普通高级中学新教材（试验修订本）同步立体训练

北京九所名校

金牌解题

高二数学 第二册（上）

本书主编 耿千昊 北京师范大学二附中 数学高级教师

北京大学附中
清华大学附中
北京师范大学附中
北京四中
北京师范大学实验中学
中国人民大学附中
教师编写组

团结出版社 · 知识出版社

普通高级中学新教材（试验修订本）同步立体训练

北京九所名校金牌解题

高 二 数 学

（第二册·上）

主　　编　向佐初

副主编　鲁　月

本书主编：

耿千昊：北京师范大学二附中数学高级教师

团结出版社

知识出版社

图书在版编目（CIP）数据

北京九所名校金牌解题.高二数学.第2册.上/向佐初主编;耿千昊分主编.－北京:团结出版社,知识出版社,2001.7

ISBN 7-80130-401-2

Ⅰ.北... Ⅱ.①向... ②耿... Ⅲ.数学课-高中-解题 Ⅳ.G634

中国版本图书馆CIP数据核字(2001)第033686号

本书撰稿者

耿千昊 陈鸿征 耿旭龙 陈家骏 黄 莉 陈晓路 王玉英
江 橙 黄美玉 朱晓莉 刘玉德 刘雪松 陶晓娟 李连玉
相 扬 杨晓姣 王小菊 朱丽华

出版:团结出版社 知识出版社(北京市东皇城根南街84号)
〔电话(010)8205.9220 6513.3603(发行部)6524.4792(编辑部)〕
http://www.tuanjiecbs.com E－mail:unitypub@263.net.

经销: 全国新华书店 **印刷**: 长沙鸿发印务实业有限公司

开本: 787×1092毫米 16开 **印张**: 7.125 **字数**: 175千字
版次: 2001年7月 第一版 **印次**: 2002年7月（长沙）第二次印刷

书号: ISBN 7-80130-401-2/G·90
定价: 8.00元(平)（如有印装差错，请与本社联系）

目　　录

教 材 解 析

测　试　卷

教 材 解 析

第六章　不　等　式

6.1　不等式的性质

(一)重点难点分析

1. 不等式的概念是符号概念：$a-b$ 是正数$\Leftrightarrow a$ 大于 b；$a-b$ 是负数$\Leftrightarrow a$ 小于 b；$a-b$ 为零$\Leftrightarrow a$ 等于 b. 差的性质符号是不等式概念的发源地.

2. 不等式性质的证明利用符号法则，如传递性的证明：

$a>b,b>c\Leftrightarrow a-b>0,b-c>0$(两正数)$\Rightarrow(a-b)+(b-c)>0$(两正数和仍为正数)……

3. 不等式的性质共 9 条，其中对称性等 4 条是双向的可逆定理，其余 5 条是单向的非可逆定理，今后易犯的错误是将非可逆定理当可逆定理使用.

4. 不等式的性质是证、解不等式的理论基础，今后所犯错误大多由对应的等性质所产生的定势思维所致. 如等式中有 $a=b,c\in R\Rightarrow ac=bc$，错误迁移到不等式中就是 $a>b,c\in R\Rightarrow ac>bc$.

(二)典型例题分析

例 1　比较 a^4-b^4 与 $4a^3(a-b)$ 的大小.

解：∵

$$\begin{aligned}&a^4-b^4-4a^3(a-b)\\&=(a-b)(a^3+a^2b+ab^2+b^3-4a^3)\\&=(a-b)[(a^2b-a^3)+(ab^2-a^3)+(b^3-a^3)]\\&=-(a-b)^2(3a^2+2ab+b^2)\\&=-(a-b)^2[2a^2+(a+b)^2]\leqslant 0,\end{aligned}$$

(当且仅当 $a=b$ 时取等号)

$\therefore a^4-b^4\leqslant 4a^3(a-b)$.

例 2　设实数 a,b,c 满足：

$$b+c=6-4a+3a^2, \qquad ①$$

$$c-b=4-4a+a^2, \qquad ②$$

试确定 a,b,c 间的大小关系.

解：$\because c-b=4-4a+a^2=(a-2)^2\geqslant 0$，$\therefore c\geqslant b$.

$$\text{又}\because b-a=[(b+c)-(c-b)]\cdot\frac{1}{2}-a$$

$$=1+a^2-a=\left(a-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}>0,$$

$\therefore b>a$.

$\therefore c\geqslant b>a$.

例 3　已知 $f(x)=ax^2-c$，且 $-4\leqslant f(1)\leqslant -1$，$-1\leqslant f(2)\leqslant 5$，求 $f(3)$ 的取值范围.

