全国硕士研究生入学考试

M
Mathematics

数学二 数学四

考研精解

朱乃谦 罗亮生 欧阳梓祥 编

2001

科学出版社

全国硕士研究生入学考试

数学三数学四考研精解

朱乃谦　罗亮生　欧阳梓祥　编

科学出版社

2000

内 容 简 介

本书包括微积分、线性代数、概率论与数理统计三大部分，共19章，每章均分为四个部分：第一部分是基本要求，根据考试大纲的要求总结归纳出一些条款，以利于读者全面理解大纲的精神；第二部分是内容提要，是各章的要领和主要结论；第三部分是例题，是本书的重要部分，本书例题力求具有代表性，既注意了例题类型的多样性，又注意了例题对知识的覆盖面和难易层次；第四部分是练习，章末附有答案和提示，便于读者检查学习情况. 书末附有近三年的试卷.

本书可作为考研应试者的指导书，也可作为经济类、管理类及社会学类相关专业本科生的数学考书.

图书在版编目(CIP)数据

数学三数学四考研精解/朱乃谦等编. -北京：科学出版社，2000.5
ISBN 7-03-007568-4

Ⅰ.数… Ⅱ.朱… Ⅲ.高等数学-研究生教育-入学考试-自学参考资料
Ⅳ.O13

中国版本图书馆 CIP 数据核字(1999)第 27505 号

科学出版社 出版
北京东黄城根北街16号
邮政编码：100717

北京双青印刷厂 印刷

科学出版社发行 各地新华书店经销

*

2000年6月第一版 开本：787×1092 1/16
2000年6月第一次印刷 印张：28
印数：1—3 000 字数：655 000

定价：42.00 元

(如有印装质量问题，我社负责调换<环伟>)

前　　言

随着国民经济的迅速发展，国家科教兴国战略的日益深入人心，近几年来报考研究生人数逐年增加．同时，随着教育部对硕士研究生数学素质的要求越来越明确，近几年考研数学试题日趋规范化，试题质量在稳步提高，新颖的、重在考察广大考生能力和基本功的试题不断涌现．编者在考研数学辅导班上，经常听到应试者反映，希望能有一本按照教育部颁发的“考试大纲”编写的，既系统又简练，重点突出，针对性强的辅导资料，以便他们在较短的时间内，高效率地掌握“考试大纲”要求，把握最新考试题型动态，强化应试能力．

编者希望通过本书，引导广大考生在全面复习过程中，比较系统地理解考试大纲所规定的基本概念和基本理论，重视基本训练，掌握基本方法．同时，本书精选了由易到难，内容广泛，技巧性、综合性较强的一些典型例题和近年来的优秀试题，并做了详尽、透彻的剖析和演绎．希望能启发广大考生，熟悉各种题型，掌握解题技巧，改善思维方式，注意培养分析问题的能力；希望能引导广大考生融会贯通所学知识，提高逻辑推理能力、运算能力和综合运用知识分析、解决问题的能力．从而提高考生应试能力．

本书包括微积分、线性代数、概率论与数理统计三大部分，共19章．每章由基本要求、内容提要、例题分析、练习（包括答案与提示）几部分组成，书末选录了近三年经济类硕士研究生（数学三、数学四）入学考试试卷．在本书每一章的“基本要求”中，对有关概念、理论方面要求较高的用“理解”一词表述，要求较低的用“了解”一词表述；有关方法、运算方面的，要求较高的用“掌握”一词，要求较低的用“会”或“了解”来表述．本书中打“*”号的章节只适用于数学三的考生，对数学四的考生不做要求．在“基本要求”中，凡只要求数学三考生的内容语句，用方括号注明．

我们希望本书既能作为考研应试者的必备书，也可做经济类、管理类以及社会学类相关专业本科生数学教学的参考书．

本书微积分部分由罗亮生、朱乃谦编写，线性代数部分由欧阳梓祥编写，概率论与数理统计部分由朱乃谦编写．限于水平和时间的关系，书中不当或错误之处在所难免，恳请广大读者不吝赐教．

