\to a}f(u)=A$，则$\lim\limits_{x\to x_0}f[\varphi(x)]=\lim\limits_{u\to a}f(u)=A$。

(五)两个重要极限

1. $\lim\limits_{\square\to 0}\dfrac{\sin\square}{\square}=1$

2. $\lim\limits_{\square\to 0}(1+\square)^{\frac{1}{\square}}=\mathrm{e}$　或　$\lim\limits_{\Delta\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{\Delta}\right)^{\Delta}=\mathrm{e}$

(六)无穷小的比较

若α和β都是在同一个自变量的变化过程中的无穷小，且$\alpha\neq 0$，则

(1)若$\lim\dfrac{\beta}{\alpha}=0$，则说$\beta$是比$\alpha$高阶的无穷小，记做$\beta=o(\alpha)$。

(2)若$\lim\dfrac{\beta}{\alpha}=\infty$，则说$\beta$是比$\alpha$低阶的无穷小。

(3)若 $\lim \frac{\beta}{\alpha^k}=c\neq 0,k>0$,则说 β 是关于 α 的 k 阶无穷小。

(4)若$\lim\frac{\beta}{\alpha}=1$,则说 β 与 α 是等价无穷小,记做 $\alpha\sim\beta$。

(七)求极限问题方法总结

1. 用极限的定义证明极限

2. 初等函数在定义域内求极限$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=f(x_0)$

例如:$\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^2+2x+5}{x^2+1}=\frac{1+2+5}{1+1}=4$

3. 利用无穷小与无穷大的互倒关系

例如:求$\lim\limits_{x\to 2}\frac{\sqrt{2+x}}{x-2}$

因$\lim\limits_{x\to 2}\frac{x-2}{\sqrt{x+2}}=0$,所以$\lim\limits_{x\to 2}\frac{\sqrt{2+x}}{x-2}=\infty$

4. 对有理分式函数,当 $x\to\infty$时,用 x 的高次方项去除分子、分母。

例如:$\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1+x-3x^3}{1+x+3x^3}=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\frac{1}{x^3}+\frac{1}{x^2}-3}{\frac{1}{x^3}+\frac{1}{x^2}+3}=-1$

一般地

$$\lim_{x\to\infty}\frac{a_0x^m+a_1x^{m-1}+\cdots+a_m}{b_0x^n+b_1x^{n-1}+\cdots+b_n}=\begin{cases}\frac{a_0}{b_0}, & 当\ n=m\\ 0, & 当\ n>m\\ \infty, & 当\ n<m\end{cases}$$

5. 利用等价无穷小的代换或无穷小的性质

例如:$\lim\limits_{x\to 0}\frac{\tan 2x}{\sin 5x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{2x}{5x}=\frac{2}{5}$

这里注意到当 $x\to 0$ 时,$\tan 2x\sim 2x,\sin 5x\sim 5x$。一般常用的等价无穷小有:当 $x\to 0$ 时,$x\sim\sin x\sim\tan x\sim\arcsin x\sim\arctan x\sim\ln(1+x)\sim e^x-1,1-\cos x\sim\frac{x^2}{2},(1+x)^a-1\sim ax,a^x-1\sim x\ln a(a>0,a\neq 1)$

例如:$\lim\limits_{x\to 0}x\sin\frac{1}{x}=0$,注意到 x 是无穷小量,$\sin\frac{1}{x}$是有界函数

6. 分解因式,约去使分母极限为 0 的公因式

例如：$\lim\limits_{x\to-2}\dfrac{x^3+3x^2+2x}{x^2-x-6}=\lim\limits_{x\to-2}\dfrac{x(x+1)(x+2)}{(x+2)(x-3)}=\lim\limits_{x\to-2}\dfrac{x(x+1)}{x-3}=-\dfrac{2}{5}$

7. 乘以共轭根式，约去使分母极限为 0 的公因式

例如：
$$\lim_{x\to1}\frac{\sqrt{3-x}-\sqrt{1+x}}{x^2-1}=\lim_{x\to1}\frac{(3-x)-(1+x)}{(x^2-1)(\sqrt{3-x}+\sqrt{1+x})}$$
$$=\lim_{x\to1}\frac{-2}{(x+1)(\sqrt{3-x}+\sqrt{1+x})}$$
$$=-\frac{1}{2\sqrt{2}}$$

8. 利用两个重要极限

例如：$\lim\limits_{x\to0}x\cot x=\lim\limits_{x\to0}\cos x\cdot\dfrac{x}{\sin x}=1$

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{1+x}{x}\right)^{2x}=\lim_{x\to\infty}\left[\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}\right]^2=\mathrm{e}^2$$