解：由$\begin{cases}a-c=f(1)\\4a-c=f(2)\end{cases}$可解得

$$\begin{cases}a=\frac{1}{3}[f(2)-f(1)]\\-c=\frac{4}{3}f(1)-\frac{1}{3}f(2)\end{cases}$$

$\therefore f(3)=9a-c=\frac{8}{3}f(2)-\frac{5}{3}f(1)$,

$\because -1\leqslant f(2)\leqslant 5$,则$-\frac{8}{3}\leqslant\frac{8}{3}f(2)\leqslant\frac{40}{3}$,又$-4\leqslant f(1)\leqslant -1$

$\therefore(-\frac{5}{3})(-1)\leqslant -\frac{5}{3}f(1)\leqslant(-\frac{5}{3})\cdot(-4)$

(不等式的可乘性)

$\therefore -\frac{8}{3}+\frac{5}{3}\leqslant\frac{8}{3}f(2)-\frac{5}{3}f(1)\leqslant\frac{40}{3}+\frac{20}{3}$

(不等式的可加性)

$\therefore -1\leqslant f(3)\leqslant 20$.

说明　如果由$-4\leqslant f(1)\leqslant -1$,可得

$$-4\leqslant a-c\leqslant -1. \qquad ①$$

由$-1\leqslant f(2)\leqslant 5$,得

$$-1\leqslant 4a-c\leqslant 5. \qquad ②$$

从式①、②中消去c,可得$0\leqslant a\leqslant 3$及$-7\leqslant -c\leqslant -1$,于是得到$-7\leqslant f(3)\leqslant 26$.比较两个结果,可以发现$[-1,20]\subset[-7,26]$.后一种结果不准确,其原因是由式①、②得到的$a$和$c$的范围,其等号不能达到.

6.2　算术平均数与几何平均数

(一)重点难点分析

1. $a^2+b\geqslant 2ab$与$a^3+b^3+c^3\geqslant 3abc$的条件有区别,前者是$a,b\in R$,后者是$a,b,c\in R^+$.

2. 均值不等式:$a+b\geqslant 2\sqrt{ab}$和$\frac{a+b+c}{3}\geqslant\sqrt[3]{abc}$可叙述为两个或三个正数的算术平均数不小于它们的几何平均数.

3. 均值不等式基本变形:$a+b\geqslant 2\sqrt{ab}$,$ab\leqslant\left(\frac{a+b}{2}\right)^2$;$a+b+c\geqslant 3\sqrt[3]{abc}$,$abc\leqslant\left(\frac{a+b+c}{3}\right)^3$.当$ab=P$(常数),当且仅当$a=b=\sqrt{P}$时,$(a+b)_{\min}=2\cdot\sqrt{P}$;当$a+b=S$(常数),当且仅当$a=b=\frac{S}{2}$时,$(ab)_{\max}=\frac{S^2}{4}$.应用均值不等式求最值要注意三个条件:“正”、“定”、“等”,即各数均为正实数,和或积为定值,取得最值时等号能成立,三者缺一不可,难点在于把解析式恒等变形为满足上述三个条件的形式.

(二)典型例题分析

例1　已知$a>0,b>0$,且$a+b=1$,求$(a+\frac{1}{a})^2+(b+\frac{1}{b})^2$的最小值.

解析 $(a+\frac{1}{a})^2+(b+\frac{1}{b})^2 \geqslant \frac{(a+\frac{1}{a}+b+\frac{1}{b})^2}{2}=\frac{1}{2}(1+\frac{1}{ab})^2 \geqslant \frac{1}{2}\left[1+\frac{1}{(\frac{a+b}{2})^2}\right]^2$

$=\frac{1}{2}\left[1+\frac{1}{(\frac{1}{2})^2}\right]^2=\frac{25}{2}$(当且仅当 $a=b=\frac{1}{2}$时等号成立)

即$(a+\frac{1}{a})^2+(b+\frac{1}{b})^2$的最小值为$\frac{25}{2}$.

分析 第一次利用不等式 $a^2+b^2 \geqslant \frac{(a+b)^2}{2}$缩小,第二次利用不等式 $ab \leqslant (\frac{a+b}{2})^2$ 放大,但在分母位置,整体仍然缩小,遇到需经几次放缩时,等号成立条件要保持一致.

例 2 已知 $n>2$,求证:$\log_{n-1}n>\log_n(n+1)$

证明 $\because n>2, \therefore n-1>1, \therefore \log_n(n-1)>0, \log_{n-1}n>0, \log_n(n+1)>0, \therefore \log_n(n-1)\cdot\log_n(n+1)<\left[\frac{\log_n(n-1)+\log_n(n+1)}{2}\right]^2=\left[\frac{\log_n(n^2-1)}{2}\right]^2<\left[\frac{\log_n n^2}{2}\right]^2=1, \therefore \log_n(n+1)<\log_{n-1}n$.

即 $\log_{n-1}n>\log_n(n+1)$

例 3 已知 $a,b,x,y \in R^+$,且$\frac{a}{x}+\frac{b}{y}=1$,则 $x+y$ 的最小值为

A. $\frac{a+b}{2}$ B. $\sqrt{ab}$ C. $\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}$ D. $a+b+2\sqrt{ab}$

解析 $x+y=(x+y)\left(\frac{a}{x}+\frac{b}{y}\right) \geqslant (\sqrt{a}+\sqrt{b})^2$,选 D.

利用条件配成柯西不等式,等号成立的条件是$\frac{x}{y}=\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$.

例 4 已知 a,b 为正数,且 $a^2+\frac{b^2}{2}=1$,求 $a\sqrt{1+b^2}$的最大值.

