

高等学校试用教材

水力机械强度计算

华中理工大学 徐纪方

清华大学 王曾璇 编著

甘肃工业大学 齐学义

GAO DENG XUE
XIAO JIAO CAI

机械工业出版社

$\tau_{r\theta}$ 、 $\tau_{\theta z}$ 、 τ_{zr} —— $r\theta z$ 坐标系中剪应力 τ 的分量。

τ_{xy} 、 τ_{yz} 、 τ_{zx} —— xyz 坐标系中剪应力 τ 的分量。

ϕ ——热流量, $[\phi]$ 为 W。

φ ——角度, 叶片转角, $[\varphi]$ 为 rad、 $(^\circ)$; 应力函数; 挠度系数。

φ 、 θ 、 z ——回转壳的坐标。

χ ——螺栓的载荷系数; 曲率改变量。

ψ ——轴承相对间隙 ($\psi = \Delta/d$), 转角系数。

ω ——角速度, $[\omega]$ 为 s^{-1} 。

ω_s ——固有圆频率, $[\omega_s]$ 为 s^{-1} 或 rad/s。

ω_{cr} ——临界圆频率, $[\omega_{cr}]$ 为 s^{-1} 或 rad/s。

前 言

本书是根据1984年5月在上海召开的高等工业学校流体动力机械专业教材编审委员会水力机械教材编审小组会议修订的教学计划,以及1985年9月在兰州召开的水力机械教材编审小组会议审定的“水力机械强度计算”教学大纲及编写提纲编写的。

“水力机械强度计算”是水力机械专业的主要专业课之一。本书的主要内容包括:弹性力学及板壳理论基础,反击型水轮机和叶片泵的主要零部件的强度计算、结构设计及有关机构的运动分析,振动理论的基础知识及轴系的振动计算以及油润滑轴承的设计计算。全书自成体系,注重基础理论与专业知识的密切结合,在阐明有关理论知识的基础上,论述了常用的计算方法,还编入了若干新的计算方法及研究成果,并对某些多年沿用的、有误的零部件强度计算公式进行了订正。这样就使得全书在体系和内容上都有所创新。目前国内外虽然已有若干水轮机、水泵的强度计算的书籍和手册,但还没有一本较系统地叙述了水力机械强度计算的理论基础和设计计算方法的书籍。本书在这方面做了尝试。

本书是高等学校水力机械专业的教学用书,也可作为高等教育自学考试机械类流体机械专业“水力机械强度计算”课程的教材,还可供有关专业的师生,以及从事水轮机、水泵科研、设计和生产的各级工程技术人员参考。本书是按照课程学时数为55编写的。

全书由华中理工大学徐纪方统稿。其中第一、四章由清华大学王曾璇编写,第二、三、七章由徐纪方编写,第五、六章由甘肃工业大学齐学义编写。编写过程中参考了清华大学王曾璇、唐德玲编写的“水力机械强度计算”讲义、华中理工大学徐纪方编写的“水轮机结构及强度计算”教材,并参考了甘肃工业大学、四川工业大学、江苏工学院及北京农业大学水力机械专业的有关教学资料。

本书由江苏工学院林厚强主审。

甘肃工业大学曹鹏、清华大学林汝长、姚志民、华中理工大学电力工程系贾宗模、力学系黄玉盈,江苏工学院查森等同志对本书的编写给予了指导和支持,我们谨此一并感谢!

在本书的编写过程中,得到了哈尔滨电机厂、哈尔滨大电机研究所、天津电气传动研究所、东方电机厂、韶关发电设备厂、沈阳水泵厂、沈阳水泵研究所、长沙水泵厂、天津发电设备厂及富春江水工机械厂的帮助与支持,对此,我们表示感谢!

书中难免有疏漏和错误之处,殷切希望使用本教材的师生及其他读者给予批评指正。

编者

1989.

常用符号

- A ——面积, 过水断面面积, $[A]$ 为 m^2 ; 待定常数, 常数。
- A_m ——油轴承冷却器的散热面积, $[A_m]$ 为 m^2 。
- a_0 ——导叶开度, $[a_0]$ 为 mm 。
- a_{0M} ——模型水轮机导叶开度, $[a_{0M}]$ 为 mm 。
- B ——分块瓦导轴承轴瓦宽度, $[B]$ 为 m ; 待定常数。
- b ——止漏装置狭小间隙沿半径方向的宽度, $[b]$ 为 mm 。
- b_0 ——导水机构高度, $[b_0]$ 为 mm 。
- \bar{b}_0 ——导水机构相对高度, $\bar{b}_0 = b_0/D_1$ 。
- C ——待定常数, 常数。
- C_f ——圆盘摩擦系数。
- C_M ——水力矩系数。
- C_p ——水力系数。
- c_h ——水的比热容, $[c_h]$ 为 $\text{J}/(\text{kg}\cdot\text{K})$ 。
- c_o ——润滑油的比热容, $[c_o]$ 为 $\text{J}/(\text{kg}\cdot\text{K})$ 。
- D ——直径, 主轴外径, $[D]$ 为 m ; 待定常数。
- D_0 ——导叶轴线分布圆直径, 主轴内径, $[D_0]$ 为 m ; 抗弯刚度, $[D_0]$ 为 $\text{N}\cdot\text{m}$ 。
- D_{0M} ——模型水轮机导叶轴线分布圆直径, $[D_{0M}]$ 为 m 。
- D_1 ——转轮直径, $[D_1]$ 为 m 。
- D_{1M} ——模型转轮直径, $[D_{1M}]$ 为 m 。
- D_2 ——转轮出口直径, $[D_2]$ 为 m 。
- D_3 ——尾水管进口直径, $[D_3]$ 为 m 。
- D_c ——控制环小耳孔所在圆周直径, $[D_c]$ 为 m 。
- $D_{,m}$ ——转轮接力器直径, $[D_{,m}]$ 为 m 或 mm 。
- D_y ——控制环大耳孔所在圆周直径, $[D_y]$ 为 m 。
- d ——轴颈直径, $[d]$ 为 m 或 mm 。
- d_B ——转轮体直径, $[d_B]$ 为 m 。
- \bar{d}_B ——轮毂比, $\bar{d}_B = d_B/D_1$ 。
- $d_{,m}$ ——导水机构接力器直径, $[d_{,m}]$ 为 m 。
- E ——材料的弹性模量, $[E]$ 为 Pa , MPa 。
- E_k ——动能, $[E_k]$ 为 J 。
- E_p ——变形位能, $[E_p]$ 为 J 。
- e ——轴承的偏心距, $[e]$ 为 mm 。
- e_0 ——导叶的相对偏心距。
- F ——力, $[F]$ 为 N 。
- F_t ——作用在导叶转臂上的驱动力, $[F_t]$ 为 N 。
- F_c ——离心力, $[F_c]$ 为 N 。
- F_{cr} ——转叶机构中操作架作用力, $[F_{cr}]$ 为 N 。
- F_f ——摩擦力, $[F_f]$ 为 N 。
- F_l ——连杆作用力, $[F_l]$ 为 N 。
- F_p ——作用在转桨式转轮叶片上的驱动力, $[F_p]$ 为 N 。
- F_s ——表面力集度, 简称表面力, $[F_s]$ 为 N/m^2 。
- $F_{,m}$ ——接力器作用力, $[F_{,m}]$ 为 N 。
- F_{sx}, F_{sy}, F_{sz} ——表面力在 x 、 y 、 z 方向的分量。
- F_V ——体积力集度, 简称体积力, $[F_V]$ 为 N/m^3 。
- $F_{Vr}, F_{V\theta}, F_{Vz}$ ——体积力在 r 、 θ 、 z 方向的分量。
- F_{Vx}, F_{Vy}, F_{Vz} ——体积力在 x 、 y 、 z 方向的分量。
- F_z ——轴向水推力, $[F_z]$ 为 N 。
- F'_{iz} ——单元轴向力, $[F'_{iz}]$ 为 N/m^3 。
- F'_{ixi} ——作用在一个叶片上的单元轴向力, $[F'_{ixi}]$ 为 N/m^3 。
- F_ν ——法线为 ν 的截面上的应力, $[F_\nu]$ 为 Pa , MPa 。
- $F_{\nu x}, F_{\nu y}, F_{\nu z}$ ——法线为 ν 的斜截面上的应力在 x 、 y 、 z 方向的分量。
- f ——摩擦系数; 窄小的过水断面面积, $[f]$ 为 m^2 。
- f_p ——减压孔过水断面面积, $[f_p]$ 为 m^2 。
- f_y ——止漏环间隙过水断面面积, $[f_y]$ 为 m^2 。
- G ——剪变模量, $[G]$ 为 Pa , MPa 。

