专利申请受理通知书

申 请 号:02114177.0

发明名称:以纲、举、目、张为栏目编写各类教学辅导用书的方法

中华人民共和国国家知识产权局

高三总复习

经典学案

高考通鉴

总主编 刘林雄

能奔腾的，不再颓废

上理想的大学，不再是梦

只因为，有《通鉴》伯乐的呵护

数学卷

湖南大学出版社

3＋X全能导航

专利申请受理通知书

申 请 号:02114177.0

发明名称:以纲、举、目、张为栏目编写各类教学辅导用书的方法

中华人民共和国国家知识产权局

高三总复习

经典学案

高考通鉴

总主编 刘林雄

数学卷

本册主编:陈兴祥

副 主 编:付红卫 晏桂保 周 灏

编 撰:陈小光 黄启光 罗时九 李岳山 徐正雄 邹水根 胡荣六 杨 晖 黄爱武 吴爱斌 向良辉 杨 亮 付喜余 丁岳龙

湖南大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

高考通鉴——高三总复习经典学案·数学卷/陈兴祥主编.—长沙:湖南大学出版社,2002

ISBN 7—81053—504—8

Ⅰ.高...　Ⅱ.陈...　Ⅲ.数学课—高中—升学参考资料　Ⅳ.G634

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2002)第 044742 号

高考通鉴——高三总复习经典学案·数学卷

本册主编　**陈兴祥**

□**责任编辑**　历　圣
□**出版发行**　湖南大学出版社
社址　长沙市岳麓山　邮码　410082
电话　0731—8821691　0731—8821315
□**经　　销**　湖南省新华书店
□**印　　装**　河南省瑞光印务股份有限公司

□**开本**　880×1230　16 开　□**印张**　15.75　□**字数**　680 千
□**版次**　2002 年 8 月第 1 版　□2002 年 8 月第 1 次印刷
□**书号**　ISBN 7—81053—504—8/G·123
□**定价**　19.00 元

解译“纲举目张”

——序《高考通鉴》

高考总复习是一门学问，也是一门科学。如何把这门学问做好？如何把这门科学应用到复习实践中去？这一直是广大教育工作者孜孜以求、亟待完善的课题。多年来，这方面的工具书多如牛毛，滥竽充数者也是不计其数。其中稍好一些的也是菁中有芜，良中夹莠，广大师生即使从中获得了一些教益，也枉费了很多时间精力。为此，我们以饱满的科学热情和忘我的奉献精神，下定决心，刻苦钻研，终于发现了高考总复习这一复杂过程中的深刻内涵和科学规律——纲举目张，为广大师生打造出具有发明创造性质的力作：《高考通鉴》。

《高考通鉴》的精髓是：一纲举，万目张。

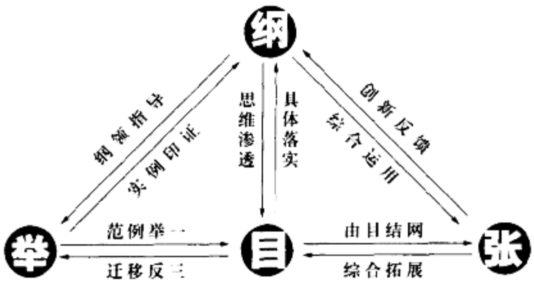
纲： 以考纲和教材为纲，系统梳理知识，全面诠释各个考点，阐明能力要求。

举： 以往年如何考为举，列举高考范题，例证各个考点，引领训练内容。

目： 以来年考什么为目，扣准各个考点，强化提升能力，训练押在高考题上。

张： 以发散思维为张，沟通学科和跨学科综合，拓展各个考点，熟练掌握解题技巧。

其科学体系如图所示：



人们一提到“通鉴”，便自然而然地联想到了《资治通鉴》这部传世镇国宝典。我们把这套高考复习丛书命名为《高考通鉴》是因为我们预测到它在莘莘学子中产生的影响，与《资治通鉴》在政要们中产生的巨大影响将有异曲同工之妙。

由于时间仓促，书中难免有遗漏和错误，欢迎大家指教。

编　者

目录

纲 高考命题纲要 考点梳理
举 高考命题举例 考点范题
目 高考命题传真 考点预测
张 高考X导航 考点聚焦

考点解读与检测 1 集合 …… 1
考点解读与检测 2 映射与函数 …… 3
考点解读与检测 3 函数的解析式与定义域 …… 6
考点解读与检测 4 函数的值域 …… 8
考点解读与检测 5 函数的奇偶性与周期性 …… 11
考点解读与检测 6 函数的单调性 …… 13
考点解读与检测 7 反函数 …… 16
考点解读与检测 8 二次函数 …… 19
考点解读与检测 9 幂、指、对数式 …… 22
考点解读与检测 10 幂函数、指数函数与对数函数 …… 24
考点解读与检测 11 函数的最值 …… 28
考点解读与检测 12 函数的图像 …… 31
考点解读与检测 13 指数、对数方程 …… 34
考点解读与检测 14 任意角的三角函数 …… 37
考点解读与检测 15 三角函数的定义域和值域 …… 40
考点解读与检测 16 同角三角函数关系与诱导公式 …… 43
考点解读与检测 17 三角函数的图像 …… 46
考点解读与检测 18 三角函数的性质(一) …… 50
考点解读与检测 19 三角函数的性质(二) …… 53
考点解读与检测 20 三角函数式的化简 …… 56
考点解读与检测 21 三角函数式的求值 …… 59
考点解读与检测 22 三角恒等式的证明 …… 62
考点解读与检测 23 三角形中的求值与证明 …… 65
考点解读与检测 24 解斜三角形 …… 69
考点解读与检测 25 三角不等式的证明 …… 73
考点解读与检测 26 三角函数的最值问题 …… 75
考点解读与检测 27 反三角函数概念、图像和性质 …… 79
考点解读与检测 28 反三角函数的运算 …… 81
考点解读与检则 29 简单的三角方程 …… 84
考点解读与检测 30 不等式的概念与性质 …… 86
考点解读与检测 31 有理不等式的解法 …… 89
考点解读与检测 32 绝对值和无理不等式的解法 …… 92
考点解读与检测 33 指数对数不等式的解法 …… 95
考点解读与检测 34 不等式的证明——比较法 …… 98
考点解读与检测 35 不等式的证明(综合法、分析法) …… 101
考点解读与检测 36 不等式证明(反证法、放缩法等) …… 104
考点解读与检测 37 不等式的应用 …… 106
考点解读与检测 38 数列的概念 …… 108
考点解读与检测 39 等差数列 …… 111
考点解读与检测 40 等比数列 …… 114
考点解读与检测 41 等差与等比数列的综合运用 …… 117
考点解读与检测 42 特殊数列求和 …… 120
考点解读与检测 43 数列极限意义及运算 …… 123
考点解读与检测 44 数列极限的应用 …… 126
考点解读与检测 45 数学归纳法 …… 129

考点解读与检测 46　归纳、猜想、证明 ………… 131
考点解读与检测 47　复数的概念 ………………… 133
考点解读与检测 48　复数的三角形式 ………… 135
考点解读与检测 49　复数的几何意义 ………… 137
考点解读与检测 50　复数的运算 ……………… 139
考点解读与检测 51　在复数集中解方程 ……… 141
考点解读与检测 52　复数运算的几何意义 …… 143
考点解读与检测 53　两个基本原理和排列组合的概念 …………………… 145
考点解读与检测 54　排列的应用 ……………… 147
考点解读与检测 55　组合的应用 ……………… 149
考点解读与检测 56　排列、组合的综合应用 … 151
考点解读与检测 57　二项式定理(一) ………… 153
考点解读与检测 58　二项式定理(二) ………… 155
考点解读与检测 59　平面及其基本性质 ……… 158
考点解读与检测 60　空间两条直线 …………… 160
考点解读与检测 61　直线与平面 ……………… 162
考点解读与检测 62　平面与平面 ……………… 164
考点解读与检测 63　三垂线定理及其逆定理 ………………………… 166
考点解读与检测 64　空间的角 ………………… 168
考点解读与检测 65　空间距离 ………………… 170
考点解读与检测 66　棱　柱 …………………… 173
考点解读与检测 67　棱　锥 …………………… 176
考点解读与检测 68　棱　台 …………………… 179
考点解读与检测 69　圆柱、圆锥、圆台 ……… 181
考点解读与检测 70　球 ………………………… 184
考点解读与检测 71　侧面展开与折叠问题 …… 186
考点解读与检测 72　平面直角坐标系的基本公式 …………………… 189
考点解读与检测 73　直线方程的几种形式 …… 191
考点解读与检测 74　两直线的位置关系 ……… 194
考点解读与检测 75　有关对称问题 …………… 196
考点解读与检测 76　圆的方程 ………………… 198
考点解读与检测 77　直线与圆、圆与圆的位置关系 ……………… 200
考点解读与检测 78　曲线与方程、充要条件 … 203
考点解读与检测 79　椭圆 ……………………… 205
考点解读与检测 80　双曲线 …………………… 207
考点解读与检测 81　抛物线 …………………… 210
考点解读与检测 82　坐标平移 ………………… 212
考点解读与检测 83　直线与圆锥曲线的位置关系(Ⅰ) ……………… 214
考点解读与检测 84　直线与圆锥曲线的位置关系(Ⅱ) ……………… 217
考点解读与检测 85　圆锥曲线有关最值问题 ………………………… 219
考点解读与检测 86　轨迹问题(Ⅰ) ………… 221
考点解读与检测 87　轨迹问题(Ⅱ) ………… 224
考点解读与检测 88　曲线的参数方程 ……… 226
考点解读与检测 89　直线的参数方程 ……… 228
考点解读与检测 90　圆锥曲线的参数方程及其应用 …………………… 230
考点解读与检测 91　极坐标系 ……………… 232
考点解读与检测 92　曲线的极坐标方程及其应用 ………………………… 234
综合测试(一) ……………………………… 237
综合测试(二) ……………………………… 239
综合测试(三) ……………………………… 241
参考答案 …………………………………… 243