解析 $\because a^2+\frac{b^2}{2}=1 \Rightarrow 2a^2+b^2=2$(定值)

$\therefore a\sqrt{1+b^2}=\sqrt{a^2(1+b^2)}=\sqrt{\frac{1}{2}[2a^2(1+b^2)]} \leqslant \sqrt{\frac{1}{2}\left(\frac{2a^2+b^2+1}{2}\right)^2}=\sqrt{\frac{1}{2}(\frac{2+1}{2})^2}=\frac{3}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}$
$=\frac{3\sqrt{2}}{4}$.

$\therefore a\sqrt{1+b^2}$的最大值为$\frac{3\sqrt{2}}{4}$,当 $a=\frac{\sqrt{3}}{2}, b=\frac{\sqrt{2}}{2}$时取得最大值.

分析 将 $a\sqrt{1+b^2}$配成$\sqrt{\frac{1}{2}[2a^2(1+b^2)]}$是关键,$2a^2+b^2=2$ 看成两正数和一定.转化为求 $2a^2(1+b^2)$的最大值,此式已符合两个条件.等号成立的条件是

$2a^2=1+b^2$,与 $2a^2+b^2=2$,联立求得 $a=\frac{\sqrt{3}}{2}, b=\frac{\sqrt{2}}{2}$($a,b$ 为正数值).

6.3 不等式的证明

(一)重点难点分析

不等式证明的基本方法:

①比较法

比较法分为“作差”比较与“作商”比较.“作差”比较是不等式证明的最重要、最根本的方法,从内容上看“作差”比较就是“回到定义”,而从方法上看则是化归、很多重要的、复杂的不等式都可以直接用“作差”比较得到证明.“作商”比较是“作差”比较的某种结构上的对偶,在某些特定情形使用非常方便.

“作差”比较:

$$a>b\Leftrightarrow a-b>0$$

$$a=b\Leftrightarrow a-b=0$$

$$a<b\Leftrightarrow a-b<0$$

“作商”比较:

$$a、b>0,a>b\Leftrightarrow\frac{a}{b}>1$$

$$a、b>0,a=b\Leftrightarrow\frac{a}{b}=1$$

$$a、b>0,a<b\Leftrightarrow\frac{a}{b}<1$$

②综合法

任何问题都是由已知和未知构成,解决问题就是在已知和未知之间寻求联系,一旦得到了这种联系,问题即宣告解决.综合法就是指从已知出发,不断推出一系列结论,最终达到未知的方法.

③分析法

与综合法相对应,通过对未知进行分析,得到一系列未知的充分条件,直到达到已知的解决问题的方法称为分析法.

综合法与分析法可以单独使用,但对较复杂的问题,往往需要将两种方法综合起来使用.在使用分析法时,要注意叙述方式.

(二)典型例题分析

例1 求证 $a^2+b^2+1\geqslant ab+a+b$.

思路1:作差→研究差的正负.

解法1:设 $y=a^2+b^2+1-ab-a-b$.

将 y 看作 a 的二次函数 $f(a)=a^2-a(b+1)+b^2-b+1$,它的判别式 $\triangle=(b+1)^2-4(b^2-b+1)=-3(b-1)^2$.由于 $\triangle\leqslant 0$,$\therefore f(a)\geqslant 0$ 恒成立.

$\therefore\quad a^2+b^2+1\geqslant ab+a+b$.

思路2:用综合法.

解法2:由 $ab+a+b=ab+a\cdot 1+b\cdot 1\leqslant\dfrac{a^2+b^2}{2}+\dfrac{a^2+1}{2}+\dfrac{b^2+1}{2}=a^2+b^2+1$,知命题获证.

说明　研究差的正负,不限于“配方”法.本例研究二次函数的正负,往往能克服配方中的困难.事实上,

$$a^2+b^2+1-ab-a-b$$

$$=\frac{1}{2}[(a-b)^2+(a-1)^2+(b-1)^2]$$

不难看出,配方的结果凑起来不方便.

解法2:要求补出两个“1”,其实是我们熟悉的不等式的一个特殊形式:

$a^2+b^2+c^2\geqslant ab+bc+ca$,其中令 $c=1$.

例 2 已知 $a>b>0$,求证 $a+\frac{1}{b(a-b)}\geqslant 3$.

思路:将左边变形,以便使用基本不等式.

证明 $\because a>b>0, \therefore a-b>0$,

$$a+\frac{1}{b(a-b)}=(a-b)+b+\frac{1}{b(a-b)}\geqslant 3.$$

说明 基本不等式的使用,通常需要"变形",即创造条件便用公式.这是利用基本不等式证明不等式的一个难点.像本例中,$-b+b$,实际上加了一个"0".也有时是拆开一项,也有时乘以一个 1.

例 3 已知 $a>b, b>0, c>0$ 且 $a+b+c=1$.求证$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\geqslant 9$.

思路:将 $1=a+b+c$ 代入

解法 1:$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=(a+b+c)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)$

$\geqslant 3\sqrt[3]{abc}\cdot 3\sqrt[3]{\frac{1}{abc}}=9$.