编　者

1999.4

目　　录

第一章　函数、极限与连续 …… 1
　基本要求 …… 1
　内容提要 …… 1
　例题 …… 8
　练习 1 …… 15
　答案与提示 …… 17
第二章　一元函数微分学 …… 18
　基本要求 …… 18
　内容提要 …… 18
　例题 …… 27
　练习 2 …… 43
　答案与提示 …… 46
第三章　一元函数积分学 …… 48
　基本要求 …… 48
　内容提要 …… 48
　例题 …… 58
　练习 3 …… 75
　答案与提示 …… 79
第四章　多元函数微积分学 …… 81
　基本要求 …… 81
　内容提要 …… 81
　例题 …… 89
　练习 4 …… 115
　答案与提示 …… 117
*第五章　无穷级数 …… 120
　基本要求 …… 120
　内容提要 …… 120
　例题 …… 125
　练习 5 …… 144
　答案与提示 …… 146
*第六章　常微分方程与差分方程 …… 148
　基本要求 …… 148
　内容提要 …… 148
　例题 …… 155

练习 6 …… 165
答案与提示 …… 167
第七章　行列式 …… 170
基本要求 …… 170
内容提要 …… 170
例题 …… 172
练习 7 …… 182
答案与提示 …… 185
第八章　矩阵 …… 186
基本要求 …… 186
内容提要 …… 186
例题 …… 193
练习 8 …… 203
答案与提示 …… 205
第九章　向量 …… 206
基本要求 …… 206
内容提要 …… 206
例题 …… 208
练习 9 …… 214
答案与提示 …… 214
第十章　线性方程组 …… 216
基本要求 …… 216
内容提要 …… 216
例题 …… 219
练习 10 …… 231
答案与提示 …… 234
第十一章　矩阵的特征值和特征向量 …… 236
基本要求 …… 236
内容提要 …… 236
例题 …… 237
练习 11 …… 242
答案与提示 …… 244
***第十二章　二次型** …… 245
基本要求 …… 245
内容提要 …… 245
例题 …… 249
练习 12 …… 257
答案与提示 …… 258
第十三章　随机事件和概率 …… 260

基本要求……………………………………………………………………… 260
内容提要……………………………………………………………………… 260
例题…………………………………………………………………………… 264
练习 13 ……………………………………………………………………… 279
答案与提示…………………………………………………………………… 281
第十四章　随机变量及其概率分布……………………………………… 290
基本要求……………………………………………………………………… 290
内容提要……………………………………………………………………… 290
例题…………………………………………………………………………… 301
练习 14 ……………………………………………………………………… 318
答案与提示…………………………………………………………………… 321
第十五章　随机变量的数字特征………………………………………… 328
基本要求……………………………………………………………………… 328
内容提要……………………………………………………………………… 328
例题…………………………………………………………………………… 331
练习 15 ……………………………………………………………………… 344
答案与提示…………………………………………………………………… 346
第十六章　大数定律和中心极限定理…………………………………… 350
基本要求……………………………………………………………………… 350
内容提要……………………………………………………………………… 350
例题…………………………………………………………………………… 353
练习 16 ……………………………………………………………………… 361
答案与提示…………………………………………………………………… 362
* **第十七章　数理统计的基本概念**………………………………………… 365
基本要求……………………………………………………………………… 365
内容提要……………………………………………………………………… 365
例题…………………………………………………………………………… 369
练习 17 ……………………………………………………………………… 375
答案与提示…………………………………………………………………… 376
* **第十八章　参数估计**……………………………………………………… 377
基本要求……………………………………………………………………… 377
内容提要……………………………………………………………………… 377
例题…………………………………………………………………………… 382
练习 18 ……………………………………………………………………… 392
答案与提示…………………………………………………………………… 393
* **第十九章　参数的假设检验**……………………………………………… 395
基本要求……………………………………………………………………… 395
内容提要……………………………………………………………………… 395
例题…………………………………………………………………………… 398

