



齿轮设计
丛书

CHILUN SHEJI
CONGSHU

渐开线齿轮的 几何原理与计算

413

李华敏 韩元莹 王知行 编著 机械工业出版社

本书系统地介绍了平面和空间渐开线齿轮的几何原理及计算方法。内容主要包括渐开线圆柱齿轮的齿形、基本参数及尺寸；齿条刀具及插齿刀加工的直齿渐开线齿轮传动；渐开线圆柱齿轮传动的质量指标；变位系数的选择，以及斜齿渐开线齿轮、螺旋齿轮、变齿厚渐开线齿轮、偏心渐开线齿轮的传动原理与几何计算等。本书内容丰富、深入浅出，各章均附有例题，以利于读者参照应用。本书对普及齿轮原理知识和更新齿轮技术工作者知识方面将起一定作用。

本书可供从事齿轮设计、制造工作的工程技术人员参考，亦可供大专院校师生参考。

渐开线齿轮的几何原理与计算

李华敏、韩元莹、王知行 编著

机械工业出版社出版（北京阜成门外百万庄南里一号）

（北京市书刊出版业营业许可证出字第117号）

中国农业机械出版社印刷厂印刷

新华书店北京发行所发行·新华书店经售

开本 787×1092 1/32·印张 11·字数 238 千字

1985年11月北京第一版·1985年11月北京第一次印刷

印数 0,001—8,550·定价 2.65 元

统一书号：15033·5988

出版说明

齿轮是应用非常广泛的重要传动元件。随着科学技术的飞跃发展，对齿轮传动提出了越来越高的要求。为适应形势的需要，总结、介绍国内外先进经验与技术，特决定组织出版这套《齿轮设计丛书》，以利提高我国齿轮设计、生产水平。

本丛书内容包括：齿轮啮合原理、齿轮传动的精度、各类齿轮传动（包括特种齿轮）和各类蜗杆传动的设计、齿轮的试验技术与设备等等。内容着重于介绍设计的理论基础、设计方法、设计参数以及数据的分析选择等，力图满足齿轮传动设计者的需要。因此，本丛书主要供从事齿轮设计、制造工作的工程技术人员参考。丛书将分若干分册陆续出版。

由于水平有限，书中难免有错误和不妥之处，欢迎读者批评指正。

前 言

渐开线齿轮自18世纪60年代发明以来,已有200余年的历史,但目前在生产中仍然广泛使用而保持其强大的生命力。其原因主要在于它易于精确加工,从而在长期工业生产中形成了一整套完善的工艺与检测技术。与此同时,有关渐开线齿轮的原理、强度、精度、动力学以及工艺理论等方面都得到深入的发展,这也促进了渐开线齿轮的应用。

渐开线齿轮的原理自1765年欧拉(L·Euler)提出渐开线齿形以来也有很大的发展。1837年威里斯(R·Willis 英国)提出渐开线齿轮中心距变化不影响传动比的理论并提出 14.5° 压力角的齿形制。1873年霍普(Норре 德国)首先提出变位齿轮的概念,以后在20世纪变位齿轮又得到广泛而深入的研究,直到50年代加夫里连柯(В.А.Гавриленко 苏联)提出封闭图的概念,又经格罗曼(М.Б.Громан)、鲍洛托夫斯基(И.А.Болотовский)等制作了可供实用的封闭图,从而比较完满地解决了变位系数的选择问题。关于渐开线齿轮的几何计算,在加夫里连柯的著作〔23〕、〔25〕中有深入而系统的研究。但他对空间螺旋齿轮的研究却不够深入,我国学者郭克强在这方面作了进一步的工作〔14〕。1954年比姆(A.S. Beam)提出变齿厚渐开线齿轮的论文〔28〕,以后又经别兹茹可夫(В.И.Безруков)等进行了比较深入的研究〔20〕、〔21〕。

作为齿轮设计丛书中的一册,本书的目的是系统地介绍平面和空间渐开线齿轮的几何原理及计算方法。为了便于中

级工程技术人员学习，本书力求做到深入浅出，即在理论上要深入介绍当前在渐开线齿轮原理方面已经取得的主要成果（例如，线接触的空间渐开线齿轮），但在叙述方法上则避免采用高深的数学工具，只限于中等数学和一般的解析几何和微积分。各章均附有例题，以便读者参照应用。作者希望，本书能在普及齿轮原理的知识和齿轮技术工作者的知识更新方面起到一定的作用。