解法 2:$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=\frac{1}{a}(a+b+c)+\frac{1}{b}(a+b+c)+\frac{1}{c}(a+b+c)=3+\frac{b}{a}+\frac{c}{a}+\frac{a}{b}+\frac{c}{b}+\frac{a}{c}+\frac{b}{c}=3+\left(\frac{b}{a}+\frac{a}{b}\right)+\left(\frac{c}{a}+\frac{a}{c}\right)+\left(\frac{c}{b}+\frac{b}{c}\right)\geqslant 3+2+2+2=9$.

例 4 设 $x>0, y>0$,证明$(x^2+y^2)^{\frac{1}{2}}>(x^3+y^3)^{\frac{1}{3}}$.

思路 1:分析法.

证明 1:要证明$(x^2+y^2)^{\frac{1}{2}}>(x^3+y^3)^{\frac{1}{3}}$,依据 $x>0, y>0$ 的条件,只需证$(x^2+y^2)^3>(x^3+y^3)^2$.展开,即 $x^6+y^6+3x^4y^2+3x^2y^4>x^6+y^6+2x^3y^3$,

即要证明 $3x^2+3y^2>2xy$,而 $3x^2+3y^2>x^2+y^2\geqslant 2xy$ 显然成立,$\therefore$原不等式成立.

思路 2:变形后用比较法.

证法 2:设
$$\begin{aligned} M&=[(x^2+y^2)^{\frac{1}{2}}]^6-[(x^3+y^3)^{\frac{1}{3}}]^6\\ &=(x^2+y^2)^3-(x^3+y^3)^2\\ &=3x^4y^2+3x^2y^4-2x^3y^3\\ &=x^2y^2[3x^2+3y^2-2xy]\\ &=x^2y^2[2(x^2+y^2)+(x-y)^2].\end{aligned}$$

又$\because x>0, y>0, \therefore x^2+y^2>0, x^2y^2>0$,

$\therefore M>0$,

$\therefore[(x^2+y^2)^{\frac{1}{2}}]^6>[(x^3+y^3)^{\frac{1}{3}}]^6$.

由性质定理 5 知,$(x^2+y^2)^{\frac{1}{2}}>(x^3+y^3)^{\frac{1}{3}}$.

例 5 已知 $0<a<1, 0<b<1, 0<c<1$;求证$(1-a)b,(1-b)c,(1-c)a$ 三数不可能都大于$\frac{1}{4}$.

证法 1:$\because 0<a<1, 0<b<1, 0<c<1$,

$\therefore(1-a)b\cdot(1-b)c\cdot(1-c)a$

$a(1-a)\cdot b(1-b)\cdot c(1-c)$

$$\leqslant\left[\frac{a+(1-a)}{2}\right]^2\cdot\left[\frac{b(1-b)}{2}\right]^2\cdot\left[\frac{c(1-c)}{2}\right]^2$$

$$=\left(\frac{1}{4}\right)^3. \qquad ①$$

假设三个数都大于$\frac{1}{4}$,则它们的积大于$\left(\frac{1}{4}\right)^3$,与①矛盾.

∴命题获证.

证法 2 $\because 0<a<1, 0<b<1, 0<c<1$,

$$\sqrt{(1-a)b}+\sqrt{(1-b)c}+\sqrt{(1-c)a}$$

$$\leqslant\frac{1-a+b}{2}+\frac{1-b+c}{2}+\frac{1-c+a}{2}=\frac{3}{2}. \qquad ①$$

假设三个数都大于$\frac{1}{4}$,则$\sqrt{(1-a)b}$,$\sqrt{(1-b)c}$,$\sqrt{(1-c)a}$就都大于$\frac{1}{2}$,其和就大于$\frac{3}{2}$.与①矛盾.

∴命题获证.

6.4 不等式的解法举例

(一)重点难点分析

1.一元一次不等式的解法

形如 $ax+b>0$(“$>$”也可以是“$<$”、“$\geqslant$”、“$\leqslant$”,以下不再说明)其中 $a\neq0$ 的不等式称为一元一次不等式.利用不等式的基本性质,很容易解得:

(1)当 $a>0$ 时,以上一元一次不等式的解集为$\{x\mid x>-\frac{b}{a}\}$;

(2)当 $a<0$ 时,不等式的解集为$\{x\mid x<-\frac{b}{a}\}$.

2.一元二次不等式的解法

形如 $ax^2+bx+c>0(a\neq0)$的不等式称为一元二次不等式.由一元二次函数 $y=ax^2+bx+c$ 的性质,不难得到以上一元二次不等式的解:

(1)$a>0$

若$\triangle=b^2-4ac>0$,设 $ax^2+bx+c=0$ 的两根分别为 $x_1<x_2$,则不等式的解集为:$\{x\mid x<x_1$ 或 $x>x_2\}$;若$\triangle=0$,则不等式的解集为$\{x\mid x\neq-\frac{b}{2a}\}$;若$\triangle<0$,则不等式的解集为 R.