考点解读与检测 1 集　　合

纲 高考命题纲要 考点梳理

考点梳理

一、基本考点

1. 集合的概念及集合中元素的三个特征

一组对象的全体形成一个集合，集合里的各个对象叫做集合的元素，集合的元素具有三个特征：

①确定性：对于一个给定的集合，任何一个对象或者是这个集合中的元素，或者不是它的元素，这是集合的最基本特征.

②互异性：集合中的任何两个元素都是能区分的(即互不相同的)，相同的对象归入任何一个集合时，只能算作这个集合中的一个元素.

③无序性：在一个集合中，通常不考虑它的元素之间的顺序，也就是说，由 a,b 两个元素组成的集合与由 b,a 两个元素组成的集合是相同的.

2. 集合的常用表示方法

常用的有列举法，描述法，区间表示法和图示法.

有限集合常用列举法，无限集合常用描述法或区间法.

3. 元素与集合、集合与集合的关系

元素与集合的关系是从属关系，用符号“$\in$”与“$\notin$”表示；

集合与集合的关系是包含关系，用符号“$\subseteq$”.“$\subset$”或“$\not\subseteq$”,“$\not\subset$”表示.

4. 集合的运算

(1)并集：$A\cup B=\{x|x\in A$，或 $x\in B\}$；

(2)交集：$A\cap B=\{x|x\in A$，且 $x\in B\}$；

(3)全集与补集：①全集用字母 I 表示；

②补集：$\overline{A}=\{x|x\in I$，且 $x\notin A\}$.

二、考点综合

1. 重点难点

集合的交、并、补的综合运算及集合与集合的关系是集合的重点内容，在进行运算和处理集合与集合的关系时，要注意下面结论的应用：

①$\overline{A\cap B}=\overline{A}\cup\overline{B}$，

$\overline{A\cup B}=\overline{A}\cap\overline{B}$，

②$A\subseteq B\Leftrightarrow A\cap B=A$，$A\subseteq B\Leftrightarrow A\cup B=B$.

③由 n 个元素组成的集合，其子集个数为 2^n，即是 $C_n^0+C_n^1+C_n^2+\cdots+C_n^n=2^n$.

④空集 Φ 是一个特殊的集合，是任何集合的子集，在解题中要注意对空集的讨论.

⑤进行集合运算时，要注意发挥数轴、韦恩图的作用，通过数形结合直观地解决问题.

2. 热门考点

集合的内容包括三部分，一是集合的有关概念；二是集合的三种运算；三是集合的运用. 高考中经常把集合的概念、表示和运算放在一起进行考查，因此，复习中要把重点放在准确理解集合的概念、正确使用符号及准确进行集合的运算上.

3. 综合运用

集合的运用主要表现在集合语言和集合的思想的应用方面，及综合方程、不等式、函数、解析几何等有关知识，进行集合的交、并、补运算及其研究集合之间的包含关系. 进行综合应用时，要注意集合中元素的属性，将集合语言翻译成通常的数学语言，然后再用相应的数学知识进行求解.

举 高考命题举例 考点范题

考点范题

[范题 1] 若集合 $A=\{1,3,x\}$，$B=\{x^2,1\}$，$A\cup B=\{1,3,x\}$，满足条件的实数 x 的个数有(　　).

(A)1 个　　(B)2 个

(C)3 个　　(D)4 个

[解析] 由已知条件可知，$x^2=3$ 或 $x^2=x$.

若 $x^2=3$，则 $x=\pm\sqrt{3}$；

若 $x^2=x$，则 $x=0$，或 1.

但注意到集合 B 中元素的互异性，故 $x\neq 1$.

$\therefore x=\pm\sqrt{3}$ 或 0. 故选(C).

[范题 2] (1996・上海)已知集合 $M=\{(x,y)|x+y=2\}$，$N=\{(x,y)|x-y=4\}$，那么集合 $M\cap N$ 为(　　).

(A)$x=3,y=-1$　　(B)$(3,-1)$

(C)$\{3,-1\}$　　(D)$\{(3,-1)\}$

[解析] 因为集合 M 和集合 N 中的代表元素为有序实数对 (x,y)，且 $M\cap N$ 的运算结果一定是集合，所以只有答案(D)正确，选(D).

[范题 3] 下列命题中正确的是(　　).

(A)$2\sqrt{11}\in\{$实数集$\}$　　(B)$2\sqrt{11}\subset\{x|x\leqslant 3\sqrt{5}\}$

(C)$2\sqrt{11}\notin\{x|x\leqslant 3\sqrt{5}\}$　　(D)$2\sqrt{11}\in\{x|x\leqslant 3\sqrt{5}\}$

[解析] 由于集合{实数集}中的元素是集合，而不是数，故(A)

不正确.元素与集合的关系只能用符号$\in$、$\notin$,故(B)不正确.又$2\sqrt{11}=\sqrt{44}<\sqrt{45}=3\sqrt{5}$,故$2\sqrt{11}\in\{x|x\leqslant 3\sqrt{5}\}$.故选(D).

[范题 4]已知集合$M=\{y|y=x^2+1,x\in\mathbf{R}\}$,$N=\{y|y=x+1,x\in\mathbf{R}\}$,那么$M\cap N=$(　　).

(A)(0,1),(1,2)　　(B){(0,1),(1,2)}

(C){y|y=1 或 y=2}　　(D){y|y≥1}

[解析]本题求$M\cap N$,常见到由方程组$\begin{cases}y=x^2+1,\\y=x+1,\end{cases}$解得$\begin{cases}x=0,\\y=1\end{cases}$或$\begin{cases}x=1,\\y=0,\end{cases}$从而选(B).这是错误的,其原因是没有全面注意集合M、N中元素的性质,M和N中的元素都是实数,而不是实数对.从函数观点看,M和N分别表示函数$y=x^2+1(x\in\mathbf{R})$,$y=x+1(x\in\mathbf{R})$的值域,故$M=\{y|y\geqslant 1\}$,$N=\{y|y\in\mathbf{R}\}$,于是$M\cap N=\{y|y\geqslant 1\}$.因此本题选(D).

[范题 5]设全集为$I=\{0,1,2,3,4\}$,集合$A=\{0,1,2,3\}$,集合$B=\{2,3,4\}$,则$\overline{A}\cup\overline{B}=$(　　).

(A){0}　　(B){0,1}

(C){0,1,4}　　(D){0,1,2,3,4}

[解析]解法1:由$\overline{A}=\{4\}$,$\overline{B}=\{0,1\}$,得$\overline{A}\cup\overline{B}=\{0,1,4\}$;

解法2:利用$\overline{A}\cup\overline{B}=\overline{A\cap B}$,先计算出$A\cap B=\{2,3\}$,再得出$\overline{A\cap B}=\{0,1,4\}$.故选(C).

[范题 6]若集合$M=\{x|2x^2-5x-3=0\}$,$N=\{x|mx=1\}$,且$N\subset M$,则实数m的取值集合为________.

[解析]容易得到$M=\{-\frac{1}{2},3\}$,但认为$N=\{\frac{1}{m}\}$是不正确的,因为这里不能确定$m\neq 0$.

当$m=0$时,$N=\Phi$,显然$\Phi\subset M$.

当$m\neq 0$时,$N=\{\frac{1}{m}\}$,那么由$N\subset M$,可得

$\frac{1}{m}=-\frac{1}{2}$,或$\frac{1}{m}=3$,即$m=-2$,或$m=\frac{1}{3}$,

综上可得,m的取值集合为$\{0,-2,\frac{1}{3}\}$.

[范题 7]设$A=\{x|-2<x<-1$或$x>1\}$,$B=\{x|a\leqslant x\leqslant b\}$,$A\cup B=\{x|x>-2\}$,$A\cap B=\{x|1<x\leqslant 3\}$,则$a=$________,$b=$________.

