

高等学校教材

# 核反应堆物理分析

下册

谢仲生 尹邦华  
潘国品 傅龙舟  
罗经宇

编 著  
审 校

原子能出版社

## 内 容 简 介

本书为《核反应堆物理分析》下册，内容包括：中子输运方程；分群扩散理论；多群扩散方程的数值解法；中子的热化；微扰理论；反应堆动力学。

本书是高等学校核反应堆工程专业的教材，也可供有关专业的工程技术和设计研究人员参考。

高等学校教材

核反应堆物理分析

下册

谢仲生 尹邦华 编著  
潘国品 傅龙舟  
罗经宇 审校

原子能出版社出版

(北京2108信箱)

顺义振华印刷厂印刷

☆

新华书店北京发行所发行·新华书店经售

☆

开本 850×1168  $1/32$ ·印张 6.5·字数 170 千字

1986年6月北京第一版·1986年6月北京第一次印刷

印数 1—1,400·统一书号：15175·712

定价：1.10元

# 目 录

第九章 中子输运方程	1
1. 中子角通量和中子流密度	2
2. 中子输运方程	6
3. 特征值(临界)问题和源迭代法	17
4. 中子输运方程的积分形式	22
5. 球谐函数方法	27
6. 扩散近似	34
7. 离散坐标( $S_N$ )方法	44
第十章 分群扩散理论	53
1. 多群扩散方程	54
2. 群常数的计算	59
3. 反应堆慢化能谱的近似计算	64
4. 少群群常数的计算(MUFT简介)	77
第十一章 多群扩散方程的数值解法	83
1. 源迭代法	84
2. 一维扩散方程的数值解法	86
3. 二维扩散方程的数值解法	93
4. 三维问题的数值解法	101
5. 多群临界问题的数值解法	108
6. 燃耗计算	112
第十二章 中子的热化	118
1. 热化过程的一般特征	118
2. 散射核的近似模型	124
3. 无限均匀介质内中子的热化	134
4. 栅元内热中子空间-能量分布的计算	144
第十三章 - 微扰理论	150
1. 共轭算子和反应堆共轭方程	151
2. 中子价值	156
3. 微扰理论及其应用	164

第十四章 反应堆动力学(续) .....	172
1. 零功率反应堆的传递函数 .....	172
2. 小正弦输入扰动时的反应堆动态方程的解 .....	175
3. 零功率反应堆的频率特性 .....	176
4. 具有反馈的反应堆 .....	182
5. 反应堆稳定性问题 .....	186
附录 勒让特多项式和球谐函数 .....	201

## 第九章 中子输运方程

反应堆内的物理过程以及它的许多核的和工程方面的基本特性，都和 neutron 群体在系统内的运动以及芯部内中子密度的空间-能量分布有关。反应堆物理分析就是研究中子群体在反应堆内的运动过程的，它的主要课题之一就是研究求得中子密度分布函数所用的各种分析方法和模型。在第二章中我们介绍了单速扩散理论及其应用，那是最简单的计算模型。在这种模型中，假设中子通量是介质内空间坐标的缓慢变化函数，或中子速度的方向是各向同性或近于各向同性的 [见图 9-1 中(1)]。在上述条件下，所得到的仅仅是近似的结果。这时在中子密度(或中子通量)的自变量中并不包括中子的运动方向这一变量。

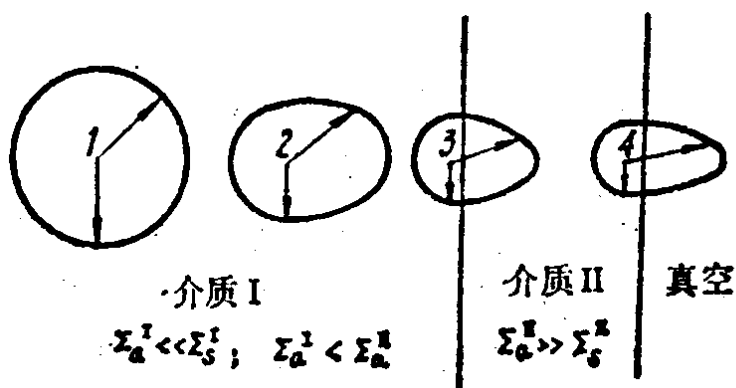


图 9-1 中子密度运动方向分布的向径图

但是，实际上中子运动的方向往往是各向异性的。例如图 9-1 所示，在反应堆边界上没有入射中子源，同时，由于泄漏的缘故，因而在靠近边界的点上，中子运动方向的角分布如图中所示；多数中子的运动方向是朝向反应堆边界的方向，图中用矢径的长度表示中子沿该方向运动的概率大小。因而在一些情况下(见第二章第 1.2 节)扩散理论不能适用(或者它的误差比较大)。在这些

情况下，为了研究中子在介质内的运动就必须借助于更精确的中子输运理论。它是研究中子在散射、吸收和增殖介质中运动的最精确的方法。下面就会看到，前面所述的单速扩散理论仅仅是它的一种近似模型。