(2)$a<0$

若$\triangle=b^2-4ac>0$,设 $ax^2+bx+c=0$ 的两根分别为 $x_1<x_2$,则不等式的解集为:$\{x\mid x_1<x<x_2\}$;若$\triangle\leqslant0$,则不等式的解集为$\varnothing$(空集).

其它情形的一元二次不等式的解法类似于此.

3.指数不等式的解法

指数中含有未知数的不等式称为指数不等式.在中学阶段,指数不等式通常有两种,一种是可以整理成 $a^{f(x)}>a^{g(x)}(a>0,a\neq1)$的指数不等式,另一种是可以通过换元转化为代数不等式(即只含未知数的整数次幂,通常是一元二次不等式)的指数不等式.关于这两种指数不等式的解法见典型例题分析.

4.对数不等式的解法

对数的真数中含有未知数的不等式称为对数不等式.对数不等式的类型和解法与指数不等式类似,具体情况见典型例题分析.

5.特殊的高次不等式的解法

形如 $a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0>0(a_n\neq0)$ 的不等式称为一元 n 次不等式,$n\geqslant3$ 时,统称为高次不等式.

如果上述一元 n 次不等式的左端能够分解为 $a_n(x-x_1)(x_1-x_2)\cdots(x-x_n)$ 的形式(其中诸 x_i 可以相等也可以不相等),则我们可以通过分析函数 $f(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0$ 在某些区间上的取值情况来得到原不等式的解集.详细讨论见典型例题分析.

6.分式不等式的解法

形如 $\dfrac{f(x)}{g(x)}>0$ 的不等式称为分式不等式.一般中学所能见到的分式不等式都可以利用类似于上述一元 n 次不等式的解法得到解决(见典型例题分析).

7.无理不等式的解法

含有关于 x 的无理式的不等式称为无理不等式.解无理不等式的关键是将无理不等式转化为有理不等式,通常使用乘方等方法,要视具体问题分析(见典型例题分析).

8.含绝对值不等式的解法

解含绝对值的不等式关键在于对绝对值的讨论,一般可以通过平方或分情况讨论等方法解决,具体问题见典型例题分析.

(二)典型例题分析

例1 解关于 x 的不等式 $(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)\geqslant0$.

分析与解答:

设 $f(x)=(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)$,则 $f(x)$ 的图象与 x 轴交于 $=1、2、3、4$ 点,再由 $f(x)$ 的连续性,$f(x)$ 在 $(-\infty,1]、(1,2]、(2,3]、(3,4]、(4,+\infty)$ 等区间上的符号是确定的,于是,只要确定了 $f(x)$ 在这些区间上的符号,即可解得原不等式.

$f(x)$ 在上述诸区间上的符号由 $x-1、x-2、x-3、x-4$ 的符号很容易确定,我们用 $f(x)$ 的草图来说明,因为只涉及到 $f(x)$ 的符号,在这里只需要有 x 轴就可以了.图 6-1 就是 $f(x)$ 的草图.

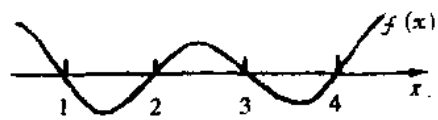

图 6-1

由图 6-1 易得原不等式的解集为

$$(-\infty,1]\cup[2,3]\cup[4,+\infty).$$

例2 解关于 x 的不等式

$(x-1)^2(x-2)^3(x-3)(x-4)>0$.

分析与解答:

设 $f(x)=(x-1)^2(x-2)^3(x-3)(x-4)$,则图 6-2 就是 $f(x)$ 的草图.

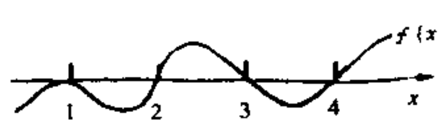

图 6-2

所以,原不等式的解集为 $(2,3)\cup(4,+\infty)$.

例3 解不等式 $\dfrac{x^2-9x+11}{x^2-2x+1}\geqslant7$.

解:先化为 $\dfrac{-6x^2+5x+4}{x^2-2x+1}\geqslant0$,

将分子、分母分解因式：$\dfrac{(2x+1)(3x-4)}{(x-1)^2}\leqslant 0$.

画出数轴如图 6－3 所示，用 $x=2$ 代入不合要求，

$\therefore$不等式的解为$\left[-\dfrac{1}{2},\dfrac{4}{3}\right]$且 $x\neq 1$，即$\left[-\dfrac{1}{2},1\right)\cup\left(1,\dfrac{4}{3}\right]$.

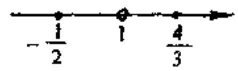

图 6－3

例 4　若 $ax^2+abx+b>0$ 的解集为(2,4)，求不等式 $ax^2-3bx>0$ 的解集.

思路：利用二次不等式的解集与方程的联系，得出 a 与 b 的关系.

解：由已知可得：$a<0$，且方程 $ax^2+abx+b=0$ 的二根为 2 和 4.