本书由哈尔滨工业大学李华敏、韩元莹、王知行编写，其中王知行编写第一、二、四、五章，韩元莹编写第三和第六章，李华敏编写第七、八、九章。计算程序由刘福利编写。

欢迎对本书中的缺点、错误提出批评指正。

本书在编写过程中曾请北京钢铁学院沈蕴方同志进行了审阅，谨此致谢。

作 者

主要符号

- a ——中心距, 标准齿轮、高度变位齿轮中心距
- a' ——角度变位齿轮中心距
- a_o ——插齿刀切齿时的中心距
- b ——齿宽
- c ——顶隙、径向间隙
- c^* ——顶隙系数, 径向间隙系数
- c_n^* ——法向径向间隙系数
- c_s^* ——端面径向间隙系数
- d ——直径, 分度圆直径
- d_a ——齿顶圆直径
- d_b ——基圆直径
- d_f ——齿根圆直径
- h ——齿高, 全齿高
- h_a ——齿顶高
- h_f ——齿根高
- h_a^* ——齿顶高系数
- h_{an}^* ——法向齿顶高系数
- h_{as}^* ——端面齿顶高系数
- $\bar{h}$ ——分度圆弦齿高
- $\bar{h}_o$ ——固定弦齿高
- k ——测量公法线跨齿数
- M ——测量圆棒之间的垂直距离
- m ——模数
- m_n ——法向模数
- m_s ——端面模数

X

- p ——齿距, (周节), 分度圆齿距
- p_b ——基圆齿距
- r ——半径, 分度圆半径
- s ——齿厚, 分度圆齿厚
- s' ——节圆齿厚
- s_a ——齿顶厚
- s_b ——基圆齿厚
- $\bar{s}$ ——分度圆弦齿厚
- $\bar{s}_0$ ——固定弦齿厚
- u ——齿数比
- V ——速度, 分度圆圆周速度
- W_k ——跨 k 个齿的公法线长度
- W^* —— $m=1$ 的标准齿轮的公法线长度
- x ——变位系数
- x_E ——总变位系数, 变位系数和($x_E = x_1 + x_2$)
- x_n ——法向变位系数
- x_t ——端面变位系数
- x_o ——插齿刀变位系数
- y ——中心距变动系数(分度圆分离系数)
- Y_F ——齿形系数
- z ——齿数
- z_o ——插齿刀齿数
- z_v ——当量齿数
- z_E ——齿数和($z_E = z_1 + z_2$)
- z_{min} ——标准齿轮不产生根切的最少齿数
- α ——压力角, 齿形角, 分度圆压力角
- α' ——啮合角, 节圆压力角
- α_n ——齿顶压力角
- α_n ——法向压力角
- α_t ——端面压力角

$\operatorname{inv} \alpha$ —— α 角的渐开线函数

β ——螺旋角, 分度圆螺旋角

β_b ——基圆螺旋角

Σ ——轴交角

ε ——重合度

ε_a ——端面重合度

ε_β ——轴向重合度

η ——效率, 滑动率

ρ ——曲率半径

ψ ——几何压力系数

δ ——变厚齿轮轴线与齿条刀具分度平面的夹角

主要下脚标符号

a ——齿顶的

b ——基圆的

F ——齿根弯曲的

f ——齿根的

L ——左齿廓的

$\max$ ——最大的

$\min$ ——最小的

R ——右齿廓的

t ——端面的

τ ——斜齿圆柱齿轮当量的

Σ ——代数和

0 ——工具上的

1 ——小齿轮上的

2 ——大齿轮上的

目 录

前言

主要符号

第一章 渐开线圆柱齿轮的齿形、基本参数及尺寸.....	1
一、渐开线及其传动性质	1
二、渐开线标准直齿圆柱齿轮的基本参数及基本尺寸	9
三、渐开线标准齿轮啮合传动	19
四、渐开线齿轮的加工原理	25
第二章 齿条刀具加工的外啮合直齿渐开线齿轮传动.....	34
一、渐开线齿轮变位的原理及其齿形特点	34
二、渐开线齿廓的根切现象及其避免方法	38
三、渐开线齿轮的齿厚及公法线长度计算	43
四、变位齿轮传动计算	63
五、变位齿轮传动的分类与比较	74
第三章 插齿刀加工的直齿渐开线齿轮传动.....	82
一、插齿刀及其齿形	82
二、插齿刀加工的齿轮及其计算公式	87
三、内啮合齿轮的计算特点及计算公式	90
四、插齿刀加工的齿轮的根切和顶切	100
五、外啮合渐开线齿轮的干涉	114
六、内啮合渐开线齿轮的干涉	120
第四章 渐开线圆柱齿轮传动的质量指标.....	128
一、渐开线齿轮传动的重合度	128
二、渐开线齿轮传动的滑动率	137
三、渐开线齿廓的几何压力系数	149
四、渐开线齿轮啮合传动中的机械效率	155
第五章 变位系数的选择.....	163