练习 19 …… 403
答案与提示…… 403
附录　全国硕士研究生入学考试试卷 …… 404
1997 年数学三试卷 …… 404
1998 年数学三试卷 …… 406
1999 年数学三试卷 …… 408
1997 年数学四试卷 …… 410
1998 年数学四试卷 …… 412
1999 年数学四试卷 …… 414
1997 年数学三试卷解答提示 …… 415
1998 年数学三试卷解答提示 …… 417
1999 年数学三试卷解答提示 …… 418
1997 年数学四试卷解答提示 …… 419
1998 年数学四试卷解答提示 …… 420
1999 年数学四试卷解答提示 …… 421
2000 年数学三试题参考解答及评分标准 …… 423
2000 年数学四试题参考解答及评分标准 …… 432

第一章　函数、极限与连续

基本要求

1．理解函数的概念，掌握函数的表示法．了解函数的有界性、单调性、周期性和奇偶性．理解复合函数、反函数、隐函数和分段函数的概念，掌握基本初等函数的性质及其图像，理解初等函数的概念．

2．会建立简单应用问题中的函数关系式．

3．了解数列极限和函数极限(包括左、右极限)的概念．了解无穷小的概念和基本性质，掌握无穷小的阶的比较方法．了解无穷大的概念及其与无穷小的关系．

4．了解极限的性质与极限存在的两个准则，掌握极限的四则运算法则，会应用两个重要极限．

5．理解函数连续性的概念(含左连续与右连续)．了解连续函数的性质和初等函数的连续性．了解闭区间上连续函数的性质(有界性、最大值与最小值定理、介值定理)及其简单应用．

内容提要

§1　函　　数

1．函数的定义

定义　设 X 是给定的一个数集，f 是某一确定的对应关系．若对于 X 中的每一个 x，依照 f，都有唯一的一个(实数)y 与之对应，则称变量 y 为变量 x 在 X 上的一元函数，简称函数，记为 $y=f(x)$，$x\in X$．其中，x 称为自变量，y 称为因变量，x 的变化范围称为定义域，y 的变化范围称为函数的值域．

注　① 要决定一个函数，必须确定定义域 X 和对应关系 f；

② 由函数表达式求定义域，从如下方面着手：(a) 分母不为 0；(b) 偶次根式里的式子 $\geqslant 0$；(c) 对数式的真式 >0；(d) $\arcsin x$、$\arccos x$ 中，$|x|\leqslant 1$；(e) 若函数表达式由 n 项构成，则定义域是各项定义域的交集；(f) 分段函数的定义域是各段定义域的并集．

2．函数的图像

函数 $y=f(x)$，$x\in X$ 的图像是指点集 $\{(x,y)\mid y=f(x),x\in X\}$．在给定的平面直角坐标系中，$y=f(x)$ 是一条曲线．

3．函数的若干常用特性

1）有界性

$\forall x \in X$，若$\exists M>0$，使得$|f(x)| \leqslant M$，则称$f(x)$在X上有界．

2）奇偶性

设$y=f(x)$，$x \in X$，X关于原点对称．若$\forall x \in X$，有$f(-x)=-f(x)$，则称$y=f(x)$为X上的奇函数；若$\forall x \in X$，有$f(-x)=f(x)$，则称$y=f(x)$为X上的偶函数．

注 奇函数的图像对称于原点，偶函数的图像对称于y轴．

3）单调性

若$\forall x_1, x_2 \in X$，当$x_1<x_2$时，有

$$f(x_1) \leqslant f(x_2) \qquad (\text{或 } f(x_1) \geqslant f(x_2)),$$

则称$f(x)$在X上单调递增（或单调递减）；若$\forall x_1, x_2 \in X$当$x_1<x_2$时，有

$$f(x_1) < f(x_2) \qquad (\text{或 } f(x_1) > f(x_2)),$$

则称$f(x)$在X上严格单调递增（或严格单调递减）．

注 递增也称上升，递减也称下降．

4）周期性

若$\exists$常数$T>0$，使得$\forall x \in X$，都有$x+T \in X$，并且$f(x+T)=f(x)$，则称$f(x)$是以T为周期的周期函数．