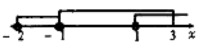


图 1－1

[解析]由$A=\{x|-2<x<-1$或$x>1\}$,及$A\cap B=\{x|1<x\leqslant 3\}$,可推出$B$可能是$\{x|x\leqslant -2$,或$-1\leqslant x\leqslant 3\}$,又由$A\cup B=\{x|x>-2\}$,由图1－1结合数轴可知$B=\{x|-1\leqslant x\leqslant 3\}$,故$a=-1$,$b=3$.

注:解决不等式的解集的交、并、补问题时,要结合数轴,直观处理问题.

[范题 8]已知$P=\{(x,y)|(x+2)^2+(y-3)^2\leqslant 4\}$,$Q=\{(x,y)|(x+1)^2-(y-m)^2<\frac{1}{4}\}$,且$P\cap Q=Q$,求$m$的取值范围.

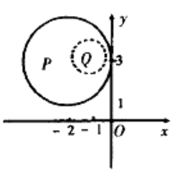


图 1－2

[解析]集合P是以$(-2,3)$为圆心,2为半径的圆域,集合Q是以$(-1,m)$为圆心,$\frac{1}{2}$为半径的圆域(不包括圆周).如图1－2.

由$P\cap Q=Q$,可知$P\subseteq Q$.则由圆与圆的位置关系,可知$\sqrt{(-2+1)^2+(3-m)^2}\leqslant 2-\frac{1}{2}$,

解得$\frac{6-\sqrt{5}}{2}\leqslant m\leqslant\frac{6+\sqrt{5}}{2}$.

目 高考命题传真 考点预测

考点预测

[预测题 1]设I是全集,集合P、Q满足$P\subset Q$,则下面的结论中错误的是(　　).

(A)$P\cup Q=Q$　　(B)$\overline{P}\cup Q=I$

(C)$P\cap\overline{Q}=\phi$　　(D)$\overline{P}\cap\overline{Q}=\overline{P}$

[预测题 2]满足关系式$\{1,2\}\subseteq A\subseteq\{1,2,3,4,5\}$的集合$A$的个数是(　　).

(A)4　　(B)6　　(C)8　　(D)10

[预测题 3]设全集$I=\{(x,y)|x,y\in\mathbf{R}\}$,$M=\{(x,y)|\frac{y-3}{x-2}=1\}$,$N=\{(x,y)|y\neq x+1\}$,那么$\overline{M\cup N}$等于(　　).

(A)Φ　　(B){(2,3)}

(C)(2,3)　　(D)$\{(x,y)|y=x+1\}$

[预测题 4]集合$M=\{x|x=\frac{k\pi}{2}+\frac{\pi}{4},k\in\mathbf{Z}\}$,$N=\{x|x=\frac{k\pi}{4}+\frac{\pi}{2},k\in\mathbf{Z}\}$,则(　　).

(A)$M=N$　　(B)$M\subset N$

(C)$N\subset M$　　(D)$M\cap N=\Phi$

[预测题 5]若集合$M=\{y|y=2^x,x\in\mathbf{R}\}$,$N=\{y|y=x^2,x\in\mathbf{R}\}$,则下列结论:①$M\cap N=\{2,4\}$;②$M\cap N=\{4,16\}$;③$M\cup N=[0,+\infty)$;④$M=N$;⑤$M\subset N$.其中正确命题的序号是________.

[预测题 6]已知集合$A=\{x,xy,\lg(xy)\}$,$B=\{0,|x|,y\}$,且$A=B$,则$x=$______,$y=$________.

[预测题 7]已知函数$f(x)=x^2+ax+b$,$A=\{x|f(x)=2x\}=\{2\}$,试求a,b的值及$f(x)$.

[预测题 8]已知$A=\{x|x^2+(p+2)x+1=0,x\in\mathbf{R}\}$,若$A\cap\mathbf{R}^+=\Phi$,求实数$p$的取值范围.

张 高考X导航 考点聚焦

学科内综合题预测

[创新题 1]设M、N是两个非空集合,定义M与P的差集为$M-P=\{x|x\in M$且$x\notin P\}$,则$M-(M-P)$等于(　　).

(A)P　　(B)$M\cap P$

(C)$M\cup P$　　(D)M

[创新题 2]设集合 $A=\{(x,y)|y=2x-1,x\in \mathbf{N}_+\}$，$B=\{(x,y)|y=ax^2-ax+a,x\in \mathbf{N}_+\}$，问是否存在非零整数 a，使 $A\cap B\neq \Phi$？若存在，请求出 a 的值及 $A\cap B$.

预测题答案：

1.(D). 2.(C). 3.(B). 4.(C). 5.③⑤. 6.-1，-1.

7. ∵$A=\{x|x^2+ax+b=2x\}$即$\{x|x^2+(a-2)x+b=0\}=\{2\}$，

∴$\begin{cases}\triangle=(a-2)^2-4b=0,\\4+2(a-2)+b=0;\end{cases}$　∴$\begin{cases}a^2-4a+4-4b=0,\\2a+b=0;\end{cases}$

∴$a=-2$，$b=4$，∴$f(x)=x^2-2x+4$.

8. ∵$A\cap \mathbf{R}^+=\Phi$，∴集合 A 有以下两种情况：

(1)$A=\Phi$，则$\triangle=(p+2)^2-4<0$，即$-4<p<0$；

(2)$A\neq\Phi$，则方程有两个非正数解，其充要条件是 $\begin{cases}p+2>0,\\\triangle=(p+2)^2-4\geqslant 0,\end{cases}$解得 $p\geqslant 0$.

综上所述 $p>-4$.

创新题答案：

1. 分析：设全集为 I，则 $M-P=M\cap\overline{P}$，故 $M-(M-P)=M\cap\overline{M\cap\overline{P}}=M\cap(\overline{M}\cup P)=(M\cap\overline{M})\cup(M\cap P)=M\cap P$. 所以选(B).(注：本题还可以借助"韦恩图"求解)

2. 由 $A\cap B\neq\Phi$ 知，a 是否存在取决于方程组 $\begin{cases}y=2x-1,\\y=ax^2-ax+a\end{cases}$是否有 x 的正整数解.

消去 y 得，$ax^2-(a+2)x+a+1=0$，　①

由$\triangle\geqslant 0$，即$(a+2)^2-4a(a+1)\geqslant 0$，

解得$-\dfrac{2\sqrt{3}}{3}\leqslant a\leqslant\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$.

因 a 为非零整数，所以 a 的可能取值为-1，1.

当 $a=-1$ 时，代入①解得 $x=0$，或 $x=-1$ 这与 $x\in\mathbf{N}_+$ 矛盾. 故 $a\neq-1$. 当 $a=1$ 时，代入①解得 $x=1$ 或 $x=2$，符合题意.

所以存在 $a=1$，使得 $A\cap B\neq\Phi$. 此时 $A\cap B=\{(1,1),(2,3)\}$.

考点解读与检测 2　映射与函数

纲　高考命题纲要　考点梳理

考点梳理

一、基本考点

1. 映射

一般地，设 A、B 是两个集合，如果按照某种对应法则 f，对于集合 A 中的任何一个元素，在集合 B 中都有惟一的元素和它对应，这样的对应叫做从集合 A 到集合 B 的映射，记作 $f:A\rightarrow B$.

如果给定一个从集合 A 到集合 B 的映射，那么和 A 中的元素 a 对应的 B 中的元素 b 叫做 a 的像，a 叫做 b 的原像.

2. 函数

(1)定义

函数是由一个非空数集到另一个非空数集的映射.

由此可知，函数是一种特殊的映射 $f:A\rightarrow B$. 必须满足 A、B 都是非空数集，其像的集合是 B 的子集.

(2)函数的三要素

定义域、对应法则和值域.

(3)函数的表示法

解析法、列表法、图像法.

(4)常用函数

正比例函数、反比例函数、一次函数、二次函数、幂函数、指数函数、对数函数、三角函数、反三角函数、常数函数.

二、考点综合

1. 重点难点

(1)两个函数为同一函数的条件

构成函数的三要素中，定义域和对应法则相同，则值域一定相同. 所以，两个函数当且仅当定义域和对应法则相同时，才是相同的函数.

三个要素相同的两个函数定有相同的图像，但三要素中至少有一项不同的两个函数，它们的图像也不同.

(2)分段函数

若函数在定义域的不同子集上对应法则不同，可用几个式子来表示函数，这种形式的函数叫分段函数.

处理分段函数的问题，除了要用到分类讨论的思想外，还要注意其中整体和局部的关系.

(3)复合函数

若 y 是 u 的函数，u 又是 x 的函数，即 $y=f(u)$，$u=g(x)$，$x\in(a,b)$，$u\in(m,n)$，那么 y 关于 x 的函数 $y=f[g(x)]$，$x\in(a,b)$叫做 f 和 g 的复合函数，u 叫做中间变

量，u 的取值范围是 $g(x)$ 的值域.