$\therefore\begin{cases}\dfrac{b}{a}=4\cdot 2\\ -b=2+4\end{cases}$　　$\therefore\begin{cases}a=-\dfrac{3}{4}\\ b=-6\end{cases}$

$\therefore ax^2-3bx>0$，即$-\dfrac{3}{4}x^2+18x>0$，

即 $x^2-24x<0$，

$\therefore$所求解集为(0,24).

6.5　含有绝对值的不等式

(一)重点难点分析

1. 基本性质

(1)$|a|\geqslant 0$　$a\neq 0$ 时 $|a|>0$　　(2)$|a|\geqslant\pm a$

(3)$-|a|\leqslant a\leqslant|a|$　　(4)$|a|^2=a^2$

2. 两个公式

(1)$|x|<a\Leftrightarrow x^2<a^2\Leftrightarrow -a<x<a$　$(a>0)$

(2)$|x|>a\Leftrightarrow x^2>a^2\Leftrightarrow x>a$ 或 $x<-a$　$(a>0)$

3. 运算定理

(1)$|a\cdot b|=|a|\cdot|b|$　　(2)$\left|\dfrac{a}{b}\right|=\dfrac{|a|}{|b|}$　$(b\neq 0)$

(3)$||a|-|b||\leqslant|a+b|\leqslant|a|+|b|$

(4)$||a|-|b||\leqslant|a-b|\leqslant|a|+|b|$

(5)$|a_1+a_2+\cdots+a_n|\leqslant|a_1|+|a_2|+\cdots+|a_n|$

(二)典型例题分析

例 1　解不等式$|x^2-5x+10|>x^2-8$.

思路：类似于解无理不等式进行讨论.

解：原不等式等价于两个不等式(组)的并：

$x^2<8$　或　$\begin{cases}x^2\geqslant 8\\ (x^2-5x+10)^2>(x^2-8)^2\end{cases}$

即 $-2\sqrt{2}<x<2\sqrt{2}$

或　$\begin{cases}x^2\geqslant 8\\ (2x^2-5x+2)(-5x+18)>0\end{cases}$

即$\begin{cases}x^2>8\\ (2x-1)(x-2)(5x-18)<0\end{cases}$

即$\begin{cases} x\in(-\infty,-2\sqrt{2}]\cup[2\sqrt{2},+\infty) \\ x<\dfrac{1}{2}\text{或 }2<x<\dfrac{18}{5} \end{cases}$

二者的并集为 $x\in\left(-\infty,\dfrac{18}{5}\right)$.

例 2 求证$\dfrac{|a^2-b^2|}{|a|}\geqslant|a|-|b|$.

思路:使用分析法.

证明:当 $b=0$ 时,结论显然成立。当 $b\neq0$ 时. $\because|a|>0$, $\therefore$ 只需证明 $|a^2-b^2|\geqslant|a|^2-|a||b|$, 两边同除 $|b|^2$,即只需证明

$$\frac{|a^2-b^2|}{|b|^2}\geqslant\frac{|a|^2}{|b|^2}-\frac{|a|}{|b|},\text{即}$$

$$\left|\left(\frac{a}{b}\right)^2-1\right|\geqslant\left|\left(\frac{a}{b}\right)^2\right|-\left|\frac{a}{b}\right|.$$

当 $\left|\dfrac{a}{b}\right|\geqslant1$ 时, $\left|\left(\dfrac{a}{b}\right)^2-1\right|=\left|\left(\dfrac{a}{b}\right)^2\right|-1\geqslant\left|\left(\dfrac{a}{b}\right)^2\right|-\left|\dfrac{a}{b}\right|$;当 $\left|\dfrac{a}{b}\right|<1$ 时, $|a|-|b|<0$,原不等式显然成立.

$\therefore$原不等式成立.

例 3 求证 $\dfrac{|a+b|}{1+|a+b|}\leqslant\dfrac{|a|}{1+|a|}+\dfrac{|b|}{1+|b|}$.

证法 1:(直接用定理 1)在 $|a+b|=0$ 时,显然成立;在 $|a+b|\neq0$ 时,左边 $=\dfrac{1}{\dfrac{1}{|a+b|}+1}\leqslant$

$$\frac{1}{\dfrac{1}{|a|+|b|}+1}$$

$$=\frac{|a|+|b|}{1+|a|+|b|}=\frac{|a|}{1+|a|+|b|}+\frac{|b|}{1+|a|+|b|}$$

$$\leqslant\frac{|a|}{1+|a|}+\frac{|b|}{1+|b|}.$$

证法 2:(利用函数的单调性) 研究函数 $y=\dfrac{x}{1+x}$在 $x>0$ 上的单调性,设 $0<x_1<x_2$,

$$\because\frac{x_1}{1+x_1}-\frac{x_2}{1+x_2}=\frac{x_1-x_2}{(1+x_1)(1+x_2)}<0,$$

$\therefore y=\dfrac{x}{1+x}$在 $x>0$ 上是递增的.