- g ——重力加速度, $[g]$ 为 m/s^2 , $g = 9.81 m/s^2$ 。
- H ——水头, $[H]$ 为 m ; 待定常数。
- H_{max} ——最大水头, $[H_{max}]$ 为 m 。
- H_{min} ——最小水头, $[H_{min}]$ 为 m 。
- H_r ——设计水头, $[H_r]$ 为 m 。
- H_s ——吸出高度, $[H_s]$ 为 m 。
- h ——薄板的厚度, $[h]$ 为 m ; 轴承油膜厚度, $[h]$ 为 mm ; 轴的法兰厚度, $[h]$ 为 m 。
- I ——转动惯量, $[I]$ 为 $kg \cdot m^2$ 。
- I_c ——惯性矩, $[I_c]$ 为 m^4 。
- I_p ——极惯性矩, $[I_p]$ 为 m^4 。
- K ——表面粗糙度, $[K]$ 为 mm ; 轴承工作可靠性系数; 待定系数。
- k ——弹簧刚度, $[k]$ 为 N/m ; 传热系数, $[k]$ 为 $W/(m^2 \cdot K)$; 系数; 安全系数。
- k_φ ——扭转刚度, $[k_\varphi]$ 为 $N \cdot m$ 。
- L ——长度, $[L]$ 为 m ; 翼弦长度, $[L]$ 为 mm 。
- L_c ——导水机构中的连杆长度, $[L_c]$ 为 m 。
- L/t ——叶栅密度。
- L_H ——导水机构中的转臂长度, $[L_H]$ 为 m 。
- L_p ——导水机构中副转臂长度, $[L_p]$ 为 m 。
- l ——轴瓦长度, $[l]$ 为 m ; 圆柱壳长度, $[l]$ 为 m 。
- l/d ——轴承的长径比。
- l, m, n ——方向余弦; 刚性环断面的几何特性。
- l_c ——转叶机构中的连杆长度, $[l_c]$ 为 m 。
- l_p ——转叶机构中的转臂长度, $[l_p]$ 为 m 。
- M ——力矩, $[M]$ 为 $N \cdot m$; 单位弯矩, $[M]$ 为 $N \cdot m/m$ 。
- M_0 ——单位弯矩、单位力矩, $[M_0]$ 为 $N \cdot m/m$ 。
- M_f ——摩擦力矩, $[M_f]$ 为 $N \cdot m$ 。
- M_h ——水力矩, $[M_h]$ 为 $N \cdot m$ 。
- M_r, M_θ —— $x\theta z$ 坐标系中, 圆柱壳的弯矩, $[M_r]$ 、 $[M_\theta]$ 均为 $N \cdot m/m$ 。
- M_T ——力矩, $[M_T]$ 为 $N \cdot m$ 。
- M_x, M_y —— xyz 坐标系中, 薄壳的弯矩, $[M_x]$ 、 $[M_y]$ 均为 $N \cdot m/m$ 。
- M_{xy}, M_{yx} —— xyz 坐标系中, 薄壳的力矩, $[M_{xy}]$ 、 $[M_{yx}]$ 均为 $N \cdot m/m$ 。
- M_x, M_θ —— $x\theta z$ 坐标系中, 圆柱壳的弯矩, $[M_x]$ 、 $[M_\theta]$ 均为 $N \cdot m/m$ 。
- M_y ——导水机构的密封力矩, $[M_y]$ 为 $N \cdot m$ 。
- M'_1 ——单元水力矩, $[M'_1]$ 为 $N \cdot m$ 。
- N ——法向力或拉压力, $[N]$ 为 N/m , 待定常数。
- N_φ, N_θ —— $\varphi\theta z$ 坐标系中, 回转壳的法向力, $[N_\varphi]$ 、 $[N_\theta]$ 均为 N/m 。
- $N_{\varphi\theta}, N_{\theta\varphi}$ —— $\varphi\theta z$ 坐标系中, 回转壳的顺剪力, $[N_{\varphi\theta}]$ 、 $[N_{\theta\varphi}]$ 均为 N/m 。
- N_x, N_y —— xyz 坐标系中, 薄壳的法向力, $[N_x]$ 、 $[N_y]$ 均为 N/m 。
- N_x, N_θ —— $x\theta z$ 坐标系中, 圆柱壳的法向力, $[N_x]$ 、 $[N_\theta]$ 均为 N/m 。
- N_{xy}, N_{yx} —— xyz 坐标系中, 薄壳的顺剪力, $[N_{xy}]$ 、 $[N_{yx}]$ 均为 N/m 。
- n ——转速, $[n]$ 为 r/min 。
- n'_1 ——水轮机的单元转速, $[n'_1]$ 为 r/min 。
- n_{cr} ——临界转速, $[n_{cr}]$ 为 r/min 。
- n_R ——飞逸转速, $[n_R]$ 为 r/min 。
- n_s ——比转速, $[n_s]$ 为 $m \cdot kW$ 。
- P ——功率, $[P]$ 为 W, kW ; 重量载荷, $[P]$ 为 N 。
- P_f ——轴承摩擦损失功率, $[P_f]$ 为 kW 。
- p ——水压力, 油压力, 均布压力, p 为 Pa, MPa 。
- p_k ——真空压力, $[p_k]$ 为 Pa, MPa 。
- p_r ——额定工作油压, $[p_r]$ 为 Pa, MPa 。
- p_o ——汽化压力, $[p_o]$ 为 Pa, MPa 。
- Q_0 ——单位剪力, $[Q_0]$ 为 N/m 。
- Q_r ——圆板的横向剪力, $[Q_r]$ 为 N/m 。
- Q_x, Q_y —— xyz 坐标系中, 薄壳的横剪力, $[Q_x]$ 、 $[Q_y]$ 为 N/m 。
- q ——均布载荷, $[q]$ 为 N/m 。
- q_{m0} ——油的质量流量, $[q_{m0}]$ 为 kg/s 。
- q_V ——水轮机、水泵的流量, $[q_V]$ 为 m^3/s 。
- q_{V0} ——油的体积流量, $[q_{V0}]$ 为 m^3/s 。