一、选择变位系数的基本原则	163
二、选择变位系数的限制条件	166
三、选择变位系数线图及其用法	180
四、外啮合渐开线齿轮的封闭图及其用法	188
第六章 斜齿渐开线齿轮的几何计算	198
一、斜齿轮的形成原理	198
二、斜齿轮传动的计算特点及计算公式	202
三、斜齿轮的法面齿形	209
四、斜齿轮传动的优缺点	213
第七章 螺旋齿轮传动	218
一、螺旋齿轮的传动原理	218
二、公共齿条与螺旋齿轮的啮合	221
三、螺旋齿轮的中心距	227
四、螺旋齿轮的重合度	230
五、螺旋齿轮的干涉	234
六、螺旋齿轮的设计	236
第八章 变齿厚渐开线齿轮传动	245
一、变厚齿轮的加工原理和尺寸计算	245
二、平行轴变厚齿轮传动	251
三、交错轴变厚齿轮传动	263
第九章 偏心渐开线齿轮传动	301
一、偏心渐开线齿轮的传动原理	301
二、用图解法分析偏心齿轮的运动	303
三、解析法分析偏心齿轮的运动	308
四、直齿偏心齿轮的设计	315
五、斜齿偏心齿轮	321
附录 I TI-59 计算器程序	326
附录 II 渐开线函数表	334
参考文献	338

第一章 渐开线圆柱齿轮的齿形、 基本参数及尺寸

在机械传动中，齿轮被广泛地应用于传递两轴间的运动及动力。为了保证传动过程中运动的精确性和工作的平稳性，要求齿轮的瞬时传动比为常数。从理论上讲，只要用一对共轭曲线来作齿轮的齿廓就可以满足这一要求。但是，评价齿形曲线时，还应考虑到其承载能力的高低、加工制造的难易程度以及对中心距偏差的敏感性等因素。综合地考虑这些因素之后，渐开线齿形就比摆线或其它一些齿形具有更多的优越性，因而渐开线齿轮在生产中得到了广泛的应用。

本章主要研究三个问题：

渐开线及其传动性质；渐开线标准齿轮的基本参数及其尺寸；渐开线齿轮的加工原理。

一、渐开线及其传动性质

1. 渐开线的形成

如图1-1所示，当直线 $x-x$ 沿着半径为 r_0 的圆作纯滚动时，该直线上的任一点 K 的轨迹称为该圆的渐开线。半径为 r_0 的圆称为渐开线的基圆，直线 $x-x$ 称为渐开线的发生线。

2. 渐开线的性质

从渐开线的形成过程可以看出它具有以下性质：

(1) 发生线在基圆上滚过的线段长度 $\overline{KN}$ 等于基圆上被滚过的圆弧长度 $\widehat{AN}$ ，即：

$$\overline{KN} = \widehat{AN}$$

(2) 渐开线上任一点的法线切于基圆。当发生线 $x-x$ 沿基圆作纯滚动时, 切点 N 为其瞬时转动中心, K 点处的渐开线可以看成以瞬心 N 为圆心的圆弧, 因而 $\overline{KN}$ 为渐开线在 K 点处的曲率半径, 即为其法线。故渐开线法线与其基圆在 N 点相切。渐开线上各点处的曲率不等, 离基圆越近, 其曲率半径越小, 离基圆越远, 曲率半径就越大。