以后还将学到

9. 利用罗必达法则求极限

10. 利用定积分的定义求极限

11. 利用级数收敛的必要条件求极限

（八）函数的连续性

1. 函数连续的三个等价定义

若函数 $f(x)$ 在点 x_0 的某一邻域内有定义，则 $f(x)$ 在点 x_0 处连续 $\Leftrightarrow \lim\limits_{\Delta x\to0}\Delta y=0\Leftrightarrow\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=f(x_0)\Leftrightarrow\forall\,\varepsilon>0,\exists\,\delta>0\ni|x-x_0|<\delta\Rightarrow|f(x)-f(x_0)|<\varepsilon$

2. 间断点

不连续的点叫做间断点。

$$\text{间断点}\begin{cases}\text{第一类间断点：}f(x_0-0)\text{与}f(x_0+0)\text{都存在}\begin{cases}\text{可去间断点：}f(x_0-0)=f(x_0+0)\\\text{跳跃间断点：}f(x_0-0)\neq f(x_0+0)\end{cases}\\\text{第二类间断点}\end{cases}$$

3. 连续函数的运算

连续函数的和、差、积、商（分母不为零）均为连续函数；连续函数的反函数、复合函数仍为连续函数。一切初等函数在定义域内都是连续的。

4.闭区间上连续函数的性质

(1)最大值和最小值定理。在闭区间上连续的函数在该区间上一定有最大值和最小值。

(2)有界性定理。在闭区间上连续的函数一定在该区间上有界。

(3)零点定理。设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，且 $f(a)$ 与 $f(b)$ 异号(即 $f(a)f(b)<0$)，则在 (a,b) 内至少有 $f(x)$ 的一个零点，即至少有一点 $\xi\in(a,b)$ 使 $f(\xi)=0$。

(4)介值定理。设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，且在这区间的端点取不同的函数值 $f(a)=A$ 及 $f(b)=B$，则对于 A 与 B 之间的任意一个数 C，在 (a,b) 内至少有一点 ξ，使得

$$f(\xi)=C\quad(a<\xi<b)$$

特别地，在闭区间上连续的函数必取得介于最大值 M 与最小值 m 之间的任何值。

二　典型题真题精解

【例1】 设 $f(x)=e^{x^2}$，$f[\varphi(x)]=1-x$，且 $\varphi(x)\geqslant0$，求 $\varphi(x)$ 及其定义域(1988年攻读硕士学位研究生入学考试试题，以后简称试题)。

解　由 $f(x)=e^{x^2}$ 及 $f[\varphi(x)]=1-x$ 有 $e^{\varphi^2(x)}=1-x$，所以 $\varphi^2(x)=\ln(1-x)$。又 $\varphi(x)\geqslant0$，得 $\varphi(x)=\sqrt{\ln(1-x)}$。令 $\ln(1-x)\geqslant0$ 得 $1-x\geqslant1$，从而 $x\leqslant0$ 即为 $\varphi(x)$ 的定义域。

【例2】 求极限 $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\sqrt{4x^2+x-1}+x+1}{\sqrt{x^2+\sin x}}$　(1997年试题)

解　原式 $=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\sqrt{4+\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{x^2}}-1-\dfrac{1}{x}}{\sqrt{1+\dfrac{\sin x}{x^2}}}=1$

这个问题的解法是将分子分母同除以 x 的最高次方项 $-x$，请读者想想看，为什么是 $-x$ 而不是 x 呢?

【例3】 求极限 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{3\sin x+x^2\cos\dfrac{1}{x}}{(1+\cos x)\ln(1+x)}$　(1997年试题)

解　原式$=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1}{1+\cos x}\lim\limits_{x\to0}\dfrac{3\sin x+x^2\cos\dfrac{1}{x}}{\ln(1+x)}$

$$=\frac{1}{2}\lim_{x\to0}\frac{\dfrac{3\sin x}{x}+x\cos\dfrac{1}{x}}{\dfrac{\ln(1+x)}{x}}=\frac{1}{2}\lim_{x\to0}\frac{\dfrac{3\sin x}{x}+x\cos\dfrac{1}{x}}{\ln(1+x)^{\frac{1}{x}}}=\frac{3}{2}$$

这里的第二步是将分子分母同时除以 x，再利用重要极限和无穷小的性质，也可以利用 $\ln(1+x)\sim x$ 进行等价无穷小代换再得到结果。

【例 4】　已知$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sqrt{1+f(x)\sin x}-1}{e^{3x}-1}=2$，求$\lim\limits_{x\to0}f(x)$。

解　由于 $e^{3x}-1\sim3x\ (x\to0)$，从而 $f(x)\sin x\to0\ (x\to0)$，于是 $\sqrt{1+f(x)\sin x}-1\sim\dfrac{1}{2}f(x)\sin x$，从而

$$原式=\lim_{x\to0}\frac{\dfrac{1}{2}f(x)\sin x}{3x}=\lim_{x\to0}\frac{f(x)}{6}=2$$