- q_{Vh} ——油轴承冷却水的体积流量, $[q_{Vh}]$ 为 m^3/s 。
 q'_{v1} ——水轮机的单元流量, $[q'_{v1}]$ 为 L/s , m^3/s 。
 q_1, q_2, q_3 ——回转壳体表面载荷在经线方向、纬线方向和法线方向的分量, $[q_1], [q_2], [q_3]$ 均为 N/m^2 。
 Δq ——漏损流量, $[\Delta q]$ 为 m^3/s 。
 R ——支反力, $[R]$ 为 N ; 半径, $[R]$ 为 m 。
 Re ——雷诺数。
 r ——半径, $[r]$ 为 m 。
 r, θ, z ——圆柱坐标。
 S ——位移矢量, $[S]$ 为 mm 。
 S ——接力器行程, $[S]$ 为 mm ; 弧长。
 S_u ——位移边界。
 S_a ——应力边界。
 T ——热力学温度, $[T]$ 为 K ; 周期, $[T]$ 为 s^{-1} 。
 t ——摄氏温度, $[t]$ 为 $^{\circ}C$ 。
 u, v, w ——位移在 x, y, z 方向的分量。
 u_r, u_{θ}, w ——位移在 r, θ, z 方向的分量。
 V ——体积, $[V]$ 为 m^3 。
 v ——水流速度, $[v]$ 为 m/s 。
 W ——抗弯截面系数, $[W]$ 为 m^3 。
 W_p ——抗扭截面系数, $[W_p]$ 为 m^3 。
 x, y, z ——直角坐标系。
 x, θ, z ——圆柱壳的坐标系。
 y ——梁的变形挠度, $[y]$ 为 mm 。
 z ——转轮叶片数; 止漏装置沟槽数; 冷却器数。
 z_0 ——导叶数。
 z_{0M} ——模型水轮机导叶数。
 z_g ——固定导叶数。
 α ——系数; 角度, $[\alpha]$ 为 $rad, (^{\circ})$ 。
 α_d ——导叶出口角, $[\alpha_d]$ 为 $rad, (^{\circ})$ 。
 α_l ——线膨胀系数, $[\alpha_l]$ 为 K^{-1} 。
 α_0 ——导叶出流角, $[\alpha_0]$ 为 $rad, (^{\circ})$ 。
 α ——应力集中系数。
 β ——角度, $[\beta]$ 为 $rad, (^{\circ})$; 衰减系数。
 γ ——剪应变。
 γ ——角度, $[\gamma]$ 为 $rad, (^{\circ})$ 。
 $\gamma_{xy}, \gamma_{yx}, \gamma_{zx}$ —— xy, yz, zx 平面内的剪应变。
 $\gamma_{r\theta}, \gamma_{\theta z}, \gamma_{zr}$ —— $r\theta, \theta z, zr$ 平面内的剪应变。
 Δ ——轴承间隙, $[\Delta]$ 为 mm 。
 ΔP ——止漏装置中的功率损失, $[\Delta P]$ 为 kW 。
 ΔP_q ——由漏损流量引起的功率损失, $[\Delta P_q]$ 为 kW 。
 ΔP_f ——摩擦功率, $[\Delta P_f]$ 为 kW 。
 δ ——角度, $[\delta]$ 为 $rad, (^{\circ})$; 薄壳厚度, 附面层厚度、叶片厚度, 轴承单边间隙, $[\delta]$ 为 mm 。
 e ——线应变; 轴承的相对偏心距; 导叶绝对偏心距, $[e]$ 为 cm 。
 $\epsilon_x, \epsilon_y, \epsilon_z$ ——沿 x, y, z 方向的线应变。
 $\epsilon_r, \epsilon_{\theta}, \epsilon_z$ ——沿 r, θ, z 方向的线应变。
 ζ_y ——止漏环的阻力系数。
 ζ_p ——混流式转轮减压孔的阻力系数。
 ζ, C, ξ ——斜向导水机构中, 与导叶垂直的平面内的坐标系。
 η_h ——水轮机的水力效率。
 θ ——变形转角, 角度, $[\theta]$ 为 $rad, (^{\circ})$ 。
 κ ——系数; 联轴螺栓的拉紧系数。
 λ ——角度, $[\lambda]$ 为 $rad, (^{\circ})$; 水流的阻力系数; 轴承工作时的摩擦特性系数; 柔度系数。
 μ ——泊松比; 流量系数; 动力粘度, $[\mu]$ 为 $Pa \cdot s$ 。
 ν ——运动粘度, $[\nu]$ 为 m^2/s 。
 ζ_{max} ——最大压力上升系数。
 ρ ——水的密度, $[\rho]$ 为 kg/m^3 。
 ρ_0 ——油的密度, $[\rho_0]$ 为 kg/m^3 。
 σ ——正应力, $[\sigma]$ 为 Pa, MPa 。
 σ_b ——弯曲应力, $[\sigma_b]$ 为 Pa, MPa 。
 σ_{co} ——综合应力, $[\sigma_{co}]$ 为 Pa, MPa 。
 $\sigma_r, \sigma_{\theta}, \sigma_z$ —— $r\theta z$ 坐标系中正应力 σ 的分量。
 σ_t ——拉应力, $[\sigma_t]$ 为 Pa, MPa 。
 $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z$ —— xyz 坐标系中正应力 σ 的分量。
 τ ——剪应力, $[\tau]$ 为 Pa, MPa 。

目 录

第一篇 弹性力学基础

第一章 弹性力学的基本知识	1
第一节 引言	1
第二节 弹性力学中基本物理量的定义、符号和正负号规定	3
第三节 空间问题的基本方程及空间轴对称问题	8
第四节 弹性平面问题的极坐标基本方程	17
第五节 弹性平面问题的极坐标解法	23
第六节 极坐标轴对称问题	29
第七节 受均匀压力的圆环和圆筒	33
第八节 等厚度旋转圆盘中的应力	35
第九节 轴对称载荷作用下的刚性环	37
第二章 轴对称圆板的弯曲	45
第一节 薄板的基本概念及计算假定	45
第二节 圆形薄板的轴对称弯曲	47
第三节 轴对称圆形薄板横截面上的内力	49
第四节 圆形薄板轴对称弯曲基本微分方程的解	52
第五节 计算举例	55
第三章 薄壳问题	60
第一节 概述	60
第二节 薄壳的定义与计算假定	60
第三节 薄壳中的内力与应力	61
第四节 回转壳的无矩理论	64
第五节 轴对称载荷作用下圆柱壳的有矩理论	72
第六节 轴对称圆柱壳弯曲问题的简化计算	77

第二篇 水力机械强度计算

第四章 引水部件及泵壳	87
第一节 金属蜗壳强度计算	87
第二节 座环强度计算	99
第三节 蜗壳式泵体的强度计算	107
第四节 分段式多级泵中段的强度计算	111
第五节 双层壳体泵泵体的强度计算	114
第五章 导水机构	127
第一节 径向式导水机构的几何参数	127
第二节 导水机构结构设计的要求	129
第三节 导水机构运动图的绘制	130

IV

第四节	径向式导水机构运动关系的数值分析	135
第五节	导水机构接力器参数的确定	140
第六节	导叶	147
第七节	控制环	152
第八节	支持盖和顶盖	158
第六章	转轮与叶轮	167
第一节	轴流式转轮与叶轮接力器计算	167
第二节	轴流式转轮叶片强度计算	177
第三节	转桨式水轮机转轮体的强度计算	180
第四节	混流式转轮的轴向水推力及其减压装置	188
第五节	止漏装置	193
第六节	混流式转轮叶片强度计算	198
第七节	离心泵叶轮的强度计算	202
第七章	轴与轴承	209
第一节	轴的结构及基本尺寸的确定	209
第二节	厚壁轴法兰与轴身连接处的应力计算	212
第三节	薄壁轴法兰与轴身连接处的应力计算	217
第四节	振动的基本知识	226
第五节	轴的扭转振动计算	229
第六节	用能量法计算轴的横向振动	233
第七节	用传递矩阵法计算轴的横向振动	240
第八节	水轮机油润滑导轴承的计算	250
参考文献		262