2. 热门考点

(1)映射在近三年都有考查，以选择题出现，属容易题，体现了集合和映射在中学数学的基础性和工具性作用.

(2)函数概念、函数的三要素都是高考重点考查的内容.

3. 综合运用

函数是中学数学的核心内容，又是学习高等数学的基础，所以在高考中，函数知识占有极其重要的地位，特别是函数思想是贯穿高中数学的一种重要思想方法. 函数是数学中研究两个变量之间互相依存、互相联系的规律的内容，函数思想的实质是运用运动变化、相互联系、相互制约的观点去认识和处理有关的问题，它即是一种认识问题时在观念上的指导，又是一种处理问题时的策略上的选择.

举 高考命题举例 考点范题

考点范题

[范题 1](1999·全国)已知映射 $f:A\to B$，其中，集合 $A=\{-3,-2,-1,1,2,3,4\}$，集合 B 中的元素都是 A 中元素在映射 f 下的像，且对于任意的 $a\in A$，在 B 中和它对应的元素是 $|a|$，则集合 B 中元素的个数是(　　).

(A)4　　(B)5　　(C)6　　(D)7

[解析]对应法则是"取绝对值"，$\pm3,\pm2,\pm1,4$ 的像分别是 $3,2,1,4$. 故 $B=\{1,2,3,4\}$，有 4 个元素，选(A).

[范题 2](2000·全国)设集合 A 和 B 都是自然数集合 $\mathbf{N}$，映射 $f:A\to B$ 把集合 A 中的元素 n 映射到集合 B 中的元素 2^n+n，则在映射 f 下，像 20 的原像是(　　).

(A)2　　(B)3　　(C)4　　(D)5

[解析]依题意 $2^n+n=20$，四个选项中只有 $n=4$ 为方程的解，故选(C).

[范题 3]下列对应是否为 A 到 B 的映射？能否构成函数？

(1)$A=R,B=R,f:x\to y=\dfrac{1}{x+1}$；

(2)$A=\{a\mid\frac{1}{2}a\in\mathbf{N}_+\},B=\{b\mid b=\frac{1}{n},n\in\mathbf{N}_+\},f:a\to b=\dfrac{1}{a}$；

(3)$A=\overline{\mathbf{R}^-},B=\mathbf{R},f:x\to y,y^2=x$；

(4)$A=\{$平面 α 内的矩形$\}$，$B=\{$平面 α 内的圆$\}$，f：作矩形的外接圆.

[解析](1)$\because x=-1$ 时，y 值不存在，$\therefore$ 不是映射.

(2)A、B 两个集合分别用列举法表述为 $A=\{2,4,6,\cdots\}$，$B=\{1,\frac{1}{2},\frac{1}{3},\frac{1}{4},\cdots\}$，由对应法则 $f:a\to b=\frac{1}{a}$ 知，是映射，又 A、B 是非空数集，所以亦为函数.

(3)不是映射，如 A 中元素 1 有两个像 ±1.

(4)是映射，但不是函数. 因为 A、B 都不是数集.

[范题 4]与函数 $y=x$ 有相同图像的一个函数是(　　).

(A)$y=\sqrt{x^2}$　　(B)$y=\dfrac{x^2}{x}$

(C)$y=a^{\log_a x}(a>0,a\neq1)$　(D)$y=\log_a a^x(a>0,a\neq1)$

[解析]由于 $y=\sqrt{x^2}=|x|$，与 $y=x$ 的对应法则不同；

$y=\dfrac{x^2}{x}=x(x\neq0)$，与 $y=x$ 的定义域不同；

$y=a^{\log_a x}=x(x>0)$，与 $y=x$ 的定义域不同；

$y=\log_a a^x=x$，与 $y=x$ 完全相同，因此选择(D).

[范题 5]函数 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{x} & (0<x<1),\\ x & (x\geqslant1)\end{cases}$ 的值域是____.

[解析]作出分段函数的图像，由图 2-1 可知，值域为 $[1,+\infty)$.

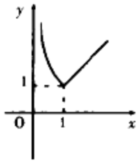


图 2-1

注：作分段函数图像时，要注意根据自变量的范围确定函数图像的范围.

[范题 6]已知 $f(x)=\begin{cases}x^2 & (x\geqslant0),\\ x & (x<0),\end{cases}$ $g(x)=\begin{cases}x & (x\geqslant0),\\ -x^2 & (x<0),\end{cases}$ 则当 $x<0$ 时，$f[g(x)]$ 为(　　).

(A)$-x$　(B)$-x^2$　(C)x　(D)x^2

[解析]$\because$ 当 $x<0$ 时，$g(x)=-x^2<0$，$\therefore f[g(x)]=f(-x^2)=-x^2$，故选(B).

[范题 7]在边长为 4 的正方形 $ABCD$ 的边上有一点 P，从 B 点开始，沿折线 $BCDA$ 向 A 点运动，如图 2-2，设动点 P 运动的距离为 x，$\triangle ABP$ 的面积为 S.

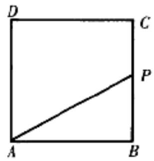


图 2-2

(1)求函数 $S=f(x)$ 的解析式和定义域；

(2)求函数 $S=f(x)$ 的值域.

[解析](1)当 $0<x\leqslant4$ 时，$S=\frac{1}{2}\cdot AB\cdot BP=\frac{1}{2}\cdot4x=2x$；

当 $4<x\leqslant8$ 时，$S=\frac{1}{2}\cdot AB\cdot BC=\frac{1}{2}\cdot4\cdot4=8$；

当 $8<x<12$ 时，$S=\frac{1}{2}\cdot AB\cdot AP=\frac{1}{2}\cdot4\cdot(12-x)=24-2x$.

$$\therefore S=f(x)=\begin{cases}2x & (0<x\leqslant4),\\ 8 & (4<x\leqslant8),\\ 24-2x & (8<x<12).\end{cases}$$

并且 $S=f(x)$ 的定义域是 $(0,12)$.

(2)由于当 $0<x\leqslant4$ 时，$0<2x\leqslant8$；

当 $8<x<12$ 时，$0<24-2x<8$.

$\therefore S=f(x)$ 的值域为 $(0,8]\cup\{8\}\cup(0,8)=(0,8]$.

注：这是一个与实际问题相关连的函数问题，得到的是一个分段函数，分段函数是一个函数，要注意整体与局部的关连.

高考命题传真 考点预测

考点预测

[预测题1]下列对应关系中，不是从 A 到 B 的映射的是(　　).

(A) $A=\{1,2,3,4\}$，$B=\{3,4,5,6,7,8,9\}$，$f:x\to y=2x+1$

(B) $A=\{0°,90°,180°\}$，$B=\{-1,0,1\}$，$f:x\to y=\sin x$

(C) $A=\mathbf{R}^+$，$B=\mathbf{R}^-$，$f:x\to y=-\sqrt{x}$

(D) $A=\{0,1,10,100\}$，$B=\{-1,0,1,2\}$，$f:x\to y=\lg x$

[预测题2]给定映射 $f:(x,y)\to(x+y,x-y)$，则在对应法则 f 下，$(6,-2)$ 的原像是(　　).

(A) $(6,-2)$　　(B) $(-2,6)$

(C) $(2,4)$　　(D) $(4,2)$

[预测题3]下列各式中：

① $y=x-(x-3)$；

② $y=\sqrt{x-2}+\sqrt{1-x}$；

③ $y=\begin{cases}x-1, x<0\\ x+1, x\geqslant 0;\end{cases}$

④ $y=\begin{cases}0 & (x\text{ 为有理数}),\\ 1 & (x\text{ 为无理数}).\end{cases}$

其中表示 y 是 x 的函数的有(　　).

(A)4个　　(B)3个

(C)2个　　(D)1个

[预测题4]在同一坐标系中，下列各对方程中表示相同曲线的是(　　).

(A) $y=x$ 与 $\frac{y}{x}=1$　　(B) $y=1$ 与 $y=x^0$

(C) $y=x$ 与 $y=\sqrt{x^2}$　　(D) $y=f(x)$ 与 $x=f^{-1}(y)$

[预测题5]已知函数 $f(x)=\frac{x+1}{x-1}$，则 $f[f(\frac{1}{x})]=$ ____.

[预测题6]邮寄国内挂号信件，每20克应付邮资0.8元，不足20克(包括不足20克的零数)以20克重量计算，另加挂号费1.00元，那么每封挂号信(不超过60克)邮资总额 y(元)与挂号重 x(克)的函数关系为________.

[预测题7]已知某人某月1至6月份的月经济收入如下：1月份为1 000元，从2月份起每月的月收入是其上一个月的2倍. 用表格、图像、解析式三种形式表示该人1至6月份的月经济收入 y(元)与月份序号 x 的函数关系，并指出函数的定义域、值域、对应法则.