注 ① 任何周期函数都有无穷多个周期；若其中有一个最小的正数，则称之为最小正周期，也称周期；“周期”通常指最小正周期，但周期函数未必都有最小正周期；

② 判断$f(x)$是不是周期函数，一般从定义出发，解方程$f(x+T)=f(x)$，若解出了与x无关的$T(>0)$，则该函数为周期函数，且周期是T，若不存在这样的T，$f(x)$就不是周期函数．

4．复合函数

设函数$y=f(u)$，$u \in U$；$u=\varphi(x)$，$x \in X$，值域为U'，若$U' \subseteq U$，则

$$y=f(\varphi(x)), \qquad x \in X$$

称为$y=f(u)$与$u=\varphi(x)$的复合函数，u称为中间变量．

5．反函数

设$y=f(x)$，$x \in X$，其值域为Y，若$\forall y \in Y$，有唯一的$x \in X$，使得$y=f(x)$，则得到一个定义在Y上以y为自变量的函数

$$x=\varphi(y), \qquad y \in Y,$$

这个函数称为$y=f(x)$的反函数．

注 ① 反函数$x=\varphi(y)$也记作$x=f^{-1}(y)$，这里f^{-1}是对应法则φ，而非$\frac{1}{f}$；

② $y=f(x)$，$x \in X$与其反函数$x=\varphi(y)$，$y \in Y$图像完全相同；

③ 若将$x=\varphi(y)$（或$x=f^{-1}(y)$）改写为$y=\varphi(x)$（或$y=f^{-1}(x)$），$x \in Y$，则

图像与原函数图像恰好关于直线 $y=x$ 对称.

6．初等函数

1）基本初等函数

常数函数　　$y=c$（c 为任意实常数）；

幂函数　　　$y=x^{\mu}$（μ 为常数）；

自然指数函数　$y=e^{x}$；

自然对数函数　$y=\ln x$；

正弦函数　　$y=\sin x$；

反正弦函数　$y=\arcsin x$.

2）初等函数

由基本初等函数经过有限次加减乘除四则运算以及有限次复合而得到的一类函数，称为初等函数.

§2　极　　限

1．数列极限的定义

定义1　设$\{x_n\}$为一数列，a 为常数. 若$\forall \varepsilon>0$，$\exists N$，当 $n>N$ 时，恒有

$$|x_n-a|<\varepsilon,$$

则称当 n 趋于无穷时，$\{x_n\}$以 a 为极限，记为

$$\lim_{n\to\infty}x_n=a \quad 或 \quad x_n\to a(n\to\infty),$$

并称数列$\{x_n\}$收敛. 若$\{x_n\}$不以任何实数为极限，则称其发散.

注　①“$n\to\infty$”称为极限过程；

②一般来说，N 依赖于 ε 的变化而变化；

③正数 ε 必须是任意的；

④对某一 ε，不一定要找出最小的 N，大于这个 N 的数，均可代替这个 N；

⑤数列中增减有限项不影响敛散性；若收敛，不影响极限值.

定义 2　设$\{x_n\}$为一数列，若$\forall M>0$，$\exists N$，当 $n>N$ 时，恒有

$$x_n>M \quad （或\ x_n<-M），$$

则称当 n 趋于无穷时，$\{x_n\}$以$+\infty$（或$-\infty$）为极限，也称$\{x_n\}$发散于$+\infty$（或$-\infty$），记为 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=+\infty$（或$\lim\limits_{x\to\infty}x_n=-\infty$），也记为 $x_n\to+\infty$（或 $x_n\to-\infty$）.

定理 1　收敛数列的极限是唯一的.

2．函数极限的定义

定义 3　设 $f(x)$在 a 点的某个去心邻域有定义，A 为常数. 若$\forall \varepsilon>0$，$\exists \delta>0$，当$0<|x-a|<\delta$ 时，恒有

$$|f(x)-A|<\varepsilon,$$

则称当 $x\to a$ 时，$f(x)$以 A 为极限. 记为

$$\lim_{x\to a}f(x)=A \quad 或 \quad f(x)\to A \qquad (x\to a).$$

注 ① $f(x)$在 a 点有无定义均可；

② “$x\to a$”称为极限过程；

③ 一般说来，δ 与 ε 有关；

④ 正数 ε 必须是任意的.