第一篇 弹性力学基础

第一章 弹性力学的基本知识

第一节 引言

一、弹性力学的任务

固体具有多种多样的物理属性，力学性质是其重要的物理属性之一。一般固体在静力作用下所发生的力学性质的现象是很复杂的〔1〕，有弹性变形、塑性变形、蠕变等。我们将弹性以外的变形部分略去，假定在除去载荷后，完全恢复到变形前的原来形状，则这样的固体称为弹性体。弹性力学的基本任务就是从宏观上研究弹性体在外力作用下或温度变化时的反应，确切地说，就是确定在外力作用下或温度变化时，弹性体的应力和应变以及与应变有直接关系的位移。

弹性力学和材料力学的总任务是相同的，但弹性力学研究问题比材料力学更深入、更精确、更广泛。例如，在材料力学中研究梁的弯曲时，除了和弹性力学一样引用基本假设外，还引用梁截面的平面假设，得出的正应力沿梁的高度是按直线规律变化（图1-1 a）。这对细长的梁是接近实际情况的。但如果梁的高度与跨度之比 $h/l > 1/4$ ，那么平

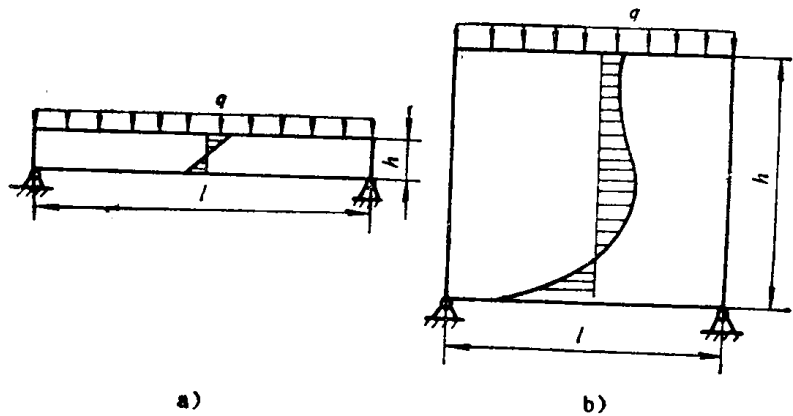


图1-1 正应力沿梁高度的变化规律

a) 直线变化 b) 非直线变化

面假设就不再适用，从而应力也不再按直线规律变化（图1-1 b）。解决这样的问题需要用弹性力学的方法。又如当研究具有铆钉的拉杆时，用材料力学方法通常假设拉应力沿净面积上均匀分布（图1-2 a），实际情况是在铆钉孔孔边附近将出现比平均拉应力大好几倍的应力集

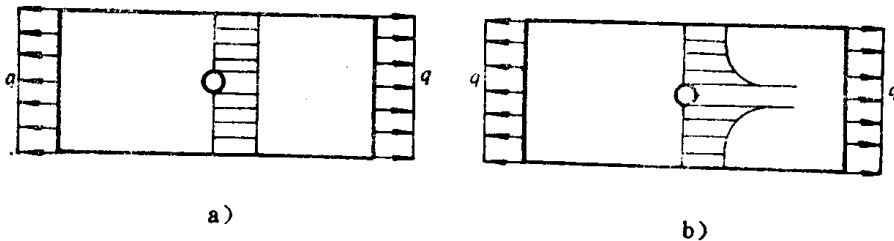


图1-2 具有铆钉拉杆的应力分布情况

a) 假设沿拉杆净面积应力均布 b) 实际上孔边出现应力集中现象

中现象(图1-2b),象这样的应力集中问题,只能用弹性力学方法来解决。诸如板和壳中的应力,非圆柱截面杆的扭转,两个弹性体的接触应力等问题,都是材料力学方法所不能解决的,必须用弹性力学的方法才能解决。

二、弹性力学的基本假设

客观存在的物体是多种多样的,矛盾错综复杂,在研究问题时,首先要抓住主要矛盾,撇开那些非本质的、次要的因素,也就是说把研究的对象进行科学的抽象。弹性力学中也是这样,因而在长期的实验和实践中提出以下六个基本假设。

(一) 物体是连续的

假设整个物体的体积被组成该物体的介质完全充满,不留下任何空隙。这样,物体内的一些物理量,例如应力、应变和位移等等,才可能是连续的,因而才可能用坐标的连续函数来表示它们的变化规律,而且只有在这一假设的基础上才存在应力,因为应力的概念是在面积趋近于无穷小时取极限的基础上建立起来的。实际上一切物体都是由微粒组成的,严格来说,不符合上述假设。但是,可以想象,只要微粒的尺寸及相邻微粒之间的距离都比物体的尺寸小得很多,那么,关于物体连续性的假设,就不会引起显著的误差。

(二) 物体是完全弹性的

物体在外力作用下产生变形,当外力完全去除后能完全恢复原状,而且没有任何剩余变形,并假设材料服从虎克定律,即应力与应变成正比。

(三) 物体是均匀的

认为整个物体是由同一种材料组成,这样整个物体的所有各部分具有相同的力学性质(例如弹性模量和泊松比等),亦即不随坐标而变,因此可以取出该物体的任意一小部分来加以分析,然后把分析结果用于整个物体。

(四) 物体是各向同性的

认为物体每一点的所有方向上的物理性质是相同的。均匀性和各向同性这两个概念是有区别的,前者是指物体各点(点的概念只有在连续性假设的基础上才成立)的物理性质相同,而后者是指某一点在各不同方向的物理性质(弹性性质)相同。

凡是符合以上四个假设的物体,就称为理想弹性体。

(五) 物体的位移和形变是微小的

认为物体受力变形后,整个物体所有各点的位移都远远小于物体原来的尺寸,并且应变和转角都远小于1。这样在建立物体变形以后的平衡方程时,可以用变形以前的尺寸来代替变形以后的尺寸,而不致引起显著的误差;并且在考察物体的形变和位移时,转角和应变的二次幂或乘积都可以略去不计(例如,对于微小的转角 α ,有 $\operatorname{tg} \alpha = \alpha + \frac{1}{3}\alpha^3 + \dots \approx \alpha$,
 $\sin \alpha = \alpha - \frac{1}{3!}\alpha^3 + \dots \approx \alpha$; 对于微小的正应变 ϵ_x ,有 $\frac{1}{1 + \epsilon_x} = 1 - \epsilon_x + \epsilon_x^2 - \epsilon_x^3 + \dots \approx 1 - \epsilon_x$,等等)。这就使得弹性力学里的代数方程和微分方程都简化为线性方程。因而,还可以用叠加原理,即弹性体上同时作用几个力等于每个力单独作用的总和。

(六) 物体无初应力

认为物体是处于自然状态,即在载荷或温度等作用之前应力为零。实际上,物体内常有初应力存在,但是在一般情况下可以略去不计。

上述基本假设中(五)属于几何假设,其它假设属于物理假设。根据以上假设所建立的弹

性力学,称为线性弹性力学,它发展较早,理论严密,体系完整,在工程实践中的应用很广泛。

三、弹性力学的基本方法

弹性力学的基本内容包括两部分,第一部分是建立基本方程,第二部分是根据基本方程求解各类具体问题。

弹性力学在建立基本方程时所采用的方法比材料力学更加一般化,它不是对一个一个具体结构物建立方程,而是假想物体内部有无数个单元平行六面体和表面为无数个单元四面体所组成。考虑这些单元体的平衡,可写出一组平衡微分方程,但未知应力数总是超过微分方程数,因此弹性力学问题总是超静定的,必须考虑变形条件。由于物体在变形之后仍保持连续,所以单元体之间的变形必须是协调的,因此可以得出一组表示变形连续性的微分方程。还要用广义虎克定律表示应力和应变之间的关系。另外,在物体表面上还须考虑物体内部应力与外载荷之间的平衡,称为边界条件。这样,就有足够的微分方程数以求解未知的应力、应变和位移。所以,解决弹性力学问题时,必须考虑静力平衡条件、变形连续条件与广义虎克定律,即是关于静力学、几何、物理等三个方面条件以及边界条件。