高考X导航 考点聚焦

学科内综合题预测

[创新题1]已知函数 $y=f(x)$ $(x\in[a,b])$，那么集合 $\{(x,y)\mid y=f(x), x\in[a,b]\}\cap\{(x,y)\mid x=2\}$ 中所含的元素的个数是(　　).

(A)1　　(B)0　　(C)1或0　　(D)1或2

[创新题2]如图2-3所示，在直角坐标系的第一象限内，$\triangle AOB$ 是边长为2的等边三角形，设直线 $x=t(0\leqslant t\leqslant 2)$ 截这个三角形可得位于此直线左方的图形的面积为 $f(t)$，求函数 $f(t)$ 的表达式.

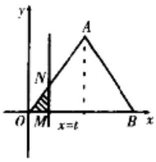


图 2-3

预测题答案：

1.(D). 因为 A 中元素0在 B 中没有图像.

2.(C). 设 $(6,-2)$ 的原像为 (x,y)，则 $\begin{cases}x+y=6,\\ x-y=-2,\end{cases}$ 由此得 $\begin{cases}x=2,\\ y=4.\end{cases}$

3.(C). ② A 集合是空集，不能构成函数；表示函数的是①③④.

4.(D).　　5. $\frac{1}{x}$.

6. $y=\begin{cases}1.8, & x\in(0,20],\\ 2.6, & x\in(20,40],\\ 3.4, & x\in(40,60].\end{cases}$

7. 依题意，该人1～6月份的月经济收入是：1月份1 000元，2～6月份：2 000元，4 000元，8 000元，16 000元，32 000元.

据此，可得到该人1～6月份的月经济收入 y 与 x 的函数关系的三种表示形式. 其定义域都为 $\{1,2,3,4,5,6\}$，值域都为 $\{1\,000, 2\,000, 4\,000, 8\,000, 16\,000, 32\,000\}$. 表格、图像形式的对应法则略，解析式形式的对应法则为：$x\to y=1\,000\times 2^{x-1}$.

创新题答案：

1.(C). $2\in[a,b]$ 时，交点个数为1，$2\notin[a,b]$ 时，交点个数为0.

2. 当 $0\leqslant t\leqslant 1$ 时，有 $f(t)=S_{\triangle MON}=\frac{\sqrt{3}}{2}t^2$.

当 $1<t\leqslant 2$ 时，$f(t)=S_{\triangle AOB}-S_{\triangle MNB}=-\frac{\sqrt{3}}{2}(t-2)^2+\sqrt{3}$. $\therefore f(t)=\begin{cases}\frac{\sqrt{3}}{2}t^2 & (0\leqslant t\leqslant 1),\\ -\frac{\sqrt{3}}{2}(t-2)^2+\sqrt{3} & (1<t\leqslant 2).\end{cases}$

考点解读与检测 3 函数的解析式与定义域

纲 高考命题纲要 考点梳理

考点梳理

一、基本考点

1.函数的解析式

函数的解析式是函数的表示法中最常用的一种，它是用一个等式表示定义域与值域之间的一种对应关系，与所取的字母无关，如 $y=3x^2+1$ 与 $y=3t^2+1$ 为同一函数.

2.函数的定义域

定义域是自变量 x 的取值范围，它是函数的一个不可缺少的组成部分.定义域不同而解析式相同的函数，应看作两个不同的函数.在中学阶段，所研究的函数通常都是能够用解析式表示的.如未加特别说明，函数的定义域就是指能使这个式子有意义的所有实数 x 的集合.

求函数的定义域的主要依据是：

①由函数解析式求定义域，此时求定义域的主要根据是：

(a)分式的分母不得为零；(b)偶次方根的被开方数不小于零；(c)对数函数的真数必须大于零；(d)指数函数和对数函数的底数必须大于零且不等于1；(e)三角函数中的正切函数 $y=\tan x\,(x\in\mathbf{R}$，且 $x\neq k\pi+\frac{\pi}{2},k\in\mathbf{Z})$，余切函数 $y=\cot x\,(x\in\mathbf{R},x\neq k\pi,k\in\mathbf{Z})$，等.

②已知 $f(x)$ 的定义域是 $[a,b]$，求 $f[g(x)]$ 的定义域，是指满足 $a\leqslant g(x)\leqslant b$ 的 x 的取值范围，而已知 $f[g(x)]$ 的定义域是 $[a,b]$ 指的是 $x\in[a,b]$.

③实际问题或几何问题给出的函数的定义域.

这类问题除要考虑函数解析式有意义外，还应考虑使实际问题或几何问题有意义.

二、考点综合

1.重点难点

求解析式的常用方法

①如果已知复合函数 $f[g(x)]$ 的表达式时，用换元法求解，但要注意在换元时引起的定义域的变化.最后结果要注意所求函数的定义域.

②赋值法

通过取特殊值或变量换变量，然后通过解方程组求出函数解析式.

③待定系数法

如已知函数的模型(如一次函数、二次函数、指数函数等)一般的方法是设出函数的解析式，然后根据题设条件求待定系数.

2.热门考点

运用函数思想解决应用问题是高考的热点.而运用函数思想解决应用问题的关键是建立函数的解析式，并确定其定义域.

3.综合运用

应用问题多在知识的交汇点处命题，常常涉及到代数、三角、几何等知识，因此，在函数部分复习时，既要重视应用问题中函数模型的构建，又要重视知识的综合运用，重视综合、分析能力的培养.

举 高考命题举例 考点范题

考点范题

[范题1](1996·上海)1992年底世界人口达到54.8亿，若人口的年平均增长率为 $x\%$，2000年底世界人口数为 y(亿)，那么 y 与 x 的函数关系是______.

[解析]答案为：$y=54.8(1+x\%)^8$.

注：这里幂的指数容易写错，要特别注意.

[范题2]求下列函数的定义域：

(1) $f(x)=\dfrac{\lg(|x|-x)}{\sqrt{1-x^2}}$；

(2) $y=\sqrt{25-x^2}+\lg\cos x$.

[解析](1)由 $\begin{cases}1-x^2>0,\\|x|-x>0,\end{cases}$ 得 $\begin{cases}-1<x<1,\\x<0.\end{cases}$

∴函数的定义域为 $(-1,0)$.

(2)由 $\begin{cases}25-x^2\geqslant 0,\\\cos x>0,\end{cases}$ 得 $\begin{cases}-5\leqslant x\leqslant 5,\\2k\pi-\frac{\pi}{2}<x<2k\pi+\frac{\pi}{2}\ (k\in\mathbf{Z}).\end{cases}$

借助于数轴，解这个不等式组，得函数的定义域为

$[-5,-\frac{3\pi}{2})\cup(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})\cup(\frac{3\pi}{2},5]$.

[范题3]若函数 $f(2^x)$ 的定义域为 $[-1,1]$，求 $f(\log_2 x)$ 定义域.

[解析]∵ $y=f(2^x)$ 的定义域是 $[-1,1]$，

∴ $\frac{1}{2}\leqslant 2^x\leqslant 2$，∴ $y=f(x)$ 的定义域是 $[\frac{1}{2},2]$，由 $\frac{1}{2}\leqslant\log_2 x\leqslant 2$，解得 $\sqrt{2}\leqslant x\leqslant 4$，∴ $y=f(\log_2 x)$ 的定义域为 $[\sqrt{2},4]$.

[范题 4]如图 3－1，用长为 l 的铁丝弯成下部为矩形，上部为半圆型的框架，若矩形底边长为 $2x$，求此框架围成的面积 y 与 x 的函数解析式，并写出它的定义域．

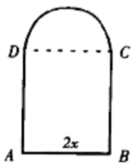


图 3－1

[解析]$\because CD=AB=2x$，$\therefore \overset{\frown}{CD}=\pi x$，

$\therefore AD=\dfrac{l-AB-\overset{\frown}{CD}}{2}=\dfrac{l-2x-\pi x}{2}$，

故 $y=2x\cdot\dfrac{l-2x-\pi x}{2}+\dfrac{\pi x^2}{2}=-(2+\dfrac{\pi}{2})x^2+lx$．

由 $\begin{cases}2x>0,\\ \dfrac{l-2x-\pi x}{2}>0,\end{cases}$ 得 $x\in(0,\dfrac{l}{\pi+2})$．

[范题 5]已知 $f(\sqrt{x}+1)=x+2\sqrt{x}$，求 $f(x)$，$f(x+1)$ 与 $f(x^2)$．

[解析]设 $u=\sqrt{x}+1\geqslant1$，则 $\sqrt{x}=u-1$，$x=(u-1)^2$，

于是 $f(u)=(u-1)^2+2(u-1)=u^2-1(u\geqslant1)$，

$\therefore f(x)=x^2-1(x\geqslant1)$，

$f(x+1)=(x+1)^2-1=x^2+2x(x\geqslant0)$，

$f(x^2)=(x^2)^2-1=x^4-1(x\leqslant-1$ 或 $x\geqslant1)$．

注：解此题时，通过换元，把 $f(\sqrt{x}+1)=x+2\sqrt{x}$ 化为 $f(u)=u^2-1$，要注意 $f(u)$ 的定义域是 $\{u|u\geqslant1\}$，这样才能保证转化的等价性．例如 $f(x+1)$ 与 $f(x^2)$ 的定义域分别是 $\{x|x+1\geqslant1\}$ 与 $\{x|x^2\geqslant1\}$，即 $\{x|x\geqslant0\}$ 与 $\{x|x\leqslant-1$ 或 $x\geqslant1\}$．