定义 4 设 $f(x)$在 a 点的右(或左)邻域有定义，A 为常数. 若 $\forall\varepsilon>0$, $\exists\delta>0$，当 $0<x-a<\delta$(或 $0<a-x<\delta$)时，恒有

$$|f(x)-A|<\varepsilon,$$

则称 $x\to a^+$(或 a^-)时，$f(x)$以 A 为右(或左)极限，记为

$$f(a^+)=\lim_{x\to a^+}f(x)=A \qquad (或\ f(a^-)=\lim_{x\to a^-}f(x)=A).$$

注 ① 左、右极限统称为单侧极限；

② 定义 1 的注对定义 2 均适用.

定义 5 设 $f(x)$在 x(或 $-x$ 或$|x|$)充分大时有定义，A 为常数，若 $\forall\varepsilon>0$, $\exists M>0$，当 $x>M$(或 $-x>M$ 或 $|x|>M$)时，恒有

$$|f(x)-A|<\varepsilon,$$

则称当 x 趋于正无穷(或负无穷或无穷)时，$f(x)$以 A 为极限，记为

$$\lim_{x\to+\infty}f(x)=A \qquad (或\lim_{x\to-\infty}f(x)=A \qquad 或\lim_{x\to\infty}f(x)=A).$$

注 ① $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=A$ 也可记为$f(x)\to A(x\to+\infty)$；$\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=A$ 也可记为 $f(x)\to A(x\to-\infty)$；$\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=A$ 也可记为$f(x)\to A(x\to\infty)$；

② “$x\to+\infty$”等称为极限过程；

③ ε 是任意的；

④ 一般说来，M 与 ε 有关.

定理 2 当 $x\to a$(或 $\pm\infty$)时，若 $f(x)$存在有限极限，则极限必唯一.

3. 无穷小量与无穷大量

1) 无穷小量的定义

设有变量 u，若在某一极限过程中，以 0 为极限，则称该变量为无穷小量.

注 ① “变量 u”可以是数列$\{x_n\}$，也可以是函数 $f(x)$；

② 定义中所说的“极限过程”，对于数列$\{x_n\}$，指的是 $n\to\infty$等，对于函数 $f(x)$，指的是 $x\to a$，$x\to+\infty$等；

③ 无穷小量也可称为无穷小.

2) 无穷大量的定义

设有变量 u，若在某极限过程中，$\dfrac{1}{u}$是无穷小，则称该变量为无穷大量. 无穷大量的极限为$\pm\infty$或∞.

注 ① “变量 u”及“极限过程”含义同上；

② 无穷大量不能称为无穷大；前者是变量，后者仅是一个符号(∞, $\pm\infty$).

3) 无穷小量的阶的比较

设 α,β 是同一极限过程中的两个无穷小量：

(1) 若$\lim\frac{\alpha}{\beta^k}=c\neq0$($k$ 为正常数,c 为常数),则称 α 为 β 的 k 阶(或 k 级)无穷小量;当 $k=1$ 时,称 α 与 β 为同阶无穷小;当 $k=c=1$ 时,称 α 与 β 是等价无穷小量,记作 $\alpha\sim\beta$;

(2) 若 $\lim\frac{\alpha}{\beta}=0$,则称 α 是比 β 更高阶的无穷小量,记为 $\alpha=o(\beta)$;

(3) 选 β 为基准无穷小,若 $\alpha\sim c\beta^k$,c 为非零常数,k 为大于零的常数,则称 $c\beta^k$ 为无穷小 α 的主部.

4) 无穷大量的阶的比较

设 u,v 是同一极限过程中的两个无穷大量：

(1) 若 $\lim\frac{u}{v}=c$(c 为非零常数),则称 u,v 是同阶无穷大量;

(2) 若 $\lim\frac{u}{v}=\infty$,则称 u 为 v 的高阶无穷大量,或称 v 为 u 的低阶无穷大量.

