时间序列分析基础

陈家鑫 编著

暨南大学出版社

时间序列分析基础

陈家鑫编著

暨南大学出版社

责任编辑：林　桔
封面设计：钟潮波

时间序列分析基础

陈家鑫　编著

暨南大学出版社出版
广东省新华书店经销
广东省韶关新华印刷厂印刷

850×1168毫米　大32开9.5印张235千字
1989年10月第1版　1989年10月第1次印刷
印数1—1000
ISBN7--81029—012—6/0·1

定价：1.95元

前　言

前几年，编者为华中理工大学数学系毕业班同学及经济数学研究生开设了"时间序列分析"课程，先后共作过五次讲演．本书就是在当时的这些讲稿的基础上整理补充而成的．

近几年来，时间序列分析已引起国内学者及科研和生产部门的高度重视，尤其在广泛的应用领域里已取得很多可喜的成果．就本书所涉及的内容来说，国内已出版或翻译了若干这方面的专著．我们的目的是使只具备一般数学分析、概率统计及线性代数知识的读者，特别是广大的工程技术人员，能在较短的时间内对这个数学理论的基础内容有一个初步但又是相对完整的了解，为初学者入门引路．

本书力图做到理论阐述严谨、体系展开循序渐进、自封．当然，作者才疏学浅，离预期的目的尚有大的差距，而且，书中也一定会有不少错误和不当之处，恳请读者批评指正．

陈家鑫

1989年春于汕头大学

目　　录

第一章　差分方程

人们对于线性系统的分析和设计的兴趣日益增长．一方面，对系统的线性假设最易于进行数学处理；另一方面，已建立和发展了许多用线性系统近似非线性系统的理论和方法．这便大大拓广了线性系统分析的应用范围．为了追求高产量、高质量、低成本和低消耗，使经济效益达到最优，运用数学方法无疑是必需的．

差分方程理论是研究线性系统的强有力的数学工具．

§1　一阶线性差分方程

经济变量随时间演变的最简单模型是：

$$x_t - \varphi_1 x_{t-1} = 0 \tag{1.1.1}$$

其中φ_1是实数，$t=1,2,\cdots$,称(1.1.1)为**一阶齐次线性差分方程**．由迭代法容易求得：

$$x_t = \varphi_1^t x_0$$

$x_0(t=0)$为初始值．

引入所谓后移算子B，即$Bx_t = x_{t-1}$，令

$$\phi(B) = 1 - \varphi_1 B$$

则(1.1.1)可改写为：

$$\phi(B)x_t = 0 \tag{1.1.2}$$

称$\phi(B)$为差分方程(1.1.1)或(1.1.2)的**特征多项式**，称$\phi(B)=0$的解 $\lambda = \dfrac{1}{\varphi_1}$为**特征根**．

(1.1.1)式或(1.1.2)式的解可表为：

$$x_t = \lambda^{-t} x_0 \tag{1.1.3}$$

(1.1.3)式说明x_t作为t的函数，其变化规律由特征根λ的取值范围所确定。当$|\lambda|>1$时，x_t随t的无限增大而向零衰减；当$|\lambda|<1$时，x_t是发散的，λ取负值时，x_t是振荡的。

举例来说，若用x_1，x_2，x_3，…表示国民收入，a表示独立投资，c表示消费系数，可得各个时期国民收入的循环方程组：

$$\begin{aligned} x_1 &= a \\ x_2 &= a + cx_1 \\ x_3 &= a + cx_2 \\ &\vdots \\ x_t &= a + cx_{t-1} \end{aligned}$$

令

$$\xi_t = x_t - \frac{a}{1-c}$$

$$\xi_1 = x_1 - \frac{a}{1-c} = a - \frac{a}{1-c} = -\frac{ac}{1-c}$$

则

$$\xi_t = c\xi_{t-1}$$

通常，由于消费系数c满足$0<c<1$，有

$$x_t = \frac{a(1-c^t)}{1-c} \longrightarrow \frac{a}{1-c} \quad ,(t \longrightarrow \infty)$$