(3) 基圆以内没有渐开线。

(4) 渐开线的形状仅取决于其基圆的大小。基圆越小, 渐开线越弯曲 (如图1-2中的渐开线 A_1K), 基圆越大,

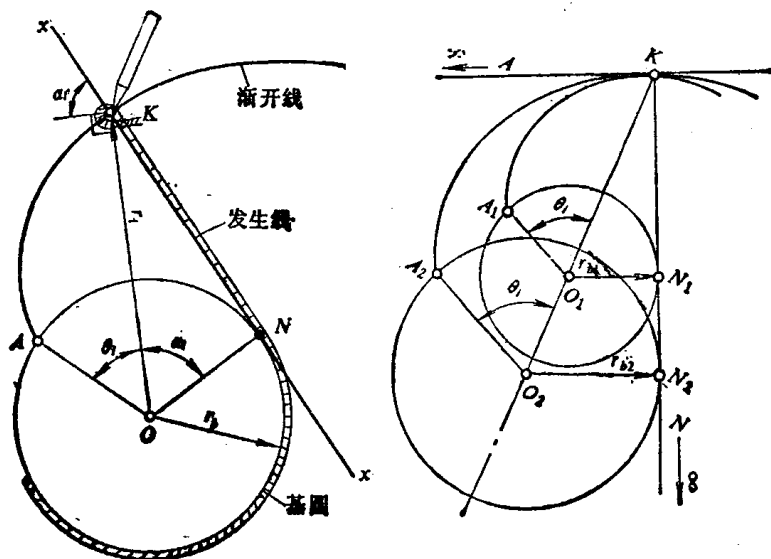


图1-1 渐开线形成原理图 图1-2 渐开线形状与基圆半径关系图

渐开线越平直 (如图1-2中的渐开线 A_3K), 当基圆为无穷大时, 渐开线就变成一条直线。

3. 渐开线的方程式

在工程上，渐开线通常以极坐标方程式表示。如图 1-1 所示，以 OA 为极坐标轴，则渐开线上任一点 K 的位置可以用向径 r_i 和极角 θ_i 来确定。

在 $\triangle KON$ 中： $r_i = r_b / \cos \alpha_i$

又根据渐开线的性质，由图 1-1 得：

$$r_b(\theta_i + \alpha_i) = \widehat{AN} = \overline{KN} = r_i \operatorname{tg} \alpha_i$$

$$\therefore \theta_i = \operatorname{tg} \alpha_i - \alpha_i$$

极角 θ_i 称为压力角 α_i 的渐开线函数，在工程上通常以符号 $\operatorname{inv} \alpha_i$ 表示，即：

$$\operatorname{inv} \alpha_i = \theta_i = \operatorname{tg} \alpha_i - \alpha_i$$

归纳起来，渐开线的极坐标参数方程式为：

$$\left. \begin{aligned} r_i &= r_b / \cos \alpha_i \\ \operatorname{inv} \alpha_i &= \operatorname{tg} \alpha_i - \alpha_i \end{aligned} \right\} \quad (1-1)$$

从上面方程式可以看出，当基圆半径 r_b 一定时，只要给出一个 α_i 值，就有一确定的 r_i 及 θ_i ($\operatorname{inv} \alpha_i$) 值，即确定了渐开线上某一点的座标位置。这里 α_i 称为渐开线在该点的压力角。显然， α_i 的大小是随渐开线上某一点的位置的变化而变化的；渐开线某一点的向径 r_i 越大时，其压力角 α_i 就越大，向径 r_i 越小，其压力角 α_i 就越小。渐开线在基圆上的压力角为 0。

在工程上，为了计算方便，制作了渐开线函数表（见附录 II），当已知压力角 α 的数值时，可以运用该表直接查得 $\operatorname{inv} \alpha$ （即为极角 θ 的弧度值），或当已知渐开线函数 $\operatorname{inv} \alpha$ 的数值时，可以从表中查得压力角 α 的数值。

在生产中，有时需要画出渐开线齿轮的齿廓曲线，此时，用直角坐标法计算渐开线齿廓上各点的座标值比极座标

法方便。渐开线齿轮直角坐标方程式的推导，应在掌握齿轮的基本尺寸计算公式之后进行，但为了叙述方便，先在这里推导如下：

图1-3 画出了一个齿轮的轮齿齿廓，若以齿轮中心 O 为坐标原点，以齿厚的对称线为纵坐标轴 y ，齿廓上任一点 C 的向径为 r_c ，且该向径 r_c 与 y 轴的夹角为 φ_c ，则渐开线上 C 点的直角坐标方程式可以写为：

$$\left. \begin{aligned} x_c &= r_c \sin \varphi_c \\ y_c &= r_c \cos \varphi_c \end{aligned} \right\} \quad (1-2)$$