又$\because|a+b|\leqslant|a|+|b|$,将$|a+b|$, $|a|+|b|$分别看作 x_1 和 x_2,则有

$\dfrac{|a+b|}{1+|a+b|}\leqslant\dfrac{|a|+|b|}{1+|a|+|b|}$.(下略)

证法 3(分析法) 原不等式等价于

$\dfrac{|a+b|}{1+|a+b|}\leqslant\dfrac{|a|+|b|+2|a||b|}{(1+|a|)(1+|b|)}$,只需证

$|a+b|(1+|a|)(1+|b|)\leqslant(1+|a+b|)(|a|+|b|+2|a||b|)$,

即证 $|a+b|(1+|a|+|b|+|ab|)\leqslant|a|+|b|+2|ab|+|a+b||ab|+|a+b|(|a|+|b|+|ab|)$,

即证 $|a+b|\leqslant|a|+|b|+2|ab|+|a+b||ab|$. ①

又$\because 2|ab|+|a+b||ab|\geqslant 0$,

$\therefore$①显然成立,$\therefore$原不等式获证.

还可以用分析法证得$\frac{|a+b|}{1+|a+b|}\leqslant\frac{|a|+|b|}{1+|a|+|b|}$,然后再用放缩法证得结果.

例 4 解关于 x 的不等式:

$|\log_a x|<|\log_a(ax^2)|-2\quad(0<a<1)$

解析 原不等式$\Leftrightarrow|\log_a x|+2<|1+2\log_a x|$

令 $\log_a x=t$,则有$|t|+2<|1+2t|$,两边平方整理得 $3t^2+4t-4|t|-3>0$,显然 $t\neq 0$

$\therefore\begin{cases}t>0\\3t^2-3>0\end{cases}$ 或$\begin{cases}t<0\\3t^2+8t-3>0\end{cases}$解得 $t>1$ 或 $t<-3$, $\because 0<a<1$

由 $\log_a x>1$ 得 $0<x<a$,由 $\log_a x<-3$ 得 $x>a^{-3}$

$\therefore 0<a<1$,原不等式的解集为$\{x|0<x<a$ 或$x>a^{-3}\}$

第七章 直线和圆的方程

7.1 直线的倾斜角和斜率

(一)重点难点分析

1. 直线的倾斜角

一条直线向上的方向与 x 轴的正方向所成的最小正角叫做这条直线的倾斜角.这里“直线向上的方向”、“x 轴的正方向”、“最小正角”是构成直线倾斜角概念的三要素.

规定当直线和 x 轴平行时,其倾斜角为 0.所以,直线的倾斜角 α 的范围是

$0°\leqslant\alpha<180°$(或 $0\leqslant\alpha<\pi$).

2. 直线的斜率

(1)直线的倾斜角和斜率都是直线方向的数量表示,它们反映了直线与 x 轴正向的倾斜程度,从而决定了该直线具有某种特性.

(2)每一条直线都存在着惟一的倾斜角,但并不是每一条直线都存在斜率(直线垂直于 x 轴时,其斜率不存在).这就决定了我们今后在解决直线有关问题时,都应考虑到斜率的存在与不存在两种情况,否则会产生漏解.这是常被忽视的问题,必须重视.

(3)设直线 l 的倾斜角为$\alpha(\alpha\neq 90°)$, $P_1(x_1,y_1)$、$P_2(x_2,y_2)(x_1\neq x_2)$是直线 l 上两点,直线 l 的斜率为k,则有斜率公式

$k=\tan\alpha=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$.

当 $\alpha=90°$或$x_1=x_2$时,直线 l 垂直于x 轴,它的斜率不存在.

(二)典型例题分析

例 1 求直线 $x\sin\alpha+y+2=0$ 的倾角范围.

解析 直线的斜率 $k=-\sin\alpha$

当 $\alpha\in R$ 时, $-1\leqslant-\sin\alpha\leqslant 1$,即$|k|\leqslant 1$

$\therefore$直线倾角 $\theta\in[0,\frac{\pi}{4}]\cup[\frac{3\pi}{4},\pi)$

分析　由直线方程求直线的倾角，先求斜率，由斜率确定倾角，由斜率范围确定倾角范围.

例2　已知直线$(a-2)x+(a+1)y+a=0$,

(Ⅰ)当 a 为何值时，直线的倾角为0;

(Ⅱ)当 a 为何值时，直线的倾角为$\frac{\pi}{2}$;

(Ⅲ)若直线不经过第一象限，求 a 的取值范围.

解析　(Ⅰ)直线平行 x 轴或与 x 轴重合时，其倾角为0

$\therefore a=2$,此时，直线方程为 $y=-\frac{2}{3}$

(Ⅱ)直线平行 y 轴或与 y 轴重合时，其倾角为$\frac{\pi}{2}$

$\therefore a=-1$,此时，直线方程为 $x=-\frac{1}{3}$

(Ⅲ)由(Ⅰ)和(Ⅱ)知，直线过定点$(-\frac{1}{3},-\frac{2}{3})$

该点位于第三象限，要使直线不经过第一象限，其斜率 $k<0$

$\therefore (a-2)(a+1)>0$,解得 $a<-1$ 或 $a>2$ 为所求

分析　直线方程中系数含有同一个参数，且斜率是由这个参数表达的，该直线通过一个定点，定点的求法是将参数改用主元. 如本例直线方程可变换为$(x+y+1)a+(y-2x)=0$,令 $x+y+1=0$, $y-2x=0$ 联立解方程组得 $x=-\frac{1}{3}$, $y=-\frac{2}{3}$, $(-\frac{1}{3},-\frac{2}{3})$即为定点，直线过定点对了解直线的特征和性质很有帮助.