称$\frac{1}{1-c}$为动态凯恩斯乘数。

凯恩斯认为，国民收入x_t由两部分组成：表示投资部分的量a及用于消费部分的量b，b是前期国民收入的线性函数，即$b = cx_{t-1}$。这里c便称为消费系数。

§2 二阶线性差分方程

所谓二阶齐次线性差分方程，乃指

$$x_t - \varphi_1 x_{t-1} - \varphi_2 x_{t-2} = 0 \tag{1.2.1}$$

其中φ_1，φ_2为实数，$t=2$，3，…，称$x_0(t=0)$，$x_1(t=1)$为初始值，称(1.2.1)为**二阶线性齐次差分方程**。

引入所谓后移算子，令

$$\phi(B) = 1 - \varphi_1 B - \varphi_2 B^2$$

则(1.2.1)式可改写为：

$$\phi(B)x_t = 0 \tag{1.2.2}$$

(1.2.1)式或(1.2.2)式解的形式与特征多项式$\phi(B)$的根联系密切。以下记$\phi(B)=0$的两个根分别为λ_1和λ_2。

(i)若 $\lambda_1 \neq \lambda_2$，则(1.2.1)式的解的形式为：

$$x_t = b_1\lambda_1^{-t} + b_2\lambda_2^{-t} \tag{1.2.3}$$

其中b_1，b_2由初始值x_0及x_1唯一确定。

事实上，由于$\phi(\lambda_1)=\phi(\lambda_2)=0$，则有：

$$\begin{aligned}
& x_t - \varphi_1 x_{t-1} - \varphi_2 x_{t-2} \\
&= (b_1\lambda_1^{-t} + b_2\lambda_2^{-t}) - \varphi_1(b_1\lambda_1^{-(t-1)} + b_2\lambda_2^{-(t-1)}) \\
&\quad - \varphi_2\left(b_1\lambda_1^{-(t-2)} + b_2\lambda_2^{-(t-2)}\right) \\
&= b_1\lambda_1^{-t}\phi(\lambda_1) + b_2\lambda_2^{-t}\phi(\lambda_2) \\
&= 0
\end{aligned}$$

这便证明(1.2.3)式是(1.2.1)式的解。

根据初始值为x_0及x_1，系数b_1及b_2必需满足：

$$b_1 + b_0 = x_0, \qquad \frac{b_1}{\lambda_1} + \frac{b_2}{\lambda_2} = x_1$$

由于关于b_1，b_2的系数行列式

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ \dfrac{1}{\lambda_1} & \dfrac{1}{\lambda_2} \end{vmatrix} = \frac{\lambda_1 - \lambda_2}{\lambda_1\lambda_2} \neq 0$$

因此b_1，b_2完全由初始值x_0及x_1所确定。

(ii)若$\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$，则(1.2.1)式的解的形式为：

$$x_t = (b_1 + b_2 t)\lambda^{-t} \tag{1.2.4}$$

其中b_1，b_2由初始值x_0，x_1所唯一确定。

事实上，由根与系数的关系，有：

$$\lambda = -\frac{\varphi_1}{2\varphi_2}$$

所以

$$\begin{aligned} & x_t - \varphi_1 x_{t-1} - \varphi x_{t-2} \\ = & (b_1 + b_2 t)\lambda^{-t} - \varphi_1(b_1 + b_2 t - b_2)\lambda^{-(t-1)} \\ & - \varphi_2(b_1 + b_2 t - 2b_2)\lambda^{-(t-2)} \\ = & (b_1 + b_2 t)\lambda^{-t}(1 - \varphi_1\lambda - \varphi_2\lambda^2) \\ & + b_2\lambda^{-t+1}(\varphi_1 + 2\varphi_2\lambda) = 0 \end{aligned}$$

这便证明(1.2.4)是(1.2.1)的解。

根据初始值x_0及x_1，系数b_1，b_2必需满足：

$$b_1 = x_0, \quad (b_1 + b_2)\frac{1}{\lambda} = x_1$$

因此b_1，b_2也由初始值x_0，x_1所确定。

§3 高阶线性差分方程

所谓p阶齐次线性差分方程，乃指

$$x_t-\varphi_1x_{t-1}-\varphi_2x_{t-2}-\cdots-\varphi_px_{t-p}=0 \qquad (1.3.1)$$