所以

$$\lim_{x\to0}f(x)=12$$

【例 5】　求极限$\lim\limits_{x\to1}\dfrac{\sqrt[3]{x^2}-2\sqrt[3]{x}+1}{(x-1)^2}$

解　令 $\sqrt[3]{x}=t$，则

$$原式=\lim_{t\to1}\frac{t^2-2t+1}{(t^3-1)^2}=\lim_{t\to1}\frac{1}{(t^2+t+1)^2}=\frac{1}{9}$$

【例 6】　求$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{n^2+n+1}+\dfrac{2}{n^2+n+2}+\cdots+\dfrac{n}{n^2+n+n}\right)$

解　显然 $\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{k}{(n+1)^2}\leqslant\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{k}{n^2+n+k}\leqslant\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{k}{n^2}$

又 $\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{k}{(n+1)^2}=\dfrac{n}{2(n+1)}$，$\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{k}{n^2}=\dfrac{n+1}{2n}$

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{(n+1)^2}=\lim_{n\to\infty}\frac{n}{2(n+1)}=\frac{1}{2}$$

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{n^2}=\lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{2n}=\frac{1}{2}$$

由两边夹定理知　$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{k}{n^2+n+k}\right)=\dfrac{1}{2}$。

【例 7】 设 $x_1=10, x_{n+1}=\sqrt{x_n+6}$　$(n=1,2,\cdots)$，求证数列 $\{x_n\}$ 的极限存在，并求此极限。　　(1996 年试题)

证明　先用数学归纳法证明数列 $\{x_n\}$ 是单调减小的。

由 $x_1=10, x_{n+1}=\sqrt{x_n+6}$ 知 $x_2=\sqrt{10+6}=4$，有 $x_1>x_2$，即 $n=1$ 时成立。假设 $n=k$ 时 $x_k>x_{k+1}$ 成立，由 $x_{k+1}=\sqrt{x_k+6}>\sqrt{x_{k+1}+6}=x_{k+2}$ 知 $n=k+1$ 时不等式仍成立。所以对任意的 n，不等式 $x_n>x_{n+1}$ 总成立，即 $\{x_n\}$ 是单调减小数列。

又 $x_{n+1}=\sqrt{x_n+6}>0$ 知，$\{x_n\}$ 有下界

由单调有界数列必有极限知，数列 $\{x_n\}$ 的极限存在。不妨设 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$，由 $x_{n+1}=\sqrt{x_n+6}$ 有 $\lim\limits_{n\to\infty}x_{n+1}=\sqrt{\lim\limits_{n\to\infty}x_n+6}$，所以 $a=\sqrt{a+6}$ 得 $a=3$($a=-2$ 舍之)，故 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=3$。

【例 8】 求函数 $f(x)=(1+x)^{\frac{x}{\tan\left(x-\frac{\pi}{4}\right)}}$ 在区间 $(0,2\pi)$ 内的间断点，并判别其类型。　　(1998 年试题)

解　$f(x)$ 在 $(0,2\pi)$ 内的间断点为 $x=\frac{\pi}{4},\frac{3\pi}{4},\frac{5\pi}{4},\frac{7\pi}{4}$。

由于 $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}^+}f(x)=+\infty$，$\lim\limits_{x\to\frac{5\pi}{4}^+}f(x)=+\infty$

故 $x=\frac{\pi}{4},\frac{5\pi}{4}$ 为第二类的无穷间断点

又 $\lim\limits_{x\to\frac{3\pi}{4}}f(x)=1$，$\lim\limits_{x\to\frac{7\pi}{4}}f(x)=1$

故 $x=\frac{3\pi}{4},\frac{7\pi}{4}$ 为第一类的可去间断点。

【例 9】 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，$f(a)=f(b)$，证明存在 $x_0\in[a,b]$，使 $f(x_0)=f\left(x_0+\frac{b-a}{2}\right)$。

证明　令 $F(x)=f(x)-f\left(x+\frac{b-a}{2}\right)$，则 $F(x)$ 在 $\left[a,\frac{a+b}{2}\right]$ 上连续，且 $F(a)=f(a)-f\left(\frac{a+b}{2}\right)$，$F\left(\frac{a+b}{2}\right)=f\left(\frac{a+b}{2}\right)-f(b)$。由 $f(a)=f(b)$ 知，若 $f(a)=f\left(\frac{a+b}{2}\right)$，则取 $x_0=a$ 或 $x_0=\frac{a+b}{2}$ 即有 $f(x_0)=f\left(x_0+\frac{b-a}{2}\right)$ 成立。