弹性力学在求解方程时,常用解析法和各种近似法。解析法需应用偏微分方程等数学理论,对于某些简单问题亦可采用“逆法”或“半逆法”〔2、3〕,就是假设全部的解或部分的解,然后检查是否满足全部方程和边界条件,或用它们确定基本未知部分。近年来常采用近似法,即各种能量法、差分法,特别是伴随数字电子计算机而出现的有限元法和各种控制误差的方法等。近似法的应用,扩大了弹性力学解决实际问题的范围。

第二节 弹性力学中基本物理量的定义、符号和正负号规定

弹性力学中经常遇到的物理量有四个,即外力、应力、应变和位移。这些量常在某一坐标系中给定,本书采用右手正交坐标系。

一、外力

作用于物体上的外力通常分为两类:体积力(也称为体力)和表面力(也称为面力)。

体力系指分布在物体全部体积内的力,它作用于物体内部的每一个质点上,例如重力、磁引力和惯性力等等。一般情况下,各点所受到的体积力是不相同的,它是各点位置坐标的函数。设一弹性体,如图1-3所示,现规定体内任一点 M 所受到的体积力的大小和方向。为此,取一包含 M 点的微元体,体积为 ΔV ,假定作用于该微元体上的体积力为 ΔF_V ,它是一个矢量。我们规定极限

$$\lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{\Delta F_V}{\Delta V} = \frac{dF_V}{dV} = F_V \quad (1-1)$$

为物体在 M 点受到的单位体积力,称为体积力

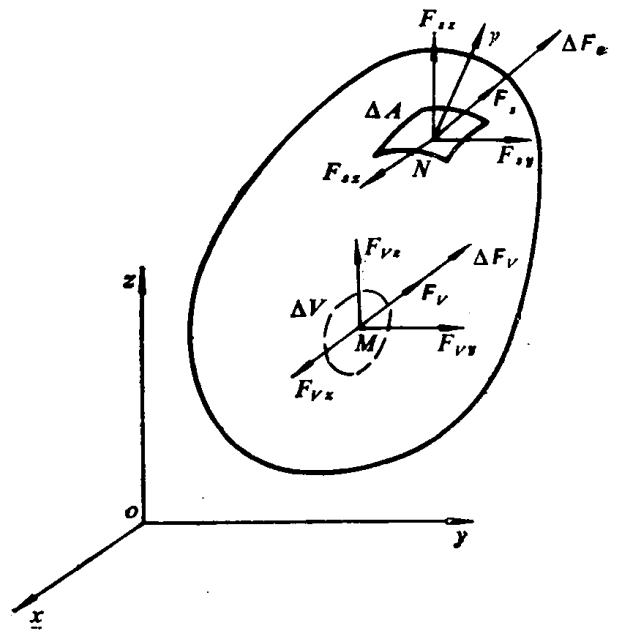


图1-3 体积力和表面力

集度，简称体积力（体力），它亦是一个矢量。通常以在坐标系中三个分量形式给出，在直角坐标系中记为 F_{Vx} 、 F_{Vy} 、 F_{Vz} ，分别表示 F_V 在 x 、 y 、 z 坐标轴上的投影。体积力分量以与坐标轴正方向一致者为正，相反者为负。体积力的量纲是 $L^{-2}MT^{-2}$ ，单位为 N/m^3 。

面力系指分布于物体表面上的力，如与该物体相接触的气体、液体或固体的压力等。一般情况下物体表面上各点所受到的表面力是不相同的，它是表面上各点位置坐标的函数。现在规定表面上任一点 N 所受到的表面力的大小和方向。为此取一包含 N 点的微元面积，面积为 ΔA ，假定在该微元面上作用的面力为 ΔF_s ，它是一个矢量（图1-3）。设面力在微元面上连续分布，我们规定极限

$$\lim_{\Delta A \rightarrow 0} \frac{\Delta F_s}{\Delta A} = \frac{dF_s}{dA} = F_s \quad (1-2)$$

为物体在表面上 N 点所受到的单位面积上的表面力，称为表面力集度，简称表面力（面力），它亦是一个矢量。通常以在坐标系中的三个分量形式给出，在直角坐标系中记为 F_{sx} 、 F_{sy} 、 F_{sz} ，它们分别表示 F_s 在 x 、 y 、 z 坐标轴上的投影。图 1-3 中的 ν 表示表面在 N 点的外法线方向。表面力分量以与坐标轴正方向一致者为正，相反者为负。表面力的量纲是 $L^{-1}MT^{-2}$ ，单位为 Pa（即 N/m^2 ）。

二、应力

（一）应力的概念

物体在外力作用下，内部将产生抵抗变形的内力。为了研究体内某点 K 的内力，假想用通过 K 点的一个截面 mn 将物体分为 I、II 两部分（图1-4），将 I 部分撤开，则 I 部分将在截面 A 上对 II 部分作用一定的内力。假若内力在截面 mn 上是连续分布的，包围 K 点取一微元面积 ΔA ，简称面元，面元的外法线方向为 ν 。设 ΔA 上作用的内力为 ΔF_s ，它是一个矢量。定义极限

$$\lim_{\Delta A \rightarrow 0} \frac{\Delta F_s}{\Delta A} = \frac{dF_s}{dA} = F_s \quad (1-3)$$

为物体内部过 K 点、外法线为 ν 的截面上 K 点的应力，它也是一个矢量，称为应力矢量。

对于应力，除了在推导某些公式的过程中以外，通常都不用它沿坐标轴方向的分量，因为这些分量与物体的变形或材料的强度都没有直接的关系。与物体的变形和材料的强度有直接相关的，是应力 F_s 在法线 ν 上的分量 σ_s ，称为给定截面上的法向应力（或正应力），和应力 F_s 在截面上的分量 τ_s ，称为截面的剪应力，显然

$$F_s^2 = \sigma_s^2 + \tau_s^2 \quad (1-4)$$

应力及其分量的单位均为 Pa 或 MPa。

（二）应力符号 剪应力互等定理

在物体内的同一点 M ，在不同截面上的应力是不同的。为了分析这一点应力状态，即各个截面上的应力大小和方向，通过 M 点从物体内部取出一个微小的正平行六面体（图1-5），它的棱边平行于坐标轴，边长为 $MA = \Delta x$ ， $MB = \Delta y$ ， $MC = \Delta z$ 。将每个面上的应力分解为正应力和两个剪应力，分别与三个坐标轴平行。正应力用 σ 表示，为了表明这个作用力的作用

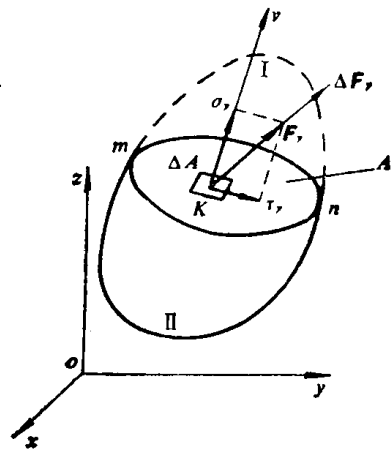


图1-4 截面上的应力

面和作用方向，加上一个坐标角码，例如， σ_x 表示正应力的作用面与 x 轴垂直。剪应力用 τ 表示，并加上两个坐标角码，前一个下标表示它的作用面与哪个轴垂直，后一个下标表示它的作用方向与哪个轴平行。例如， τ_{yx} 表示剪应力的作用面与 y 轴垂直，它的方向与 x 轴平行。