其中$\varphi_1,\varphi_2\cdots$，$\varphi_p$为实数，称$x_0,x_1\cdots$，$x_{p-1}$为初始值，称(1.3.1)**为p阶齐次线性差分方程。**

引入所谓后移算子B，令

$$\phi(B)=1-\varphi_1B-\varphi_2B^2-\cdots-\varphi_pB^p \qquad (1.3.2)$$

则(1.3.1)式可改写为：

$$\varphi(B)x_t=0 \qquad (1.3.3)$$

对(1.3.1)式或(1.3.3)式解的形式与特征多项式(1.3.2)根的关系，有如下的结论：若λ是$\phi(B)$的l重根，则$t^k\lambda^{-t}$是(1.3.1)式的特解，$k=0,1,2,\cdots,l-1$。

为了给出(1.3.1)式的解，记$\phi(B)=0$的单根为$\lambda_1,\lambda_2\cdots$，$\lambda_m$，重根为$\lambda_{m_1+1}$，$\lambda_{m_1+2}$，…，$\lambda_{m_1+m_2}$，其重根的次数分别记为$l_1,l_2\cdots,l_{m_2}$。易知

$$m_1+l_1+l_2+\cdots l_{m_2}=p$$

可以证明(略)，(1.3.1)式解的一般形式为：

$$x_t=\sum_{k=1}^{m_1}C_k\lambda_k^{-t}+\sum_{k=0}^{l_1-1}C_{m_1+1+k}t^k\lambda_{m_1+1}^{-t}+\cdots$$

$$+\sum_{k=0}^{l_{m_2}-1}C_{m_1+l_1+l_2+\cdots+l_{m_2-1}+1+k}t^k\lambda_{m_1+m_2}^{-t}$$

其中$C_1,C_2,\cdots,C_p$完全由初始值$x_0,x_1,\cdots,x_{p-1}$所确定。

x_t作为t的函数，其变化规律由特征多项式$\phi(B)$的根的取值范围所确定。当$\phi B)$的所有根都在单位圆周的外部时，x_t向零衰减；当有一个(至少一个)特征根落入单位圆周的内部时，x_t是发散的。

如果齐次线性差分方程的阶数$p\geqslant 2$，其特征多项式$\phi(B)$的根可能出现复根的情形。复根一定共轭出现。只要初始值x_0，$x_1,\cdots,x_{p-1}$取实值，则(1.3.1)式具有实数解。设$\lambda=r(\cos\theta$

$+i\sin\theta)$是$\phi(B)$的l重根，则对应的共轭复根$\bar{\lambda}=r(\cos\theta-i\sin\theta)$也是$\phi(B)$的$l$重根。这时(1.3.1)式的实数解的一般形式为含如下形式的项的线性组合

$$r^{-t}\{c_1\cos(\theta t+c_2)+d_1t\cos(\theta t+d_2)+\cdots+h_1t^{l-1}\cos(\theta t+h_2)\}$$

其中c_1，c_2；d_1，d_2；…，h_1，h_2是实数。

§4 线性向量差分方程

设φ_1是$k\times k$的实矩阵，

$$\varphi_1=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1k} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2k} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{k1} & a_{k2} & \cdots & a_{kk} \end{pmatrix}$$

且k维向量序列$x_t=(x_{1t}, x_{2t}\cdots, x_{kt})^\tau$，$t=0, 1, 2, \cdots$，满足矩阵方程

$$x_t-\varphi_1x_{t-1}=0 \tag{1.4.1}$$

称(1.4.1)式为**一阶齐次线性向量差分方程**，x_0为初始值，通过与§1完全相同的讨论，可得：

$$x_t=\varphi_1^tx_0$$

这里乘法及幂运算按矩阵的乘法及幂运算规则进行。

引入后退算子B，令

$$\phi(B)=I-\varphi_1B \tag{1.4.2}$$

其中I是$k\times k$单位矩阵，则(1.4.1)式可改写为：

$$\phi(B)x_t=0 \tag{1.4.3}$$

注意到$\det(I-\varphi_1B)$与$\det(\lambda I-\varphi_1)$的根互为倒数，如果矩阵$\lambda I-\varphi_1$的初等因子是：

$$(\lambda-\frac{1}{\lambda_1})^{k_1},\quad (\lambda-\frac{1}{\lambda_2})^{k_2},\cdots(\lambda-\frac{1}{\lambda_r})^{k_r}$$