本章将首先讨论中子输运方程的建立，然后介绍它的一些常用近似解法。

## 1. 中子角通量和中子流密度

在输运理论中，为了完整地描述中子群体在介质内的运动，除应用空间坐标  $r$  和中子能量  $E$  (或速度大小) 作自变量外，还必须应用中子的运动方向  $\Omega$  作为自变量。下面就引进自变量  $\Omega$  以后对中子密度、中子通量等定义作一些相应的扩充。

### 1.1 中子角密度和角通量

中子在空间的位置可以通过矢径  $r$  来表示(图9-2)

$$r = xi + yj + zk,$$

而体积元  $dr = dx dy dz$ ，中子运动的速度可以用矢量  $V$  来表示

$$V = v\Omega,$$

其中  $v = |V|$  是速率，即速度的大小，它与中子动能  $E$  的关系为  $E = mv^2/2$ ，其中  $m$  为中子的质量； $\Omega$  是运动方向的单位矢量，它的模等于 1，它的方向在极坐标中可通过极角  $\theta$  和辐角  $\varphi$  来表示(见图 9-2)。在直角坐标系中  $\Omega$  可以表为

$$\Omega = \Omega_x i + \Omega_y j + \Omega_z k, \quad (9-1)$$

而

$$\Omega_x = \sin\theta \cos\varphi, \quad \Omega_y = \sin\theta \sin\varphi, \quad \Omega_z = \cos\theta, \quad (9-2)$$

$$d\Omega = \sin\theta d\theta d\varphi. \quad (9-3)$$

因而，要对中子群体作最完整、最普遍的描述，就必须给出中子群体按空间  $r$  (三个坐标参数)、能量  $E$  (速度大小)、运动方向  $\Omega$  和时间  $t$  的分布。为此，我们引进中子密度分布函数的最普遍

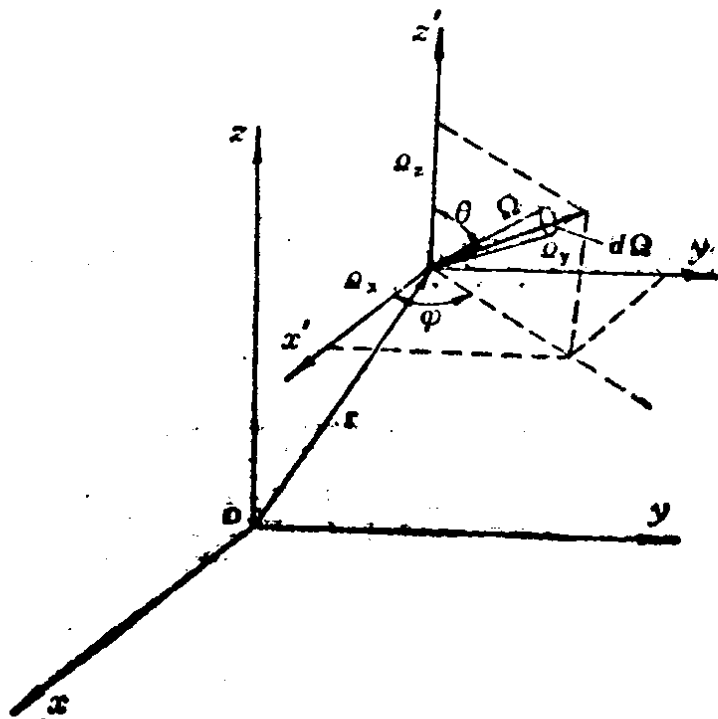


图 9-2 向量  $r$  和  $\Omega$  的表示

的描述——中子角密度  $n(\mathbf{r}, E, \Omega, t)$ 。它的定义是：在  $t$  时刻，在  $\mathbf{r}$  处的单位体积内能量等于  $E$  的单位能量间隔内具有运动方向为  $\Omega$  的单位立体角内的中子数目。因而，

$$n(\mathbf{r}, E, \Omega, t) dr dE d\Omega$$

= [  $t$  时刻在  $\mathbf{r}$  处  $dr$  体积元内，能量在  $E$  与  $E + dE$  之间，而运动方向在  $\Omega$  方向上的  $d\Omega$  立体角元内的中子数目 ]。 (9-4)

把中子角密度对所有立体角方向积分，便得到以前所定义的和能量相关的中子密度  $n(\mathbf{r}, E, t)$

$$n(\mathbf{r}, E, t) = \int_{4\pi} n(\mathbf{r}, E, \Omega, t) d\Omega, \quad (9-5)$$

$n(\mathbf{r}, E, t) dr dE$  便是  $t$  时刻在  $\mathbf{r}$  处  $dr$  体积元内，能量在  $E$  与  $E + dE$  之间的中子总数目(包括所有运动方向在内)。