那么，对于应力的符号是怎样规定的呢？我们规定：当某一截面上的外法线是沿坐标轴的正方向时，这个截面就称为正面，而这个面上的应力分量就以沿坐标轴的正方向为正，沿坐标轴的负方向为负。相反，如果某一截面上的外法线是沿着坐标轴的负方向，这个截面就称为负面，而这个截面上的应力分量就以沿坐标轴的负方向为正，沿坐标轴的正方向为负。图 1-5 上所示的应力分量全部都是正的。注意，虽然上述规定，对正应力来说结果和材料力学的规定相同（拉应力为正，压应力为负），但是对于剪应力，结果却与材料力学中规定不完全相同。

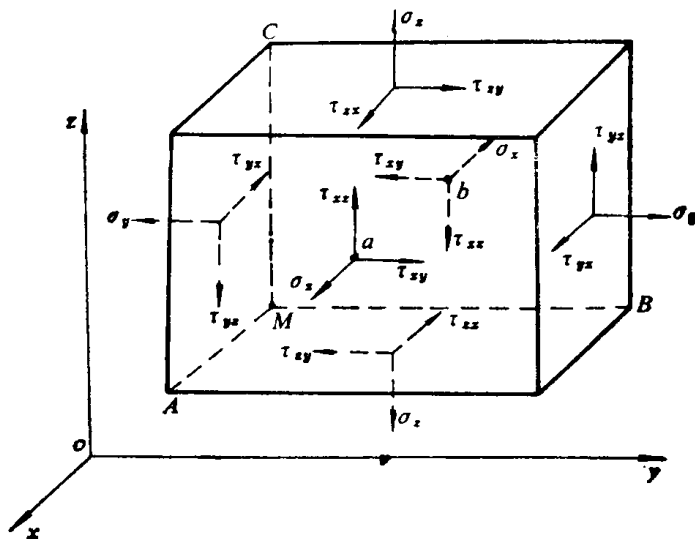


图1-5 物体内一点的应力状态

六个剪应力之间具有一定的互等关系。例如，以连接六面体前后两面中心的直线 ab 为矩轴，列出力矩平衡方程，得

$$2\tau_{yx}\Delta z\Delta x \frac{\Delta y}{2} - 2\tau_{xy}\Delta y\Delta x \frac{\Delta z}{2} = 0$$

同样可以列出其余两个相类似的方程，简化后得出

$$\tau_{yz} = \tau_{zy}, \quad \tau_{zx} = \tau_{xz}, \quad \tau_{xy} = \tau_{yx} \quad (1-5)$$

这就证明了剪应力互等定理。该定理指出：作用在两个互相垂直面上并且垂直于该两面交线的剪应力是互等的（大小相等，正负号也相同）。因此，剪应力记号的两个下标可以对调。

对于应力分量的矩阵表达式，当应用剪应力互等定理后，将成为一个三阶对称的应力矩阵，即

$$[\Sigma] = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{yx} & \tau_{zx} \\ \tau_{xy} & \sigma_y & \tau_{zy} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{yx} & \tau_{zx} \\ \tau_{yx} & \sigma_y & \tau_{zy} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_z \end{bmatrix} \quad (1-6)$$

应该指出，如果采用材料力学中剪应力正负号规定，则剪应力互等定理将表示为： $\tau_{yz} = -\tau_{zy}$ ， $\tau_{zx} = -\tau_{xz}$ ， $\tau_{xy} = -\tau_{yx}$ ，显然不如采用上述规定来得简单。但必须指出，在应用莫尔圆（应力圆）时，就必须采用材料力学中的规定。

可以证明〔4〕，在物体的任意一点，如果已知 σ_x 、 σ_y 、 σ_z 、 τ_{xy} 、 τ_{yz} 、 τ_{zx} 这六个应力分量，就可以求得经过该点的任意截面的正应力和剪应力。因此，上述六个应力分量可以完全确定该点的应力状态。

（三）斜截面上的应力 边界条件

假设物体在任一点 M 的六个应力分量 σ_x 、 σ_y 、 σ_z 、 $\tau_{xy} = \tau_{yx}$ 、 $\tau_{yz} = \tau_{zy}$ 、 $\tau_{zx} = \tau_{xz}$ 为已

知, 试求经过 M 点的任一斜面上的应力。为此, 包围任一点 M 取一微元四面体 (图1-6), 其中三个面垂直于坐标轴, 另外一个面是平行于斜截面的。垂直于三个坐标轴的面上的应力分量按其正方向规定标在图上, 斜面上的应力矢量在坐标轴方向上的分量, 用 F_{vx} 、 F_{vy} 、 F_{vz} 表示, 以与坐标轴方向一致者为正。

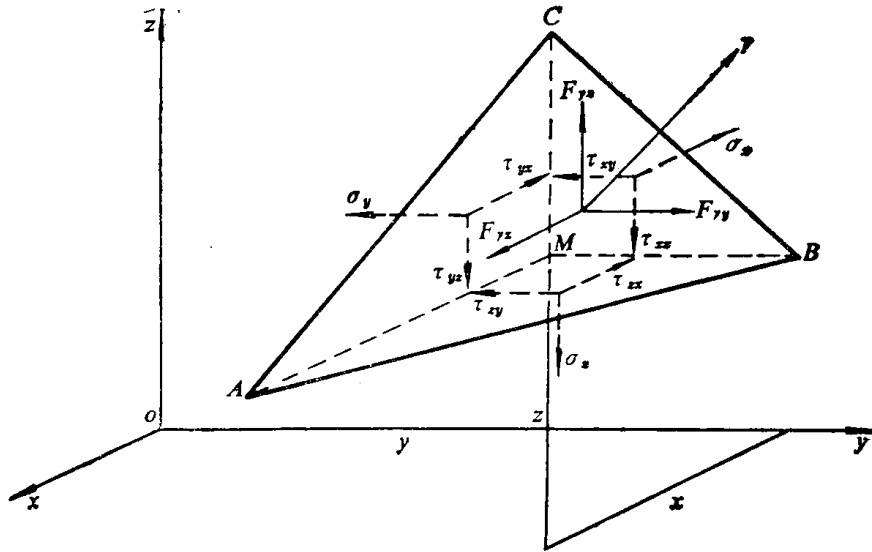


图1-6 斜截面上的应力

设斜截面外法线为 ν , 则其方向余弦为

$$\cos(\nu, x) = l, \quad \cos(\nu, y) = m, \quad \cos(\nu, z) = n$$

若微元 ΔABC 的面积为 ΔA , 则 ΔMBC 、 ΔMAC 、 ΔMAB 的面积分别为 $l\Delta A$ 、 $m\Delta A$ 、 $n\Delta A$ 。又设 M 点到 ΔABC 的高为 Δh , 则四面体的体积为 $\frac{1}{3}\Delta h\Delta A$ 。根据四面体的平衡条件 $\Sigma F_x = 0$,

$$\text{得} \quad F_{vx}\Delta A - \sigma_x l\Delta A - \tau_{yx}m\Delta A - \tau_{zx}n\Delta A + \frac{1}{3}F_{vx}\Delta h\Delta A = 0$$

等式两边除以 ΔA , 又将四面体紧缩于 M 点, 即 $\Delta h \rightarrow 0$ 取极限, 移项后得,

$$F_{vx} = \sigma_x l + \tau_{yx}m + \tau_{zx}n$$

同理, 由 $\Sigma F_y = 0$ 、 $\Sigma F_z = 0$ 得出其他二式, 故

$$\begin{Bmatrix} F_{vx} \\ F_{vy} \\ F_{vz} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{yx} & \tau_{zx} \\ \tau_{xy} & \sigma_y & \tau_{zy} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_z \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} l \\ m \\ n \end{Bmatrix} \quad (1-7)$$