例3　已知两点 $A(-1,-5)$, $B(3,-2)$,直线 l 的倾斜角是直线 AB 倾斜角的一半，求直线 l 的斜率.

解法1:设直线 l 的倾斜角为α,则直线 AB 的倾斜角为 2α.

$\because\quad \tan2\alpha=k_{AB}=\frac{-2-(-5)}{3-(-1)}=\frac{3}{4}$,

$\therefore\quad \frac{3}{4}=\frac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha}$,

化简得　$3\tan^2\alpha+8\tan\alpha-3=0$.

解得:$\tan\alpha=\frac{1}{3}$或 $\tan\alpha=-3$.

$\because \tan2\alpha=\frac{3}{4}>0$,

$\therefore 0^\circ<2\alpha<90^\circ, 0<\alpha<45^\circ$,

$\therefore\quad \tan\alpha>0$,故直线 l 的斜率是$\frac{1}{3}$.

解法2:设直线 AB 的倾斜角为α,则直线 l 的倾斜角为$\frac{\alpha}{2}$,下面只需用半角公式求 $\tan\frac{\alpha}{2}$.

$\because\quad \tan\alpha=k_{AB}=\frac{3}{4}>0$, $\therefore 0^\circ<\alpha<90^\circ$.

$\therefore \sin\alpha=\frac{3}{5}$, $\cos\alpha=\frac{4}{5}$.

$\therefore \tan\frac{\alpha}{2}=\frac{1-\cos\alpha}{\sin\alpha}=\frac{1-\frac{4}{5}}{\frac{3}{5}}=\frac{1}{3}$.

故直线 l 的斜率为$\frac{1}{3}$.

7.2　直线的方程

(一)重点难点分析

1.直线方程的五种形式在使用上各有方便之处,也都有不足或容易失误的地方,要掌握它们的特征,取其长,补其短.

2.点斜式和斜截式只能表示有斜率的直线.点斜式 $y-y_0=k(x-x_0)$代表过定点的直线系,但不代表直线 $x=x_0$(斜率不存在),因此应用点斜式求直线方程时,不要忘了这条直线.点斜式是直线方程的基本形式,是推导其他形式的基础,应重点掌握.斜截式是点斜式的特例,它的截距是指在 y 轴上的截距.

3.两点式和截距式不能代表平行或重合于坐标轴的直线,截距式还不能代表过原点的直线.要注意截距是坐标不是距离,截距可以为零,但截距式的截距是非零实数,截距式是两点式的特例.

4.一般式适用任何位置的直线,x,y 的系数A、B 不全为零.

(二)典型例题分析

例1　根据下列条件,求直线方程:

(1)倾斜角为 120°,经过点$(-4,6)$　　(2)斜率为 $-\sqrt{2}$,经过点$(0,-5)$;

(3)斜率为 10,在 x 轴上截距为 -5;　　(4)经过点 $A(4,1)$,$B(4,-3)$.

解:(1)直线斜率 $k=\mathrm{tg}120°=-\sqrt{3}$

得所求直线的点斜式方程是:$y-6=-\sqrt{3}(x+4)$

整理得:$\sqrt{3}x+y+4\sqrt{3}-6=0$

(2)由直线方程的点斜式得:$y+5=-\sqrt{2}x$　　即:$\sqrt{2}x+y+5=0$

本题可由斜截式求解,直线过点$(0,-5)$即直线在 y 轴上截距是 -5,则得:

$y=-\sqrt{2}x-5$

(3)直线在 x 轴上截距为 -5,即知直线过点$(-5,0)$,则由直线方程的点斜式得:

$y=10(x+5)$　　整理可得:$10x-y+50=0$

这里再提供一个在以后学习中常用的方法,被称为待定系数法,可先由斜截式方程写出所求直线方程是 $y=10x+b$,此处常数 b 是待定系数,而知直线过点$(-5,0)$,这个坐标应适合上述方程,代入上式:

$0=10(-5)+b$　　$\therefore b=50$

再代回上述方程,即为所求直线方程:$10x-y+50=0$

(4)可以看到直线过两点,其横坐标相等,直线垂直于 x 轴,方程为 $x=4$

例2　已知一直线过点$(-2,2)$,且与两坐标轴构成的三角形面积为 1,求此直线方程.

解:设所求直线斜率为 k,则其方程的点斜式是:$y-2=k(x+2)$

直线在 x 轴上的截距,即使上式 $y=0$,得 $x=-\frac{2k+2}{k}$;直线在 y 轴上的截距,即使上式 $x=0$ 得:$y=2k+2$.

那么,直线与两坐标轴成三角形的面积是

$\frac{1}{2}\left|-\frac{2k+2}{k}\cdot(2k+2)\right|=1$　　整理化简得:$2(k+1)^2=|k|$　　$2k^2+4k+2=|k|$