根据(1-36)式定义，对应于中子角密度可以定义中子角通量  $\phi(\mathbf{r}, E, \Omega, t)$  为<sup>1)</sup>

$$\phi(\mathbf{r}, E, \Omega, t)$$

1) 这样定义的中子角通量是一标量，因而有的书中称  $\phi(\mathbf{r}, E, \Omega, t)$  为标量角通量，而定义  $\phi(\mathbf{r}, E, \Omega, t) = \mathbf{v} \cdot \mathbf{n}(\mathbf{r}, E, \Omega, t)$  为矢量角通量。

$$=vn(\mathbf{r}, E, \Omega, t). \quad (9-6)$$

这样,  $\phi(\mathbf{r}, E, \Omega, t)d\mathbf{r}dEd\Omega$  便等于(9-4)式所描述的中子在单位时间内所走过的径迹总长度。 $\phi(\mathbf{r}, E, \Omega, t)$ 也可以理解为在单位时间内, 穿过  $\mathbf{r}$  处垂直于  $\Omega$  的单位面积、能量等于  $E$  的单位能量间隔内且运动方向为  $\Omega$  的单位立体角内的中子数目(图9-3)。

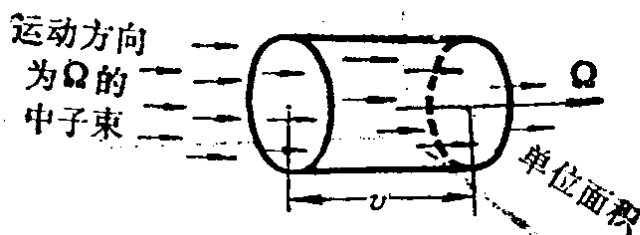


图 9-3 中子角通量示意图

同样地对应于(9-5)式可以定义与能量相关的中子通量  $\phi(\mathbf{r}, E, t)$  为

$$\begin{aligned} \phi(\mathbf{r}, E, t) &= vn(\mathbf{r}, E, t) \\ &= \int_{4\pi} \phi(\mathbf{r}, E, \Omega, t) d\Omega. \end{aligned} \quad (9-7)$$

因而中子通量  $\phi(\mathbf{r}, E, t)$  可以看作是  $\mathbf{r}$  处所有不同的  $\Omega$  方向的无限多个微分中子束  $\phi(\mathbf{r}, E, \Omega, t)$  的强度的总和。有时我们把与  $\Omega$  无关的  $n(\mathbf{r}, E, t)$  和  $\phi(\mathbf{r}, E, t)$  分别叫做中子总密度和中子总通量, 它们就是第一章中所定义的中子密度和中子通量。

## 1.2 中子流密度

在第二章中我们已经引进了中子流密度的定义。这里则设法把它和中子角密度和角通量联系起来。考虑在  $\mathbf{r}$  点处的小面积元  $dS$ , 设其单位法线矢量为  $\mathbf{n}$ , 如图 9-4 所示。运动着的中子从各个方向连续不断地穿过  $dS$ 。现在暂时只考虑稳态情况下能量等于  $E$  的那一部分中子; 显然, 单位时间内穿过  $dS$  的, 运动方向为  $\Omega$  的中子数目等于  $n(\mathbf{r}, E, \Omega)v|\Omega \cdot \mathbf{n}|dS$ 。我们规定  $\mathbf{n}$  的正方向一边为“+”侧, 另一边为“-”侧, 同时假定每秒自“-”侧



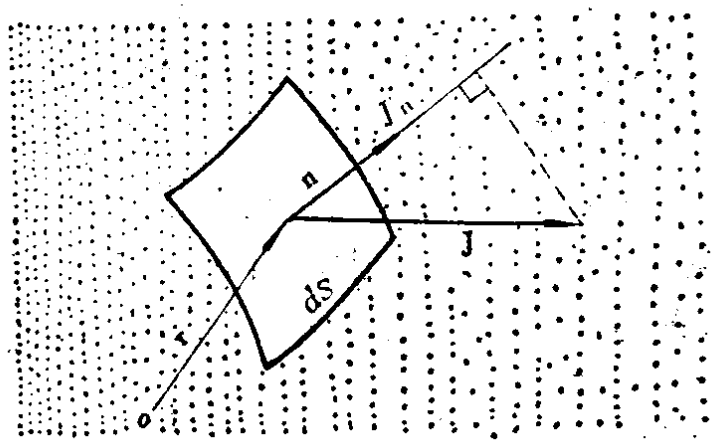


图 9-4 中子流密度  $\mathbf{J}$

沿各个方向穿过  $dS$  流向“+”侧的中子总数为  $J_n^+ dS$ , 反之为  $J_n^- dS$ , 那么有

$$\begin{aligned}
 J_n^+ dS &= dS \int_{(\Omega \cdot \mathbf{n}) > 0} |\Omega \cdot \mathbf{n}| n(\mathbf{r}, E, \Omega) v d\Omega \\
 &= dS \int_{(\Omega \cdot \mathbf{n}) > 0} |\Omega \cdot \mathbf{n}| \phi(\mathbf{r}, E, \Omega) d\Omega, \quad (9-8)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 J_n^- dS &= dS \int_{(\Omega \cdot \mathbf{n}) < 0} |\Omega \cdot \mathbf{n}| n(\mathbf{r}, E, \Omega) v d\Omega \\
 &= dS \int_{(\Omega \cdot \mathbf{n}) < 0} |\Omega \cdot \mathbf{n}| \phi(\mathbf{r}, E, \Omega) d\Omega, \quad (9-9)
 \end{aligned}$$