显然，当给定某一向径 r_c 值后，只要求出角度 φ_c 的值， x_c 、 y_c 值就可求出。

对于齿数为 z ，模数为 m ，分度圆压力角为 α 的标准渐开线齿轮，

其分度圆半径 $r = \frac{1}{2}$

mz ，基圆半径 $r_b = \frac{1}{2}$

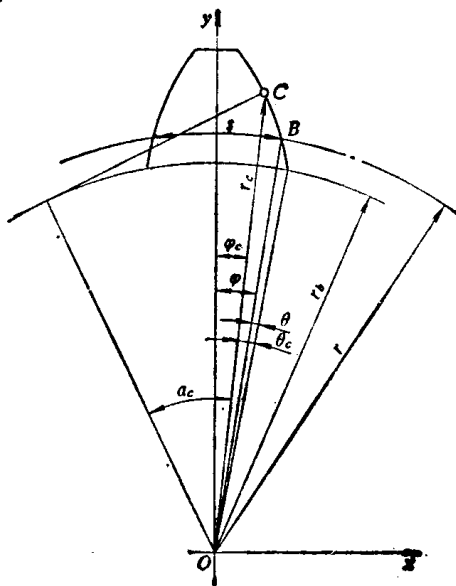
$mz \cos \alpha$ ，任意一点 C 的向径 $r_c = r_b / \cos \alpha_c$ ，因此， C 点的压力角 α_c

为： $\alpha_c = \arccos(r_b / r_c)$ 。

图1-3 渐开线齿轮的直角坐标图

C 点所对应的齿厚半角 φ_c （即为 r_c 与 y 轴的夹角）应为（见图1-3），

$$\varphi_c = \theta + \varphi - \theta_c \quad (1-3)$$



式中 θ ——渐开线在分度圆上 B 点处的极角, $\theta = \text{inv} \alpha$, 由于分度圆压力角 α 为已知, 故 θ 值可从渐开线函数表中查出;

φ ——分度圆齿厚 s 所对的中心角之半, $\varphi = \frac{s}{2r}$;

θ_c ——渐开线在 C 点处的极角, $\theta_c = \text{inv} \alpha_c$, 对于给定的 r_c , $\alpha_c = \arccos(r_b/r_c)$ 。

因此有:

$$\varphi_c = \text{inv} \alpha - \text{inv} \alpha_c + s/2r \quad (1-4)$$

式中 s 为分度圆齿厚, 对于标准齿轮, $s = \frac{1}{2} \pi m$, 对于变

位齿轮, $s = \frac{1}{2} \pi m + 2xmtg\alpha$, x 为齿轮的变位系数。

4. 渐开线齿廓啮合传动的特点

一个渐开线齿轮的齿廓, 是由同一个基圆画出的两条对称的渐开线组成的, 如图 1-4 所示。用这样的齿形做成的齿轮, 啮合传动时有以下几个特点:

(1) 传动比恒定不变

在图 1-5 中, 当两齿轮的一对渐开线齿廓在 K 点啮合(接触)时, 过 K 点可作该两齿廓的公法线 $\overline{N_1N_2}$, 根据渐开线的性质(2)

(法线切于基圆),

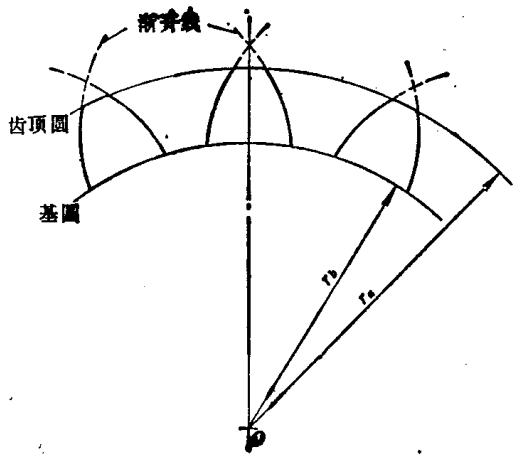


图 1-4 渐开线齿轮的轮齿组成

此公法线 $\overline{N_1N_2}$ 必分别与两基圆相切而成为其公切线。若在齿轮1的推动下,该两齿廓转至 K' 点啮合,过 K' 点仍可作两齿廓的公法线,它必然仍与此两基圆相切。由于该两基圆的大小、位置均已固定,其在一个方向上的内公切线只有一条,因而不论该两齿廓在何处啮合,其啮合点的公法线必为两基圆的内公切线 $\overline{N_1N_2}$ 。因此, $\overline{N_1N_2}$ 与中心线 $\overline{O_1O_2}$ 的交点也只有一个,即为 P 点。也就是说, P 点的位置是固定不变的。根据三心定理, P 点为两齿轮的相对瞬心,即 P