其中$k_1+k_2+\cdots+k_r=k$，则λ_1，λ_2，$\cdots$，λ_r是$\det\phi(B)$的根．根据矩阵的众所周知事实：存在正交矩阵Q，将φ_1化为Jordan标准形，即

$$Q^{-1}\varphi_1 Q=J$$

其中J是Jordan块，设

$$J=\begin{pmatrix} J_1 & & & 0\\ & J_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & J_r\end{pmatrix}$$

且

$$J_k=\begin{pmatrix} \lambda_k^{-1} & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0\\ 0 & \lambda_k^{-1} & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & \lambda_k^{-1} & 1\\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \lambda_k^{-1}\end{pmatrix}$$

因此

$$\varphi_1^t=QJ^tQ^{-1}=Q\begin{pmatrix} J_1^t & & & 0\\ & J_2^t & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & J_r^t\end{pmatrix}Q^{-1}$$

$$x_t=QJ^tQ^{-1}x_0$$

可见，当$\det\phi(B)$的所有根都在单位圆周的外部时，x_t向零向量衰减；当$\det\phi(B)$有一个(至少一个)根位于单位圆周的内部时，x_t发散。

一般地，设φ_1，φ_2，$\cdots$是$k\times k$实矩阵，k维向量序列x_t，$t=0$，1，2，$\cdots$，满足：

$$x_t-\varphi_1x_{t-1}-\varphi_2x_{t-2}-\cdots-\varphi_px_{t-p}=0 \qquad (1.4.4)$$

称(1.4.4)为P阶齐次线性向量差分方程.

令

$$\xi_t=(x_t,\ x_{t-1},\ \cdots,\ x_{t-p+1})'$$

$$\psi_1=\begin{pmatrix}\varphi_1 & \varphi_2 & \cdots & \varphi_{p-1} & \varphi_p\\ I & 0 & \cdots & 0 & 0\\ 0 & I & \cdots & 0 & 0\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ 0 & 0 & \cdots & I & 0\end{pmatrix}$$

则(1.4.4)式可改写为:

$$\xi_t-\psi_1\xi_{t-1}=0 \tag{1.4.5}$$

可见，关于P阶齐次线性向量差分方程解及解的性质的讨论完全可归结为一阶齐次线性向量差分方程(1.4.1)的对应问题的讨论.如上所述，假如行列式$\det(I-\psi_1B)$所有根都位于单位圆周的外部时，ξ_t向零向量衰减；当行列式$\det(I-\psi_1B)$有一个(至少一个)根位于单位圆周的内部时，ξ_t发散。

注意到$\det(I-\psi_1B)=\det(I-\varphi_1B-\varphi_2B^2-\cdots-\varphi_pB^p)$，所以，当$\det(I-\varphi_1B-\varphi_2B^2-\cdots-\varphi_pB^p)$的所有根都位于单位圆周的外部时，$x_t$向零向量衰减；当有一个(至少一个)根位于单位圆周的内部时，x_t发散。

例1.4.1 求一阶齐次线性向量差分方程

$$x_t-\begin{pmatrix}1 & 1\\ -1.62 & -0.8\end{pmatrix}x_{t-1}=0\,,\quad t=1,\ 2,\ \cdots$$

在初始值$x_0=(2,\ 3.6)'$条件下的解。

解 令$\varphi_1=\begin{pmatrix}1 & 1\\ -1.62 & -0.8\end{pmatrix}$，则

$$\lambda I-\varphi_1=\begin{pmatrix}\lambda-1 & -1\\ 1.62 & \lambda+0.8\end{pmatrix}$$

$$\det(\lambda I-\varphi_1)=(\lambda-1)(\lambda+0.8)+1.62=\lambda^2-0.2\lambda+0.82$$