式中积分域  $(\Omega \cdot \mathbf{n}) > 0$  (或  $< 0$ ) 表示只对  $(\Omega \cdot \mathbf{n}) > 0$  (或  $< 0$ ) 的那些  $\Omega$  (即半个球) 进行积分。  $J_n^+$  和  $J_n^-$  分别叫做  $\mathbf{r}$  处沿  $\mathbf{n}$  的正和负的方向的分中子流密度。如果中子角通量是各向同性的, 那么  $J_n^+ = J_n^-$ , 也就是说每秒穿过  $dS$  的净中子数或净中子流等于零。在一般情况下,  $J_n^+ \neq J_n^-$ , 则每秒穿过  $dS$  的净中子数或净中子流  $J_n(\mathbf{r}, E) dS$  便等于

$$J_n(\mathbf{r}, E) dS = (J_n^+ - J_n^-) dS = dS \int_{4\pi} \Omega \cdot \mathbf{n} \phi(\mathbf{r}, E, \Omega) d\Omega.$$

上式可以改写成

$$J_n(\mathbf{r}, E) dS = dS \mathbf{n} \cdot \int_{4\pi} \Omega \phi(\mathbf{r}, E, \Omega) d\Omega = \mathbf{n} \cdot \mathbf{J}(\mathbf{r}, E) dS, \quad (9-10)$$

其中

$$\mathbf{J}(\mathbf{r}, E) = \int_{4\pi} \Omega \phi(\mathbf{r}, E, \Omega) d\Omega. \quad (9-11)$$

因而 
$$J_n(\mathbf{r}, E) = \mathbf{J}(\mathbf{r}, E) \cdot \mathbf{n}. \quad (9-12)$$

把(9-12)式和(2-10)式进行比较便知, 矢量 $\mathbf{J}(\mathbf{r}, E)$ 就是前面定义的中子流密度。它在 $\mathbf{n}$ 方向的投影(或分量) $J_n(\mathbf{r}, E)$ 就等于单位时间内穿过垂直于 $\mathbf{n}$ 的单位面积、单位能量间隔内的净中子数(净流量)。若 $J_n > 0$ , 则说明 $J_n^+ > J_n^-$ , 说明净中子流的方向与法线 $\mathbf{n}$ 的方向一致。反之若 $J_n < 0$ , 则说明净中子流的方向与 $\mathbf{n}$ 的方向相反。

由(9-10)式可以看到, 每秒穿过 $dS$ 的净中子流大小不仅和 $\phi(\mathbf{r}, E, \Omega)$ 的分布有关, 而且还和面积元 $dS$ 的法线 $\mathbf{n}$ 的方向有关。显然, 当 $\mathbf{n}$ 的方向恰巧与 $\mathbf{J}$ 的方向一致时, 净中子流的数值最大。这样, 净中子流密度的物理意义可以理解为:  $\mathbf{J}(\mathbf{r}, E)$ 是一个矢量, 它的大小等于每秒穿过 $\mathbf{r}$ 处的所有垂直于不同方向的单位面积元的净中子流数目中的最大值, 它的方向也就是该单位面积元的法线方向。

下面我们讨论中子输运方程的建立及其一般解法。

## 2. 中子输运方程

### 2.1 中子输运方程的建立

通常在反应堆内, 中子密度比介质的原子核密度要小得多。例如, 即使在 $\phi \sim 10^{16}$ 中子/(厘米<sup>2</sup>·秒)的热中子反应堆内, 中子密度也不超过约 $10^{11}$ 中子/厘米<sup>3</sup>的数量级, 而原子核的密度, 例如对于固体, 则约为 $10^{22}$ 核/厘米<sup>3</sup>的数量级。因而, 中子在介质内的运动主要是中子和介质原子核的碰撞结果, 而中子间的相互碰撞可以略去不计<sup>1)</sup>。由于中子运动及其与原子核的散射碰撞, 原来在某一位置具有某一能量和运动方向的中子, 经过一些时间将

---

1) 这样所得到的中子输运方程是线性的, 而在气体分子输运理论中, 气体分子之间的碰撞是主要的, 因而在气体输运方程中含有非线性的碰撞项。

在另一位置以另一能量和运动方向出现。我们说中子从一个位置、能量和方向输运(或迁移)到另一个位置、能量和方向上,这种过程叫做输运过程。研究中子输运过程的理论便叫做中子输运理论。

对单个中子来讲,它是以杂乱无章的折线轨迹在介质内进行随机的运动,直到它被吸收或从反应堆表面逸出为止:这是一个随机的过程。但是,在实际上,我们感兴趣的并不是个别中子的行径或所处的地点问题,而是在空间不同点处中子密度的宏观分布问题。因而它可以象气体分子动力学一样,用一种处理大量中子行径的宏观理论来推导出和气体分子输运方程相类似的中子输运方程,或称作玻尔兹曼输运方程。