4．定理

定理 3 $\lim\limits_{x\to a}f(x)=A\Leftrightarrow f(a^+)=f(a^-)=A.$

类似地,

$$\lim_{x\to\infty}f(x)=A\Leftrightarrow\lim_{x\to+\infty}f(x)=\lim_{x\to-\infty}f(x)=A.$$

注 “$\Leftrightarrow$”表示充分必要条件.

定理 4 设变量 u(数列或函数)在某极限过程中以常数 A 为极限,则

$$\lim u=A\Leftrightarrow u=A+\alpha,\alpha\text{ 为同一过程的无穷小.}$$

5．极限的四则运算

定理 5 设 u,v 是变量(数列或函数),若 $\lim u=A,\lim v=B$,则

1° $\lim(u\pm v)=\lim u\pm\lim v=A\pm B$;

2° $\lim uv=\lim u\lim v=AB$;

3° $\lim\frac{u}{v}=\frac{\lim u}{\lim v}=\frac{A}{B}$(这里 $B\neq0$).

注 ① 此定理是说先有 $\lim u,\lim v$ 存在,才有“式左＝式右”;

② $\lim u,\lim v$ 不存在,左端的极限仍可能存在.

6．极限存在准则

准则 1(夹挤定理) 设 u,v,w 是变量(数列或函数),若从某一时刻开始,$u\leqslant v\leqslant w$,且 $\lim u=\lim w=A$(或 $\pm\infty$),则 $\lim v=A$(或 $\pm\infty$).

注 ① 准则 1 中的“lim”表示同一极限过程;

②“某一时刻”对于数列,指某个 N 以后;对于函数,当 $x\to x_0$ 时,指 x_0 某个充分小的邻域或当 $x\to\infty$,指 $|x|$ 充分大时.

准则 2 单调上升(或下降)且有上界(或下界)的数列必有极限．

注 准则 1 对数列或函数均可,准则 2 只对数列.

7．两个基本极限

1) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1$;

2) $\lim\limits_{x\to\infty}(1+\dfrac{1}{x})^x=\mathrm{e}$ 或$\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=\mathrm{e}$.

8．极限的不等式性质

1) 若$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=A$，$\lim\limits_{n\to\infty}y_n=B$，且 $x_n\leqslant y_n$，则 $A\leqslant B$.

注 即使 $x_n<y_n$，结论仍为 $A\leqslant B$.

2) 若$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$，$\lim\limits_{x\to x_0}g(x)=B$，且$\exists\,\delta>0$，当$0<|x-x_0|<\delta$时，恒有$f(x)\leqslant g(x)$，则 $A\leqslant B$.

注 即使 $f(x)<g(x)$，结论仍为 $A\leqslant B$.

3) 若$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=A$，$\lim\limits_{n\to\infty}y_n=B$，且 $A<B$，则$\exists N$，当 $n>N$ 时，恒有 $x_n<y_n$.

4) 若$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$，$\lim\limits_{x\to x_0}g(x)=B$，且 $A<B$，则$\exists\,\delta>0$，当$0<|x-x_0|<\delta$，恒有$f(x)<g(x)$.

§3 连 续

1．函数在某一点连续

定义 1 设 $f(x)$在点 x_0 的某邻域有定义，若$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$存在，且$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=f(x_0)$，则称$f(x)$在 x_0 处连续.

注 定义 1 用“ε-δ”语言可叙述为：“设 $f(x)$在点 x_0 的某邻域有定义，若$\forall\,\varepsilon>0$，$\exists\,\delta>0$，当$|x-x_0|<\delta$ 时，恒有$|f(x)-f(x_0)|<\varepsilon$，则称 $f(x)$在 x_0 点处连续.”

定义 2 若$\lim\limits_{x\to x_0^+}f(x)=f(x_0)$，则称 $f(x)$在 x_0 点右连续；类似可定义左连续. 左、右连续，统称为单侧连续.