[范题 6]设二次函数 $f(x)$ 满足 $f(x-2)=f(-x-2)$，且图像在 y 轴上的截距为 1，被 x 轴截得的线段长为 $2\sqrt{2}$，求 $f(x)$ 的解析式．

[解析]设 $f(x)=ax^2+bx+c(a\neq0)$．

由 $f(x-2)=f(-x-2)$，得 $4a-b=0$， ①

$|x_1-x_2|=\dfrac{\sqrt{\Delta}}{|a|}=2\sqrt{2}$，$\therefore b^2-4ac=8a^2$； ②

由已知得 $c=1$． ③

由①②③解得 $a=\dfrac{1}{2}$，$b=2$，$c=1$，

$\therefore f(x)=\dfrac{1}{2}x^2+2x+1$．

目 高考命题传真 考点预测

考点预测

[预测题 1]函数 $y=\sqrt{1-x^2}-\sqrt{x^2-1}$ 的定义域是(　　)．

(A)$-1\leqslant x\leqslant1$　　(B)$x\leqslant-1$，或 $x\geqslant1$

(C)$0\leqslant x\leqslant1$　　(D)$\{-1,1\}$

[预测题 2]设 $f(u)$ 的定义域为 $(0,1)$，则函数 $f(\ln x)$ 的定义域为(　　)．

(A)$(0,1)$　　(B)$(1,e)$　　(C)$[0,1]$　　(D)$[1,e]$

[预测题 3]当 $g(x)=1-x^2$ 且 $x\neq0$，$f[g(x)]=\dfrac{1-x^2}{x^2}$，则 $f(\dfrac{1}{2})$ 等于(　　)．

(A)1　　(B)-1　　(C)2　　(D)-2

[预测题 4](1996・上海)函数 $y=\dfrac{1}{\sqrt{\log_{\frac{1}{2}}(2-x)}}$ 的定义域是________．

[预测题 5]已知 $f(\dfrac{2}{x}+1)=\lg x$，则 $f(x)=$________．

[预测题 6]已知 $3f(x-1)+2f(1-x)=2x$，则 $f(x)=$________．

[预测题 7]已知函数 $y=f(x)$ 的图像由射线 BA、CD 和线段 BC 组成，如图 3－2，用分段函数表示这个函数，则 $f(x)=$________．

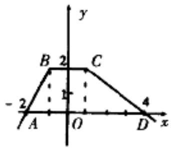


图 3－2

[预测题 8]将边长为 a 的铁丝折成矩形，则矩形面积 y 关于一边长 x 的函数解析式为________，其定义域为________．

[预测题 9]已知函数 $f(x)$ 的定义域是 $[0,1]$，求 $g(x)=f(x+a)\cdot f(x-a)$（其中 $a\in(-\dfrac{1}{2},0]$）的定义域．

张 高考X导航 考点聚焦

学科内综合题预测

[创新题 1]设函数 $f(x)$ 为实函数，且 $f(x)-2f(\dfrac{1}{x})=x$，求 $f(x)$ 的表达式．

[创新题 2](2000・全国)某蔬菜基地种植西红柿，由历年市场行情得知，从二月一日起的 300 天内，西红柿市场售价与上市时间的关系用图 3－3(1)的一条折线表示；西红柿的种植成本与上市时间的关系用图 3－3(2)的抛物线段表示．

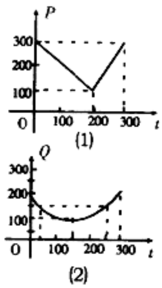


图 3－3

(1)写出图 3－3(1)表示的市场售价与时间的函数关系式 $P=f(t)$；

写出图 3－3(2)表示的种植成本与时间的函数关系式 $Q=g(t)$；

(2)认定市场售价减去种植成本为纯收益，问何时上市的西红柿纯收益最大？

(注：市场售价和种植成本的单位：元/10^2kg，时间单位：天)

预测题答案：

1.(D). 2.(B). 3.(A). 4.$\{x|1<x<2\}$.

5.$\lg\frac{2}{x-1}$ 6.$2x+\frac{2}{5}$ 7.$\begin{cases}2x+4 & (x\leqslant -1),\\ 2 & (-1<x<1),\\ -\frac{2}{3}x+\frac{8}{3} & (x\geqslant 1).\end{cases}$

8.$y=-x^2+\frac{a}{2}x, 0<x<\frac{a}{2}$.

9.由已知有：$\begin{cases}0\leqslant x+a\leqslant 1,\\ 0\leqslant x-a\leqslant 1,\end{cases}$ $\therefore\begin{cases}-a\leqslant x\leqslant 1-a,\\ a\leqslant x\leqslant 1+a.\end{cases}$

$\because -\frac{1}{2}<a\leqslant 0, \therefore a\leqslant -a\leqslant 1+a\leqslant 1-a, \therefore -a\leqslant 1+a$.

$\therefore$函数$g(x)$的定义域为$[-a,1+a]$.

创新题答案：

1. 用$\frac{1}{x}$换x得$\begin{cases}f(x)-2f(\frac{1}{x})=x,\\ f(\frac{1}{x})-2f(x)=\frac{1}{x},\end{cases}$ 消去$f(\frac{1}{x})$，得$f(x)=\frac{-x^2-2}{3x}$.

2.(1)由图3—3(1)可得市场售价与时间的函数关系为

$f(t)=\begin{cases}300-t, 0\leqslant t\leqslant 200,\\ 2t-300, 200<t\leqslant 300;\end{cases}$

由图3—3(2)可得种植成本与时间的函数关系为

$g(t)=\frac{1}{200}(t-150)^2+100, 0\leqslant t\leqslant 300.$

(2)设t时刻的纯益为$h(t)$，则由题意得

$h(t)=f(t)-g(t)$，

即$h(t)=\begin{cases}-\frac{1}{200}t^2+\frac{1}{2}t+\frac{175}{2}, 0\leqslant t\leqslant 200,\\ -\frac{1}{200}t^2+\frac{7}{2}t-\frac{1025}{2}, 200<t\leqslant 300.\end{cases}$

当$0\leqslant t\leqslant 200$时，配方整理得：$h(t)=-\frac{1}{200}(t-50)^2+100$.

所以，当$t=50$时，$h(t)$取得区间$[0,200]$上的最大值100；

当$200<t\leqslant 300$时，配方整理得：$h(t)=-\frac{1}{200}(t-350)^2+100$，

所以，当$t=300$时，$h(t)$取得区间$(200,300]$上的最大值87.5.

综上，由$100>87.5$时，$h(t)$在区间$[0,300]$上取得最大值100，此时$t=50$，即从二月一日起开始的第50天时，上市的西红柿纯收益最大.

考点解读与检测 4 函数的值域

纲 高考命题纲要 考点梳理

考点梳理

一、基本考点

1.函数的值域

值域是全体函数值所成的集合，一旦定义域和对应法则确定，函数的值域也就随之确定.因此，不论采用什么方法求函数的值域，都要考虑其定义域.

2.基本函数的值域

(1)一次函数$y=kx+b(k\neq 0)$的值域为$\mathbf{R}$；

(2)二次函数$y=ax^2+bx-c(a\neq 0)$，当$a>0$时值域是$\left[\frac{4ac-b^2}{4a},+\infty\right)$，当$a<0$时，值域是$\left(-\infty,\frac{4ac-b^2}{4a}\right]$；

(3)反比例函数$y=\frac{k}{x}(k\neq 0)$的值域为$y\in\mathbf{R}$，且$y\neq 0$；

(4)指数函数$y=a^x(a>0$，且$a\neq 1)$的值域是$\mathbf{R}^+$；

(5)对数函数$y=\log_a x(a>0$，且$a\neq 1)$的值域是$\mathbf{R}$；

(6)正弦函数$y=\sin x$、余弦函数$y=\cos x$的值域为$[-1,1]$，正切函数$y=\tan x$、余切函数$y=\cot x$的值域为$\mathbf{R}$.

二、考点综合

1.重点难点

求值域的基本方法

①分析观察法求值域

有的函数的结构并不复杂，可以通过基本函数的值域及不等式的性质观察出函数的值域.

②配方法求值域

二次函数或能转化为形如：

$F(x)=a[f(x)]^2+bf(x)+c$型的函数的值域，均可用配方法，但要注意$f(x)$的取值范围.