下面就来推导这个方程。

研究中子输运过程所应用的一条基本原则,就是所谓中子数目守恒或中子平衡。在一定体积内,中子密度随时间的变化率应等于它的产生率减去泄漏率和移出率,亦即

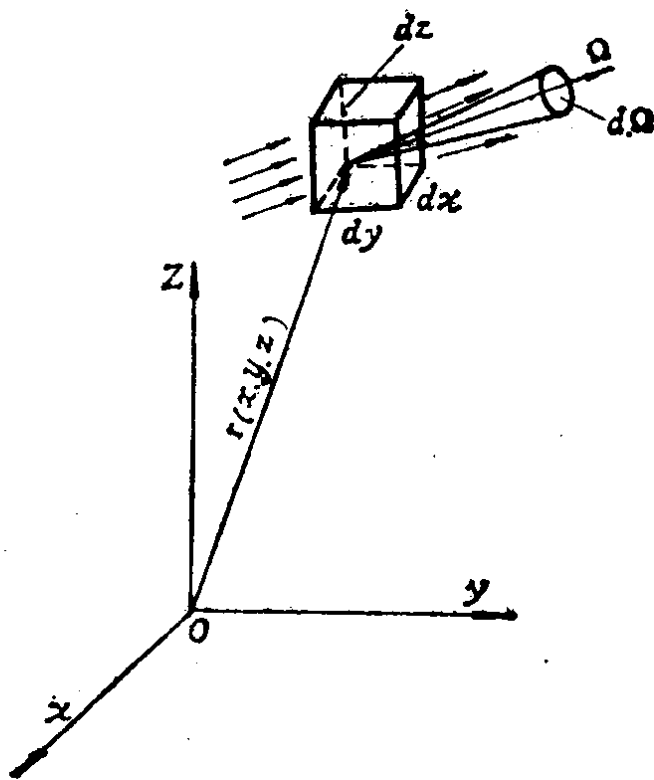


图 9-5 中子泄漏的计算

$$\frac{\partial n}{\partial t} = \text{产生率} - \text{泄漏率} - \text{移出率}, \quad (9-13)$$

这里  $\partial n/\partial t$  是中子密度随时间的变化率。当系统处于平衡状态(稳态)时, 它便等于零。

现在讨论在  $t$  时刻, 在相空间  $(r, E, \Omega)$  上的中子平衡。我们讨论在  $r$  处  $dr$  体积元内, 中子能量在  $E$  和  $E + dE$  之间且运动方向为  $\Omega$  附近的立体角元  $d\Omega$  内的中子数目的平衡问题(参阅图 9-5), 同时求出(9-13)式中各项的具体表达式。

(1) 泄漏率 在图 9-5 中, 设在  $r(x, y, z)$  点, 有一体积元  $dV$ , 它的边长为  $dx, dy$  和  $dz$ 。先考虑平行于  $xz$  平面, 而面积等于  $dx dz$  的两个面。根据前面(9-6)式中  $\phi(r, E, \Omega, t)$  的含义可知, 每秒在  $(x, y, z)$  处穿过  $dx dz$  面而进入体积元  $dV$  的, 能量在  $E$  到  $E + dE$  内而运动方向在  $\Omega$  附近  $d\Omega$  内的中子数便等于  $\phi(r, E, \Omega, t) dE d\Omega$  乘上  $dx dz$  面在  $\Omega$  方向上的投影  $\Omega_y dx dz$ , 即

$$\phi(x, y, z, E, \Omega, t) \Omega_y dx dz dE d\Omega,$$

其中  $\Omega_y = \Omega \cdot j$  为  $\Omega$  在  $y$  轴方向上的分量。同样, 每秒在  $(x, y + dy, z)$  处穿出  $dx dz$  平面而离开体积元的中子数目是

$$\phi(x, y + dy, z, E, \Omega, t) \Omega_y dx dz dE d\Omega.$$

假使  $dy$  取得足够小, 则近似有

$$\begin{aligned} \phi(x, y + dy, z, E, \Omega, t) &= \phi(x, y, z, E, \Omega, t) \\ &+ \frac{\partial}{\partial y} \phi(x, y, z, E, \Omega, t) dy. \end{aligned}$$

因此, 单位时间内沿  $y$  轴方向的  $dy dz$  两个面泄漏出体积元之净中子数为

$$\Omega_y \frac{\partial \phi}{\partial x} dx dy dz dE d\Omega.$$

这里为简明起见, 记  $\phi(r, E, \Omega, t)$  为  $\phi$ 。应用同样方法可以求出沿  $x, z$  二个方向泄漏出体积元的中子数分别为

$$\Omega_x \frac{\partial \phi}{\partial x} dV dE d\Omega \quad \text{和} \quad \Omega_z \frac{\partial \phi}{\partial z} dV dE d\Omega.$$

于是在单位时间内, 上述中子穿过所有表面泄漏出体积元的净中

子数为

$$L = \left( \Omega_x \frac{\partial \phi}{\partial x} + \Omega_y \frac{\partial \phi}{\partial y} + \Omega_z \frac{\partial \phi}{\partial z} \right) dV dE d\Omega$$

$$= \boldsymbol{\Omega} \cdot \text{grad } \phi dV dE d\Omega, \quad (9-14)$$

其中

$$\text{grad } \phi = \frac{\partial \phi}{\partial x} \mathbf{i} + \frac{\partial \phi}{\partial y} \mathbf{j} + \frac{\partial \phi}{\partial z} \mathbf{k} \quad (9-15)$$