引用式 (1-6), 则上式可写为:

$$\{F_v\} = [\Sigma]\{L\} \quad (1-7')$$

式中

$$\{F_v\} = [F_{vx} \ F_{vy} \ F_{vz}]^T \quad (1-8)$$

$$\{L\} = [l \ m \ n]^T \quad (1-9)$$

式 (1-8)、式 (1-9)、式 (1-6) 分别为斜截面上的应力列阵、方向余弦列阵及应力矩阵在三维空间的表达式。

当 $\Delta h \rightarrow 0$ 而取极限时, 斜微分面 ABC 与通过 M 点所考察的斜微分面相重合, 方程式 (1-7) 表示通过 M 点而其外法线为 ν 的斜微分面的应力 F_v , 在坐标轴上的投影 F_{vx} 、 F_{vy} 、

F_{vx} , 可以用通过该点且平行于坐标的三个微分面上的 9 个应力分量 σ_x 、 σ_y 、 σ_z 、 $\tau_{xy} = \tau_{yx}$ 、 $\tau_{yz} = \tau_{zy}$ 、 $\tau_{zx} = \tau_{xz}$ 表示。因此物体中任一点的应力状态可以用上述 9 个应力分量来表达。

将 F_{vx} 、 F_{vy} 、 F_{vz} 投影到法线 ν 上, 得到所考察的斜微分面上的正应力。

$$\begin{aligned}\sigma_\nu &= F_{vx}l + F_{vy}m + F_{vz}n \\ &= \sigma_x l^2 + \sigma_y m^2 + \sigma_z n^2 + 2\tau_{xy}lm + 2\tau_{yz}mn + 2\tau_{zx}nl\end{aligned}\quad (1-10)$$

如在物体表面附近, 割取一个四面微分体, 如图1-6所示, 斜微分面 ABC 是物体的表面, 则 F_{vx} 、 F_{vy} 、 F_{vz} 表示作用于该处表面上的外力(表面力)在坐标上的投影。这样, 式(1-7)表示物体的表面力与内部应力的关系, 在这种情况下这个关系式称为边界条件。用 F_{sx} 、 F_{sy} 、 F_{sz} 表示表面力的分量, 此时的应力值为应力边界值, 于是对于边界上微元四面体的平衡条件为

$$\begin{Bmatrix} F_{sx} \\ F_{sy} \\ F_{sz} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} (\sigma_x)_s & (\tau_{yx})_s & (\tau_{zx})_s \\ (\tau_{xy})_s & (\sigma_y)_s & (\tau_{zy})_s \\ (\tau_{xz})_s & (\tau_{yz})_s & (\sigma_z)_s \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} l \\ m \\ n \end{Bmatrix}\quad (1-11)$$

或简写为

$$\{F_s\} = [\Sigma_s]\{L\}\quad (1-11')$$

式中

$$\{F_s\} = [F_{sx} \ F_{sy} \ F_{sz}]^T\quad (1-12)$$

$$[\Sigma_s] = \begin{bmatrix} (\sigma_x)_s & (\tau_{yx})_s & (\tau_{zx})_s \\ (\tau_{xy})_s & (\sigma_y)_s & (\tau_{zy})_s \\ (\tau_{xz})_s & (\tau_{yz})_s & (\sigma_z)_s \end{bmatrix}\quad (1-13)$$

$\{L\}$ 见式(1-9)

式(1-12)、式(1-13)分别为表面力列阵、应力矩阵的边界值。式(1-11)是弹性力学中的应力边界条件, 它表明应力分量的边界值与表面力分量之间的关系。

三、应变

物体在外力作用下要发生变形, 考察其内部某点 M 的变形情况, 需要研究通过该点任意微元线素(简称线元)长度的变化, 以及任意两线元夹角的变化。设通过 M 点某线元长度为 Δl , 变形后长度为 $\Delta l'$ (图1-7 a),

定义极限

$$\lim_{\Delta l \rightarrow 0} \frac{\Delta l' - \Delta l}{\Delta l} = \frac{dl' - dl}{dl} = \epsilon_l\quad (1-14)$$

为 M 点在 l 方向的线应变, 即线应变表示单位长度线元的伸长或缩短。

设 dl_r 和 dl_s 为过点 M 的两条相互垂直的线元, 我们定义变形后该二线元夹角的改变量(以弧度表示)为剪应变, 记为 γ_{rs} 或 $\gamma_{rs}\ominus$, 它由两部分组成: 一是 s 方向的线元向 r 方向

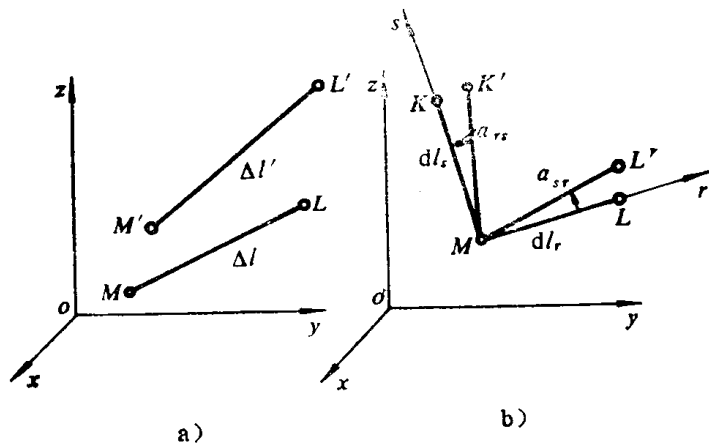


图1-7 物体内某点 M 的应变

a) 线应变 b) 剪应变

\ominus 此处 γ_{rs} 与 γ_{rs} 代表完全同一的量, 这与 $\tau_{rs} = \tau_{rs}$ 的含义不同, τ_{rs} 与 τ_{rs} 并不表示同一个剪应力, 只是由于剪应力互等定理它们是相等的。

的转角 α_{rs} ；一是 r 方向的线元向 s 方向的转角 α_{rs} ，如图1-7 b。于是有

$$\gamma_{sr} = \gamma_{rs} = \alpha_{rs} + \alpha_{sr} \quad (1-15)$$

规定线应变以伸长为正，缩短时为负；剪应变以直角减小时为正，增加时为负。

根据定义，应变是无量纲的量。

如过 M 点取三条与坐标轴一致的线 dx 、 dy 、 dz ，根据上述原则可以定义出三个线应变和三个两两相等的剪应变： ϵ_x 、 ϵ_y 、 ϵ_z 、 $\gamma_{xy} = \gamma_{yx}$ 、 $\gamma_{yz} = \gamma_{zy}$ 、 $\gamma_{zx} = \gamma_{xz}$ 。可以证明^[5]，如由相互垂直三个线元确定的九个应变分量为已知，则过该点其它任意方向线元的伸长(或缩短)以及任意两直线元夹角的改变均可求出。

四、位移

物体内部每一点在变形过程中都将要发生位置的变化，称为位移，它是一个矢量，用 S 表示， S 在三个坐标系 x 、 y 、 z 方向的分量分别用 u 、 v 、 w 表示(图1-8)，称为位移分量。一个微元体(体元)的位置变化由两部分组成，其一是周围介质位移使它产生的刚体位移；其二是体元自身变形使内部质点产生的位移。后者与应变有着确定的几何关系。