③不等式法求值域

利用基本不等式$a+b\geqslant 2\sqrt{ab}$，$a+b+c\geqslant 3\sqrt[3]{abc}$可求某些函数的值域，但要注意“全正、定值、取等号”的条件.

④判别式法求值域

把函数转化为关于x的二次方程$F(x,y)=0$，通过方程有实根，判别式$\triangle\geqslant 0$，从而求得原函数的值域.形如$y=\frac{a_1x^2+b_1x+c_1}{a_2x^2+b_2x+c_2}$($a_1$，$a_2$不同时为零)的函数的值域常用此法求得.

⑤反函数法求值域

利用函数与它的反函数的定义域和值域的关系，通过求反函数的定义域而得到原函数的值域. 形如 $y=\dfrac{cx+d}{ax+b}(a\neq 0)$ 的函数值域可用此法.

⑥利用函数的单调性求值域

如能确定函数在定义域的单调性，则可利用单调性求出其值域. 形如 $y=ax+b+\sqrt{cx+d}$(a、b、c、d 均为常数，$ac\neq 0$)，在 a、c 同号时，其单调性可确定，故可用单调性求其值域. 在利用基本不等式求值域失效(等号不满足)时，此时，由于在所给定义域中取不到最值，故函数在定义域上是单调的，故可采用单调性求值域.

⑦换元法求值域

运用代数或三角换元，将所给函数转化成值容易确定的另一函数，从而求得原函数的值域. 形如：$y=ax+b\pm\sqrt{cx+d}$(a、b、c、d 均为常数，且 $ac\neq 0$)的函数常用此法求值域.

⑧数形结合法求值域

利用函数所表示的几何意义，借助几何方法或图像来求函数的值域.

2. 热门考点

值域可以理解为"范围"，在涉及到求范围的问题时，可以考虑建立函数关系，通过求值域的办法来求出范围.

3. 综合运用

求值域的方法多，灵活性大，要注意根据问题特点，灵活选用求值域的方法，并要注意这些方法的综合运用. 另外，函数的值域与函数的最值有紧密的联系，要注意运用上述求值域的方法来求函数的最大值与最小值.

举 高考命题举例 考点范题

考点范题

[范题 1] 函数 $y=3x(-1\leqslant x\leqslant 3$，且 $x\in\mathbf{Z})$ 的值域是(　　).

(A) $\mathbf{R}$　　(B) -39

(C) $\{-3,0,3,6,9\}$　　(D) $\{3,6,9\}$

[解析] ∵函数的定义域为 $\{-1,0,1,2,3\}$，所以对应的函数值的集合为 $\{-3,0,3,6,9\}$，所以选(C).

[范题 2] 值域是 $(0,+\infty)$ 的函数是(　　).

(A) $y=x^2-x+1$　　(B) $y=(\frac{1}{3})^{1-x}$

(C) $y=3^{\frac{1}{2-x}}$　　(D) $y=|\log_2 x^2|$

[解析] 对于(A)，$y=x^2-x+1=(x-\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4}\geqslant\frac{3}{4}$，其值域为 $[\frac{3}{4},+\infty)$；

对于(B)，因为 $1-x\in\mathbf{R}$，∴ $y=(\frac{1}{3})^{1-x}>0$，值域为 $(0,+\infty)$；

对于(C)，由于 $\frac{1}{2-x}\neq 0$，∴ $y=3^{\frac{1}{2-x}}\neq 1$，值域为 $(0,1)\cup(1,+\infty)$；

对于(D)，∵ $\log_2 x^2$ 的值域为 $\mathbf{R}$，∴ $y=|\log_2 x^2|$ 的值域为 $[0,+\infty)$.

由上分析知，选(B).

注： 掌握基本函数的值域是求其他函数值域的基础.

[范题 3] 求下列函数的值域：

(1) $y=2x^2-4x+1(0\leqslant x\leqslant 3)$；

(2) $y=\dfrac{4x+3}{x^2+1}$；

(3) $y=\dfrac{2\sqrt{x}-4}{\sqrt{x}+3}$；

(4) $y=x+\sqrt{2x-1}$；

(5) $y=\dfrac{x^2+5}{\sqrt{x^2+4}}$.

[解析] (1) $y=2x^2-4x+1=2(x-1)^2-1$，

又 $0\leqslant x\leqslant 3$，依据此函数的图像，

可以得到所求函数的值域为 $[-1,7]$；

(2) 由 $y=\dfrac{4x+3}{x^2+1}$ 可得 $yx^2-4x+y-3=0$，

当 $y=0$ 时，$x=-\frac{3}{4}$，当 $y\neq 0$ 时，$x\in\mathbf{R}$，

故 $\triangle=(-4)^2-4y(y-3)\geqslant 0$，解之得 $-1\leqslant y\leqslant 4$.

并且当 $x=-2$ 时，$y=-1$，当 $x=\frac{1}{2}$ 时，$y=4$，

∴所求函数的值域为 $[-1,4]$.

(3) 由 $y=\dfrac{2\sqrt{x}-4}{\sqrt{x}+3}$，可以得到 $\sqrt{x}=\dfrac{3y+4}{2-y}$，

又 $\sqrt{x}\geqslant 0$，故得 $\dfrac{3y+4}{2-y}\geqslant 0$，解之得 $-\frac{4}{3}\leqslant y<2$，

∴所求函数的值域为 $[-\frac{4}{3},2)$.

(4) 解法 1：由 $2x-1\geqslant 0$，得定义域为 $[\frac{1}{2},+\infty)$，

∴函数 x 和 $\sqrt{2x-1}$ 在 $[\frac{1}{2},+\infty)$ 上都是增函数，

∴函数 $y=x+\sqrt{2x-1}$ 在 $[\frac{1}{2},+\infty)$ 上是增函数，

∴ $y\geqslant\frac{1}{2}+\sqrt{2\times\frac{1}{2}-1}=\frac{1}{2}$，

即所求函数的值域为 $[\frac{1}{2},+\infty)$.

解法 2：令 $\sqrt{2x-1}=t(t\geqslant 0)$，则 $2x-1=t^2$，$x=\dfrac{1+t^2}{2}$，

∴ $y=\dfrac{1+t^2}{2}+t=\frac{1}{2}(1+t)^2$，

∴ $y=f(t)$ 在 $[0,+\infty)$ 上是增函数，

∴ $y\geqslant\frac{1}{2}(0+1)^2=\frac{1}{2}$.

故所求函数的值域为 $[\frac{1}{2},+\infty)$.

(5) 分析：由 $y=\dfrac{x^2+5}{\sqrt{x^2+4}}=\sqrt{x^2+4}+\dfrac{1}{\sqrt{x^2+4}}=t+\dfrac{1}{t}$ $(t\geqslant 2)$.

因 $t>0$，$t\cdot\frac{1}{t}=1$，但 $t=\frac{1}{t}$，解得 $t=\pm 1$ 不在区间 $[2,+\infty)$，故等号不成立，考虑单调性.

因为 $y=t+\frac{1}{t}$ 在区间$[1,+\infty)$单调递增，所以在其子区间$[2,+\infty)$为单调递增函数，故 $y\geq\frac{5}{2}$，

所以，所求函数的值域为$[\frac{5}{2},+\infty)$.

[范题4]求函数 $y=x+4+\sqrt{5-x^2}$ 的值域.

[解析]函数的定义域为 $-\sqrt{5}\leq x\leq\sqrt{5}$，

所以可设 $x=\sqrt{5}\sin\theta,-\frac{\pi}{2}\leq\theta\leq\frac{\pi}{2}$，

所以 $y=\sqrt{5}\sin\theta+4+\sqrt{5-5\sin^2\theta}=4+\sqrt{10}\sin(\theta+\frac{\pi}{4})$，

因为 $-\frac{\pi}{4}\leq\theta+\frac{\pi}{4}\leq\frac{3\pi}{4}$，所以 $4-\sqrt{5}\leq y\leq4+\sqrt{10}$，

故所求函数的值域为 $4-\sqrt{5}\leq y\leq4+\sqrt{10}$.

注：本题还可采用判别式法，但由于 x 的取值范围不是全体实数集，故求出 y 的范围后，还要注意根据 x 的范围进行取舍. 用换元法是处理本题的最佳方法，但换元后，要注意新元的范围，以保证和原问题的等价性.

目 高考命题传真 考点预测

考点预测

[预测题1]值域是$(0,+\infty)$的函数是(　　).

(A)$y=\frac{1}{5^{2-x}-1}$　　(B)$y=(\frac{1}{2})^{1-2x}$

(C)$y=\sqrt{(\frac{1}{2})^x-1}$　　(D)$y=\sqrt{1-2^x}$

[预测题2]函数 $y=\frac{x^2+2x+2}{x+1}$ 的值域是(　　).