为标性函数  $\phi$  的梯度。在工程计算中经常用算符  $\nabla$  来表示，

$$\nabla = \mathbf{i} \frac{\partial}{\partial x} + \mathbf{j} \frac{\partial}{\partial y} + \mathbf{k} \frac{\partial}{\partial z}, \quad (9-16)$$

$\nabla \phi = \text{grad } \phi$ ，算符  $\nabla$  在形式上可以理解为一个矢量。这样有

$$L = \boldsymbol{\Omega} \cdot \nabla \phi dV dE d\Omega \quad (9-17)$$

(2) 移出率 每单位时间移出相空间基元  $dV dE d\Omega$  而损失掉的中子数目是由两个原因造成的：(i) 中子在  $dV$  内被吸收；(ii) 中子在  $dV$  内与原子核发生散射，使中子的能量  $E$  或运动方向  $\boldsymbol{\Omega}$  发生变化而从相空间基元中损失掉。因而单位时间移出基元  $dV dE d\Omega$  的中子数为

$$R = (\Sigma_s + \Sigma_a) \phi(\mathbf{r}, E, \boldsymbol{\Omega}, t) dV dE d\Omega$$

$$= \Sigma_t \phi dV dE d\Omega \quad (9-18)$$

这里  $\Sigma_s$ 、 $\Sigma_a$  和  $\Sigma_t$  在一般情况下是  $(\mathbf{r}, E)$  的函数，为简单起见，在一些场合常把宗标  $(\mathbf{r}, E)$  略去。

(3) 产生率 在基元  $dV dE d\Omega$  内中子的产生有二个来源：第一来源是，在  $dV$  体积内原来能量为  $E'$ ，运动方向为  $\boldsymbol{\Omega}'$  的中子经过散射而能量变成为  $E$  且运动方向变为  $\boldsymbol{\Omega}$  的中子。根据第三章第 1 节中关于散射函数的定义可知，单位时间内在  $dV$  体积元原来能量为  $E'$  至  $E' + dE'$ 、运动方向为  $\boldsymbol{\Omega}'$  的  $d\Omega'$  立体角元内的中子经过弹性和非弹性散射，其能量变为  $E$ 、运动方向为  $\boldsymbol{\Omega}$  的中子数为<sup>1)</sup>

<sup>1)</sup>这里为简单起见只考虑弹性散射，若考虑非弹性散射，需把(9-19)式中加上  $\Sigma_{in} f_{in}(\mathbf{r}, E' \rightarrow E, n' \rightarrow n)$  项  $f_{in}$  为非弹性散射函数。

$$[\Sigma_s(\mathbf{r}, E')f_s(\mathbf{r}; E' \rightarrow E, \Omega' \rightarrow \Omega)]\phi(\mathbf{r}, E', \Omega', t)dVdE'd\Omega' \quad (9-19)$$

这里  $f_s$  是弹性散射函数；将(9-19)式对所有  $E'$  和  $\Omega'$  积分之，则便可求得在  $dV$  内单位时间由各种不同能量和运动方向散射到  $dEd\Omega$  基元内的中子总数为

$$I = dVdEd\Omega \int_0^\infty dE' \int_{\Omega'} \Sigma_s(\mathbf{r}, E')f(\mathbf{r}; E' \rightarrow E, \Omega' \rightarrow \Omega)\phi(\mathbf{r}, E', \Omega')d\Omega' \quad (9-20)$$

产生率的第二来源则是由于  $dV$  内的中子源所产生的贡献。对反应堆来讲，由于核裂变反应所产生的中子是最主要的中子源。设  $\nu(E')$  为能量等于  $E'$  的中子每次裂变后所产生的平均中子数，于是在  $dV$  内单位时间所产生的裂变中子总数为

$$\int_0^\infty dE' \int_{\Omega'} \nu(E')\Sigma_f(\mathbf{r}, E')\phi(\mathbf{r}, E', \Omega', t)d\Omega'dV \quad (9-21)$$

若假定裂变中子为各向同性的， $\chi(E)$  为其能谱分布，同时假设除裂变中子之外的独立中子源<sup>1)</sup>的源强为  $S(\mathbf{r}, E, \Omega, t)$ ，那末，单位时间在空间  $\mathbf{r}$  处由于中子源所产生的能量为  $E$ ，运动方向为  $\Omega$  的中子数为

$$S(\mathbf{r}, E, \Omega, t)dVdEd\Omega = dVdEd\Omega \left[ \frac{\chi(E)}{4\pi} \int_0^\infty dE' \int_{\Omega'} \nu(E')\Sigma_f(\mathbf{r}, E') \times \phi(\mathbf{r}, E', \Omega', t)d\Omega' + s(\mathbf{r}, E, \Omega, t) \right] \quad (9-22)$$