可计算出行列式$\det(\lambda I-\varphi_1)$的两个根$\lambda_1$及$\lambda_2$为：

$$\lambda_1=0.1+0.9i$$

$$\lambda_2=0.1-0.9i$$

$$J=\begin{pmatrix}0.1+0.9i & 0\\ 0 & 0.1-0.9i\end{pmatrix}$$

经计算得正交矩阵 $Q=\begin{pmatrix}1+i & 1-i\\ -1.8 & -1.8\end{pmatrix}$，因而

$$Q^{-1}=\begin{pmatrix}-0.5i & -\dfrac{1+i}{3.6}\\ 0.5i & -\dfrac{1-i}{3.6}\end{pmatrix}$$

$$Q^{-1}x_0=(-1-2i,\ -1+2i)^\tau$$

最后得

$$x_t=QJ^tQ^{-1}x_0=\begin{pmatrix}1+i & 1-i\\ -1.8 & -1.8\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\lambda_1^t & 0\\ 0 & \lambda_2^t\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1-2i\\ -1+2i\end{pmatrix}$$

$$=((1-3i)\lambda_1^t+(1+3i)\lambda_2^t,\ (1.8+3.6i)\lambda_1^t+(1.8-3.6i)\lambda_2^t)^\tau$$

$$\approx(6.324(0.906)^t\cos(1.460t-1.249),\ 8.050(0.906)^t\cdot\cos(1.460t+1.107))^\tau$$

记$x_t=(x_{1t},\ x_{2t})^\tau$，则$x_{1t}$及$x_{2t}$都是衰减余弦函数，衰减因子为$(0.906)^t$，频率为1.460，即周期为$\dfrac{2\pi}{1.460}\approx4.30$。但第一分量$x_{1t}$的振辐比第二分量$x_{2t}$的振辐小；与余弦函数$\cos(1.460t)$比较，第一分量$x_{1t}$滞后$\dfrac{1.249}{1.406}\approx0.855$，第二分量$x_{2t}$却领先$\dfrac{1.107}{1.406}\approx0.758$，所以第一分量$x_{1t}$较第二分量$x_{2t}$滞后的时间单位为$0.758+0.855=1.613$。

第二章　线性随机系统的时域分析

第一章讨论的差分方程解及其性质问题属于确定性动态数学模型的分析方法，其研究对象是线性系统，对描述这个系统的量x_t可进行准确的观测及计算。当人们更精确地考察客观世界时，发现试图使用确定性数学模型来描述实际问题常常是不确切的。这就是说，对不同时刻的x_t，相互之间不能由某些时刻的量唯一地确定另一些时刻的量。从统计学的观点来看，不同时刻的x_t存在统计相关性。严格来说，我们研究的对象x_t，$t=0$，1，2，…，是一串依次序排列的随机变量，所满足的动态方程表示为具有随机初始状态，并带有随机扰动的差分方程。

这里所说的随机扰动统称为**动态噪声**。实际问题中最常遇到的一类动态噪声便是所谓**白噪声**。

定义2.0.1　如果随机变数序列x_t，$t=0$，±1，±2…，两两不相关，即

$$\mathrm{COV}(x_t,\ x_j)=R_t\delta_{tj},\quad \delta_{tj}=\begin{cases}1, & 当\ t=j\\ 0, & 当\ t\neq j\end{cases}$$

称此随机序列$\{x_t\}$为**白噪声序列**。

从现在开始，我们称随机序列为时间序列。

如果$\{x_t\}$是正态时间序列且满足作为白噪声序列的条件，称此时间序列为**正态白噪声序列**。

定义2.0.2　时间序列$\{x_t\}$称为**平稳时间序列**，如果对一切t，j，m满足：

$$\mathrm{E}\{x_t\}=\mu$$

$$\mathrm{COV}(x_t,\ x_j)=\mathrm{COV}(x_{t+m},\ x_{j+m})$$