(A)$\{y|y\leq-2$ 或 $y\geq2\}$

(B)$\{y|y<-2$ 或 $y>2\}$

(C)$\{y|-2\leq y\leq2\}$

(D)$\{y|y\geq2\sqrt{2}\}$

[预测题3]函数 $f(x)=\begin{cases}2x & (0\leq x\leq1),\\ 2 & (1<x<2),\\ 3 & (x\geq2)\end{cases}$ 的值域是______.

[预测题4]函数 $y=\frac{3-x}{1+2x}(x\geq0)$ 的值域是________.

[预测题5]函数 $y=x+2\sqrt{1-2x}+2$ 的值域是________.

[预测题6]设函数 $f(x)=\log_2(x^2+ax-a)$. 若 $f(x)$ 的定义域为 $\mathbf{R}$，则 a 的取值范围是________，若 $f(x)$ 的值域为 $\mathbf{R}$，则 a 的取值范围是________.

[预测题7]是否存在一个最小的正整数 M，使得 $|\frac{x^2+x+1}{2x}|\geq M$ 对于任何非零实数 x 都成立？并证明你的结论.

[预测题8]设函数 $f(x)=\frac{ax+b}{x^2+1}$ 的值域为$[-1,4]$，求 a,b 的值.

张 高考X导航 考点聚焦

学科内综合题预测

[创新题1](2000·上海)已知函数 $f(x)=\frac{x^2+2x+a}{x}$，$x\in[1,+\infty)$，

(1)当 $a=\frac{1}{2}$ 时，求函数 $f(x)$ 的最小值；

(2)若对任意 $x\in[1,+\infty)$，$f(x)>0$ 恒成立，试求实数 a 的取值范围.

[创新题2]已知函数 $f(x)=\log_3\frac{mx^2+8x+n}{x^2+1}$ 的定义域为$(-\infty,+\infty)$，值域为$[0,2]$，求 m、n 的值.

预测题答案：

1.(B). 2.(A). 3.$\{y|0\leq y\leq2$ 或 $y=3\}$. 4.$(-\frac{1}{2},3]$. 5.$(-\infty,4]$. 6.$-4<a<0$，$(-\infty,-4]\cup[0,+\infty)$.

7. 设 $y=\frac{x^2+x+1}{2x}$，则 $x^2+(1-2y)x+1=0,x\in\mathbf{R}$，

∴$(1-2y)^2-4\geq0$，∴$y\leq-\frac{1}{2}$，或 $y\geq\frac{3}{2}$.

由于满足条件的正整数 M，应满足 $M\leq|y|<\frac{1}{2}$，因此，所求的正整数 M 不存在.

8. 由 $y=\frac{ax+b}{x^2+1}$，得 $yx^2-ax+y-b=0,x\in\mathbf{R}$，∴$\Delta=a^2-4y(y-b)\geq0$，即 $4y^2-4by-a^2\leq0$，

故 $y=-1,y=4$ 是方程 $4y^2-4by-a^2=0$ 的两根，由韦达定理，可得 $b=3,a=\pm4$.

创新题答案：

1.(1)当 $a=\frac{1}{2}$ 时，$f(x)=x+\frac{1}{2x}+2$，

设 $1\leq x_1<x_2$，$f(x_2)-f(x_1)=(x_2-x_1)(1-\frac{1}{2x_2x_1})$，

$2x_1x_2>2$，$0<\frac{1}{2x_1x_2}<\frac{1}{2}$，得 $1-\frac{1}{2x_1x_2}>0$，又 $x_2-x_1>0$，

所以 $f(x_2)-f(x_1)>0$，$f(x_1)<f(x_2)$. ∴$f(x)$在区间$[1,+\infty)$上为增函数，

所以 $f(x)$ 在区间$[1,+\infty)$上的最小值为 $f(1)=\frac{7}{2}$.

(2)在区间$[1,+\infty)$上，$f(x)=\frac{x^2+2x+a}{x}>0$ 恒成立$\Leftrightarrow x^2+2x+a>0$ 恒成立.

设 $y=x^2+2x+a$，$x\in[1,+\infty)$，函数 $y=x^2+2x+a=(x+1)^2+a-1$ 在$[1,+\infty)$上递增，

所以当 $x=1$ 时，$y_{\min}=3+a$，于是当且仅当 $y_{\min}=3+a>0$，函数 $f(x)>0$ 恒成立，故 $a>-3$.

2. ∵ $y=\log_3 x$ 是 $(0,+\infty)$ 的增函数，令 $u=\frac{mx^2+8x+n}{x^2+1}$，由 $f(x)=\log_3\frac{mx^2+8x+n}{x^2+1}$ 的定义域为 $(-\infty,+\infty)$，值域为 $[0,2]$ 知，$u=\frac{mx^2+8x+n}{x^2+1}$ 的定义域为 $(-\infty,+\infty)$，值域为 $[1,9]$.

由 $u=\frac{mx^2+8x+n}{x^2+1}$，得 $(u-m)x^2-8x+(u-n)=0$，

∴ $x\in\mathbf{R}$，且设 $u-m\neq0$，∴ $\triangle=(-8)^2-4(u-m)(u-n)\geqslant0$，

即 $u^2-(m+n)u+(mn-16)\leqslant0$，

由 $1\leqslant u\leqslant9$ 知，关于 u 的一元二次方程 $u^2-(m+n)u+(mn-16)=0$ 的两个根为 1 和 9，由韦达定理，得

$\begin{cases}m+n=1+9,\\ m\cdot n-16=1\times9\end{cases}$，解得，$m=n=5$.

若 $u-m=0$，即 $u=m=5$ 时，对应 $x=0$，符合条件，

∴ $m=n=5$ 为所求.

考点解读与检测 5 函数的奇偶性与周期性

纲 高考命题纲要 考点梳理

考点梳理

一、基本考点

1. 函数的奇偶性的概念

设函数 $y=f(x)$，$x\in D$，对任意的 $x\in D$ 都有 $f(-x)=f(x)$，则 $f(x)$ 是偶函数；若对任意的 $x\in D$ 都有 $f(-x)=-f(x)$，则 $f(x)$ 是奇函数.

由定义可知：

①函数的定义域关于原点对称是函数为奇函数或偶函数的必要条件，所以判定函数的奇偶性时，首先要看定义域是否关于原点对称. 如函数 $f(x)=x^2$，$x\in(-1,1]$ 既不是奇函数又不是偶函数.

②函数按奇偶性分类可分为：是奇函数但不是偶函数；是偶函数但不是奇函数；既是奇函数又是偶函数；既不是奇函数又不是偶函数.

③既是奇函数又是偶函数的函数，其解析式必为 $f(x)=0$；若 $f(x)$ 为奇函数，且 $f(0)$ 有定义，则必有 $f(0)=0$.

2. 奇偶函数的图像特征

$f(x)$ 为奇函数 ⇔ $f(x)$ 的图像关于原点对称；$f(x)$ 为偶函数 ⇔ $f(x)$ 图像关于 y 轴对称.

根据奇偶函数的图像特征，由函数 $f(x)$ 的图像的对称性可判断函数 $f(x)$ 的奇偶性；反之由 $f(x)$ 的奇偶性，可判断函数 $f(x)$ 的图像的对称性.

3. 周期函数

设函数 $y=f(x)$，$x\in D$，如果存在非零的常数 T，使得对任何 $x\in D$ 都有 $f(x+T)=f(x)$，则函数 $f(x)$ 为周期函数，T 为 $f(x)$ 的一个周期.

二、考点综合

1. 重点难点

函数奇偶性的应用

①利用奇偶性求有关函数值；

②利用奇偶性求有关函数解析式；

③利用奇偶性研究函数的其他性质；

④奇偶性的推广.

函数 $y=f(x)$ 对定义域内的任一 x 都有 $f(a+x)=f(a-x)$，则 $y=f(x)$ 的图像关于直线 $x=a$ 对称，函数 $y=f(x)$ 对定义域内的任一 x 都有 $f(a+x)=-f(a-x)$，则 $y=f(x)$ 的图像关于点 $(a,0)$ 成中心对称图形.

2. 热门考点

奇偶性、周期性、单调性等常常与函数方程、不等式结合在一起，具有较强的综合性，这些知识的综合与应用，是高考的一个热点.

3. 综合运用

奇偶性常与周期性和单调性等进行综合应用. 如奇偶性与单调性结合，则有如下结论：奇函数在 $[a,b]$ $(b>a>0)$ 上是增(减)函数，则它在 $[-b,-a]$ 上是增(减)函数，偶函数在 $[a,b]$ $(b>a>0)$ 上是增(减)函数，则它在 $[-b,-a]$ 上是减(增)函数.

在处理奇偶性和其他知识的综合性问题时，要注意化归思想的灵活运用.

举 高考命题举例 考点范题

考点范题

[范题 1]下面函数中，与函数 $y=\lg\frac{1-x}{1+x}$ 有相同的奇偶性的是(　　).

(A) $y=|x+1|+|x-1|$　　(B) $y=\frac{2^x-1}{3^x}$