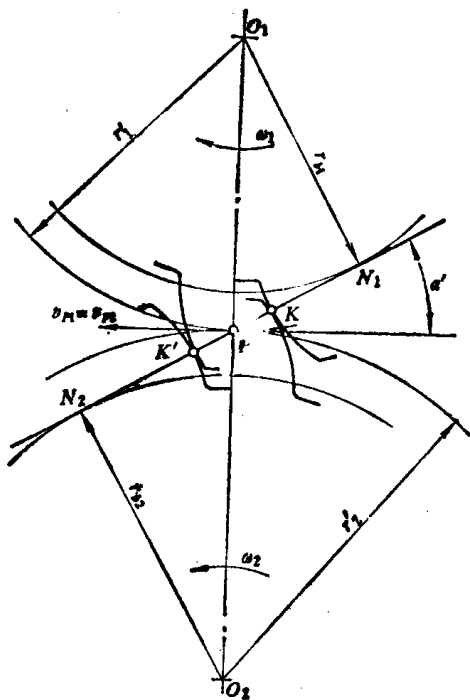


图1-5 渐开线齿廓啮合传动图

点为齿轮1和齿轮2上速度相同的点。设齿轮1上 P 点的速度为 v_{P1} , 齿轮2上 P 点的速度为 v_{P2} , 则有:

$$v_{P1} = v_{P2} = v_P$$

而 $v_{P1} = \omega_1 \overline{O_1P}$, $v_{P2} = \omega_2 \overline{O_2P}$, 故

$$\omega_1 \overline{O_1P} = \omega_2 \overline{O_2P}$$

即传动比 i_{12} 为

$$i_{12} = \frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{\overline{O_2P}}{\overline{O_1P}} \quad (1-5)$$

由于两齿轮的中心距 O_1O_2 长度固定不变, P 点的位置也固定不变, 因此, 传动比 $i_{12} = \overline{O_2P} / \overline{O_1P}$ 应等于常数。这就是说, 一对渐开线齿廓不论在何处啮合, 两齿轮角速度之比 (传动比) 均等于 $\overline{O_2P} / \overline{O_1P}$, 恒定不变。

以两齿轮的回转中心为圆心, 分别以 $\overline{O_1P}$ 和 $\overline{O_2P}$ 为半径的圆, 称为**节圆**, 点 P 称为节点, 节圆半径分别用 r'_1 和 r'_2 表示, 节圆直径用 d'_1 、 d'_2 表示。两齿轮啮合传动, 就相当于直径为 d'_1 和 d'_2 的两摩擦轮的纯滚动传动。

(2) 中心距变动不影响传动比

在图1-5中, 连接 O_1N_1 和 O_2N_2 得 $\triangle O_1PN_1 \sim \triangle O_2PN_2$, 故有

$$i_{12} = \frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{\overline{O_2P}}{\overline{O_1P}} = \frac{\overline{O_2N_2}}{\overline{O_1N_1}} = \frac{r_{b2}}{r_{b1}} \quad (1-6)$$

式中 r_{b1} 和 r_{b2} 分别为两齿轮的基圆半径。

这就是说, 一对渐开线齿轮的传动比等于其基圆半径的反比。由于两齿轮已经加工完成, 其基圆半径不会改变, 因此, 不论该对齿轮中心距 O_1O_2 如何改变, 其传动比 i_{12} 总等于其基圆半径的反比且为恒定值。这种中心距改变, 而其传动比不变的性质, 称为渐开线齿轮的**可分性**。根据这一性质, 可以适当放宽渐开线齿轮的中心距公差和切深公差, 以便于加工和装配。

此外, 还可以利用渐开线齿轮的可分性, 做成在一定范围内可调中心距的齿轮传动; 例如, 自动焊接机中带动送丝滚轮的传动, 在保证传动比不变的条件下, 可调节齿轮中心距以适应不同直径焊丝的要求。

(3) 啮合线是过节点的直线

一对齿轮啮合过程中, 轮齿啮合点 (接触点) 的轨迹称为**啮合线**。