这样，中子的产生率便等于

$$Q = Q(\mathbf{r}, E, \Omega, t)dVdEd\Omega = \left[ \int_0^\infty dE' \int_{\Omega'} \Sigma_s(\mathbf{r}, E') f(\mathbf{r}; E' \rightarrow E, \Omega' \rightarrow \Omega)\phi(\mathbf{r}, E', \Omega', t)d\Omega' + S(\mathbf{r}, E, \Omega, t) \right] dVdEd\Omega \quad (9-23)$$

1) 此处独立中子源一词指不依赖于系统内中子密度而独立存在且强度也与系统无关的源，例如自发裂变源、天然放射性源以及其他中子源。

最后，中子密度随时间的变化率为

$$\frac{\partial}{\partial t} n(\mathbf{r}, E, \boldsymbol{\Omega}, t) = \frac{1}{v} \frac{\partial}{\partial t} \phi(\mathbf{r}, E, \boldsymbol{\Omega}, t). \quad (9-24)$$

将(9-17)到(9-24)式的各种结果代入文字表达式(9-13)内并消去  $dV dE d\boldsymbol{\Omega}$  便得到任一时刻  $t$  在相空间  $(\mathbf{r}, E, \boldsymbol{\Omega})$  上的中子平衡方程

$$\begin{aligned} \frac{1}{v} \frac{\partial \phi}{\partial t} + \boldsymbol{\Omega} \cdot \nabla \phi + \Sigma_t(\mathbf{r}, E) \phi = \int_0^\infty \int_{\Omega'} \Sigma_s(\mathbf{r}, E') f(\mathbf{r}, E' \rightarrow \\ E, \boldsymbol{\Omega}' \rightarrow \boldsymbol{\Omega}) \phi(\mathbf{r}, E', \boldsymbol{\Omega}', t) dE' d\boldsymbol{\Omega}' + S(\mathbf{r}, E, \boldsymbol{\Omega}, t), \end{aligned} \quad (9-25)$$

式中  $\phi = \phi(\mathbf{r}, E, \boldsymbol{\Omega}, t)$ 。这便是非稳态情况下的中子输运方程或玻尔兹曼方程，它构成了反应堆物理分析及中子输运理论的基础。

稳态时， $\partial n / \partial t = 0$ ，便得到稳态中子输运方程。在反应堆计算中还经常应用无量纲的勒( $u$ )作为能量变量。中子通量  $\phi(\mathbf{r}, u, \boldsymbol{\Omega})$  和  $\phi(\mathbf{r}, E, \boldsymbol{\Omega})$  的关系是

$$\phi(\mathbf{r}, u, \boldsymbol{\Omega}) du = -\phi(\mathbf{r}, E, \boldsymbol{\Omega}) dE,$$

右端取负号的原因是因为勒的增加相当于  $E$  的减少。根据(3-27)式有  $du = -dE/E$ ，因而

$$\phi(\mathbf{r}, u, \boldsymbol{\Omega}) = E \phi(\mathbf{r}, E, \boldsymbol{\Omega}). \quad (9-26)$$

这样，在(9-25)式中把自变量  $E$  替换为  $u$ ，则稳态时输运方程便写成

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\Omega} \cdot \nabla \phi(\mathbf{r}, u, \boldsymbol{\Omega}) + \Sigma_t(\mathbf{r}, u) \phi(\mathbf{r}, u, \boldsymbol{\Omega}) \\ = \int_0^\infty du' \int_{\Omega'} \Sigma_s(\mathbf{r}, u') f(\mathbf{r}, u' \rightarrow u, \boldsymbol{\Omega}' \rightarrow \boldsymbol{\Omega}) \phi(\mathbf{r}, u', \boldsymbol{\Omega}') d\boldsymbol{\Omega}' \\ + S(\mathbf{r}, u, \boldsymbol{\Omega}). \end{aligned} \quad (9-27)$$

若考虑简单情况，即中子具有相同的能量，则上述方程中的自变量  $E$  或  $u$  可以消去。于是单速(能)中子输运方程便写成：

$$\Omega \cdot \nabla \phi(\mathbf{r}, \Omega) + \Sigma_t(\mathbf{r}) \phi(\mathbf{r}, \Omega) = \int_{\Omega'} \Sigma_s(\mathbf{r}) f(\mathbf{r}, \Omega' \rightarrow \Omega) \phi(\mathbf{r}, \Omega') d\Omega' + S(\mathbf{r}, \Omega) \quad (9-28)$$

由此可见，中子输运方程是一个线性的微分-积分方程，在一般情况下稳态时它包含有  $r(x, y, z)$ ， $E$  和  $\Omega(\theta, \varphi)$  六个自变量。这样方程的求解在数学上是很困难的。即使应用电子计算机数值求解也仍然是非常复杂和困难的事情，并且并不是对所有复杂问题都能求出其解的。因而，反应堆物理分析的主要任务也就在于建立一些简单的近似模型和分析方法，并把它应用于反应堆的一些具体问题求解。