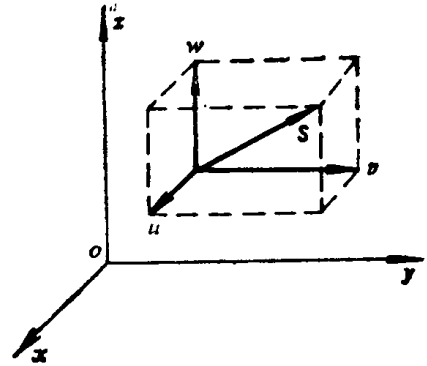


图1-8 位移及其分量

第三节 空间问题的基本方程及空间轴对称问题

本章第一节已提到，弹性力学的基本内容包括两部分，第一部分就是通过对弹性体的静力学、几何学和物理学三方面的分析，建立用应力、应变、位移表示的基本方程以及相应的定解条件；第二部分就是按定解条件求解具体的弹性力学问题。

一、空间问题的基本方程

在处理弹性力学问题时，选择什么形式的坐标系，虽不影响对本质问题的描述，但将直接关系到解决问题的方便与否。在水力机械的零部件中，有许多环形构件，如水轮机的顶盖、主轴、法兰及水泵的前、后盖板等，显然，采用圆柱坐标求解，要比采用直角坐标求解方便得多。因此，我们在圆柱坐标系中推导基本方程，并用它来解决工程中经常遇到的实际问题。用同样的方法，读者不难推导出直角坐标系中的基本方程。

在圆柱坐标系中，任意点 M 的位置可以用 r 、 θ 和 z 表示，一般 θ 角从 x 轴算起(图1-9)。

(一) 平衡微分方程

静力学方面就是研究在外力(包括边界面上的表面力和物体内部的体积力)作用下弹性体的平衡。此平衡状态有二个条件：其一是在物体内部任取一微元体都必须是平衡的，其二是在物体边界上任取一微元体也必须是平衡的。后者在本章第二节的公式(1-11)中已述及，即为在直角坐标中的边界条件；前者将导出平衡微分方程，以表示应力分量和体力分量之间的关系。

在圆柱坐标系中，从弹性体内切取一微元体，其中心角为 $d\theta$ ，内半径为 r ，外半径为 $r + dr$ ，高为 dz 。微元体六个面上作用着应力，其中， σ_r 、 σ_θ 和 σ_z 分别表示径向正应力，

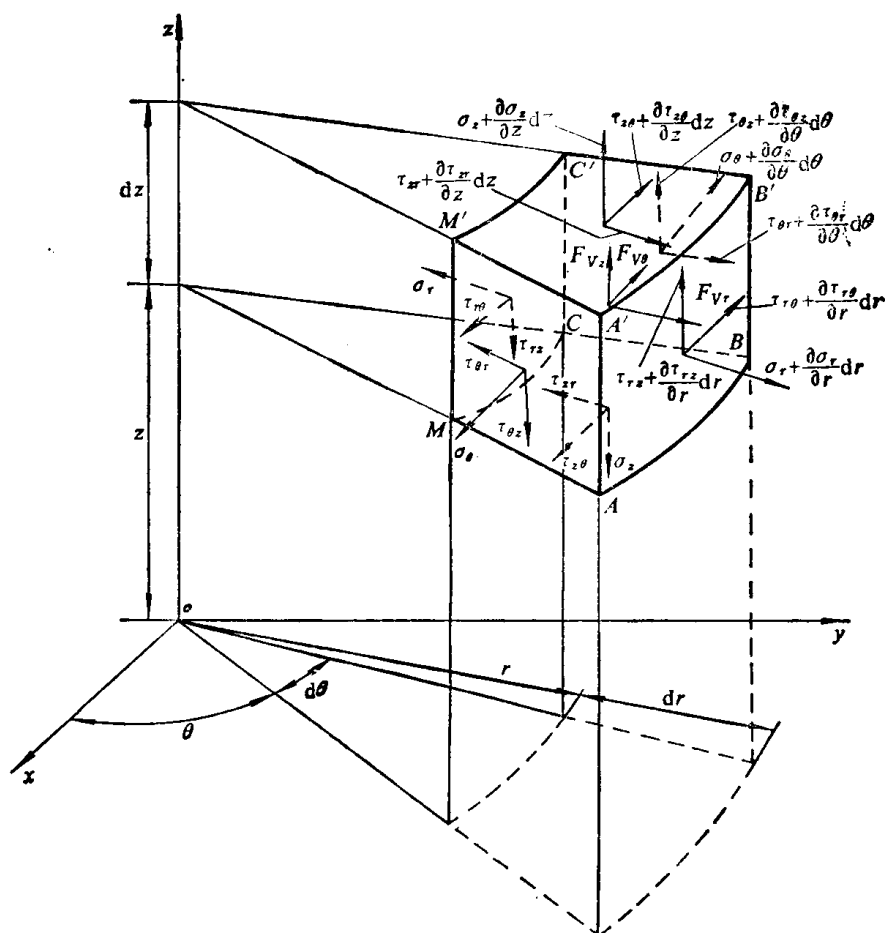


图1-9 圆柱坐标系中微元体表面上的应力

环向正应力和轴向正应力； $\tau_{r\theta}$ 、 τ_{rz} 、 $\tau_{\theta z}$ 、 $\tau_{\theta r}$ 和 τ_{zr} 、 $\tau_{z\theta}$ 分别表示法线方向为 r 、 θ 和 z 的面上作用的剪应力。圆柱坐标系中应力的正、负号的规定与直角坐标相同。显然，一般情况下，九个应力分量 σ_r 、 σ_θ 、 σ_z 、 $\tau_{r\theta}$ 、 τ_{rz} 、 $\tau_{\theta z}$ 、 $\tau_{\theta r}$ 、 τ_{zr} 及 $\tau_{z\theta}$ 都是坐标 r 、 θ 、 z 的函数。

对于所切取的微元体，可以认为每个微元面上作用的应力和体积力是均布的，但沿着坐标值增量的方向，应力也随之增加。现将应力和应力增量绘在图1-9上，同时在体心绘出体积力的分量 F_{vr} 、 $F_{v\theta}$ 和 F_{vz} ，这样，就可以分别在 r 、 θ 和 z 方向求得平衡微分方程。应该指出，根据微元体的平衡条件列出平衡方程式时，需要注意两点：其一是 MA 不平行于 CB ，因而 σ_θ 、 $\tau_{\theta r}$ 对于 r 方向的平衡有影响；其二是 MC 不等于 AB ，因而使 σ_r 在 r 方向、 $\tau_{r\theta}$ 在 θ 方向和 τ_{rz} 在 z 方向将产生附加的影响。

为了列出平衡方程，图1-10上绘出了微元体分别在 r 、 θ 、 z 方向上有投影的应力及体积力分量，于是，通过体心可列出三个方向的平衡条件。在 r 方向由图1-10 a 可得：

$$\begin{aligned} & \left(\sigma_r + \frac{\partial \sigma_r}{\partial r} dr \right) (r + dr) d\theta dz - \sigma_r r d\theta dz + \left(\tau_{zr} + \frac{\partial \tau_{zr}}{\partial z} dz \right) dr \left(r + \frac{dr}{2} \right) d\theta \\ & - \tau_{zr} dr \left(r + \frac{dr}{2} \right) d\theta + \left(\tau_{\theta r} + \frac{\partial \tau_{\theta r}}{\partial \theta} d\theta \right) dr dz \cos \frac{d\theta}{2} - \tau_{\theta r} dr dz \cos \frac{d\theta}{2} \\ & - \left(\sigma_\theta + \frac{\partial \sigma_\theta}{\partial \theta} d\theta \right) dr dz \sin \frac{d\theta}{2} - \sigma_\theta dr dz \sin \frac{d\theta}{2} + F_{vr} \left(r + \frac{dr}{2} \right) d\theta dr dz = 0 \end{aligned}$$

由于 $d\theta$ 是微量，故可取 $\sin(d\theta/2) \approx d\theta/2$ ， $\cos(d\theta/2) \approx 1$ 。这样，简化上式，除以 $r d\theta dr dz$ ，