## 2.2 边界条件

中子输运方程是一个微分-积分方程。从方程的导出过程可以看出，它只是表示中子数目守恒规律的数学形式，即中子密度分布函数所应该满足的方程。它并不给出某一特定物理问题状态的完整的描述。因为具有相同参数  $\Sigma_t$ 、 $\Sigma_s$  和散射函数（亦即材料成分相同）的反应堆，不管它的起始状态如何，不管它的形状以及所处的外界条件如何，它们的中子输运方程的形式都是相同的，也就是说都满足相同的方程。对于不同问题的描述，主要区别在于初始或边界条件的不同。从数学上来说，由于在方程的普遍解中包含有任意的积分常数，为了确定这些与具体物理问题相应的常数的值，就要对普遍解加上某些限制条件，这就是根据问题的物理性质所规定的边界条件和初始条件。这些定解条件的数目要给定恰好能保证给出问题的唯一解。

解中子输运方程时常遇到的边界条件为：

(1) 在方程所适用的区域内，中子通量必须为有限值，并且不能为负值。

(2) 对于两种不同介质的分界面，假如两介质直接接触，其间没有其他物质插入，那末根据连续性条件，在分界面上应该满足  $\phi(\mathbf{r}, E, \Omega)$  在交界面上沿所有  $\Omega$  方向是  $\mathbf{r}$  的连续函数 (9-29)



然而，如果在分界面上插入第三种介质，那末，就必须考虑中子穿过这层介质的效应，这时边界条件(9-29)式就要加以修正(图9-6)。

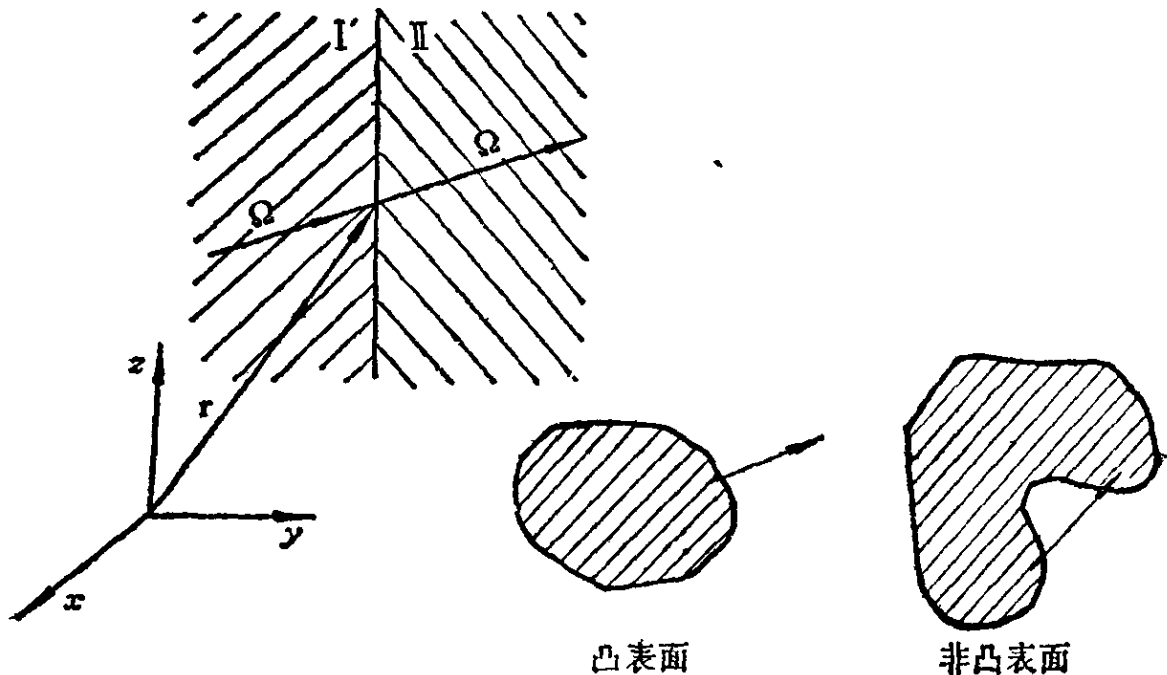


图 9-6 两种介质分界面

图 9-7 凸表面和非凸表面示意图

(3) 自由表面 在中子输运理论中，自由表面一词用来指没有外界中子进入物体内的那种表面或那一部分表面。假定中子输运过程所发生的区域是由凸的(非自交表面)且分块光滑的曲面 $\Gamma$ 所围成。凸的表面的意思是：从表面向外引出的任一根直线都不会再与这一表面相交(参看图9-7)，因而这种表面就是自由表面，因为中子自表面逸出后就不可能再返回到域内来。反之，对于非凸表面，则可以接收到由另一部分表面所放出的中子，就不再认为是自由表面。这样，对自由表面的边界条件可以写成

$$\phi(r, E, \Omega) = 0, \quad r \in \Gamma \text{ 若 } \mathbf{n} \cdot \Omega < 0 \quad (9-30)$$

式中 $\mathbf{n}$ 为边界 $\Gamma$ 上 $r$ 点的单位外法线矢量。

在研究非稳态情况时，除了给出边界条件外，还必须给出问题的初始条件，例如 $t=0$ 时刻的中子角通量分布 $\phi(r, E, \Omega, 0)$ 。