2．间断点的分类

<table>
<tr><td rowspan="2">第一类间断点</td><td>可去</td><td>① $f(x_0^-)=f(x_0^+)=A$，但 $f(x_0)$不存在；
② $f(x_0^-)=f(x_0^+)=A$，$f(x_0)$存在，但 $f(x_0)\neq A$. A 为有限实数</td></tr>
<tr><td>跳跃</td><td>$f(x_0^-)$与 $f(x_0^+)$均存在但不相等</td></tr>
<tr><td>第二类间断点</td><td colspan="2">不是第一类间断点的间断点就是第二类间断点，例如 $f(x_0^-)$或 $f(x_0^+)$至少有一个不存在(有为∞的，有振荡的等)</td></tr>
</table>

3．函数在某一区间连续(连续函数)

定义 1 若 $f(x)$在区间(a,b)内每一点处都连续，则称 $f(x)$在(a,b)内连续，或称

$f(x)$是(a,b)内的连续函数，记作 $f\in C(a,b)$. 当(a,b)就是 $f(x)$的定义域时，则称 $f(x)$为连续函数.

定义 2 若 $f(x)$在(a,b)内连续，且在点 a 处右连续，在点 b 处左连续，则称 $f(x)$ 在闭区间$[a,b]$上连续，或称 $f(x)$是$[a,b]$上的连续函数，记作 $f\in C[a,b]$. 当$[a,b]$就是 $f(x)$的定义域时，则称 $f(x)$为连续函数.

4．连续函数的运算

1) 四则运算

定理 1 若 $f(x),g(x)$在点 x_0 处连续，则和、差、积：$f(x)\pm g(x)$，$f(x)\cdot g(x)$在点 x_0 处连续；若还有 $g(x_0)\neq 0$，则商 $f(x)/g(x)$在 x_0 处也连续.

从上述定理可得如下四则运算：若

$$\lim_{x\to x_0}f(x)=f(x_0),\lim_{x\to x_0}g(x)=g(x_0),$$

则

$$\lim_{x\to x_0}(f(x)\pm g(x))=\lim_{x\to x_0}f(x)\pm\lim_{x\to x_0}g(x)=f(x_0)\pm g(x_0);$$

$$\lim_{x\to x_0}(f(x)\cdot g(x))=\lim_{x\to x_0}f(x)\cdot\lim_{x\to x_0}g(x)=f(x_0)\cdot g(x_0);$$

若还有 $g(x_0)\neq 0$，则

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{\lim\limits_{x\to x_0}f(x)}{\lim\limits_{x\to x_0}g(x)}=\frac{f(x_0)}{g(x_0)}.$$

2) 复合函数的连续性

定理 2 设 $y=f(u)$与 $u=\varphi(x)$构成复合函数 $y=f(\varphi(x))$. 若 $u=\varphi(x)$在点 x_0 处连续，且 $y=f(u)$在对应点 $u_0=\varphi(x_0)$处连续，则 $y=f(\varphi(x))$在点 x_0 处连续.

注 从上述定理可知，此时极限号可移到函数号里边，即

$$\lim_{x\to x_0}f(\varphi(x))=f(\lim_{x\to x_0}\varphi(x))=f(\varphi(x_0)).$$

3) 反函数的连续性

定理 3 严格单调上升(或下降)的连续函数，其反函数仍为严格单调上升(或下降)的连续函数.

5．初等函数的连续性

定理 4 初等函数在其定义域上的每一点都是连续的.

注 ① 并非所有的初等函数都是连续函数，例如 $y=\dfrac{1}{x}$，$y=\tan x$ 的定义域是断开的，都不是连续函数；但一切初等函数在其定义域内都是连续的；

② 当某初等函数的定义域是一个连续区间时，该初等函数就一定是连续函数.

6．闭区间上连续函数的性质

定理 5 (最值定理) 若 $f\in C[a,b]$，则 $f(x)$在$[a,b]$上能取到最大值和最小值.

定理 6 (有界性定理) 闭区间上的连续函数是有界的.

注 定理 2 是定理 1 的推论.

定理 7(介值定理) 若 $f\in C[a,b]$,且 $f(a)\neq f(b)$,μ 为满足不等式 $f(a)<\mu<f(b)$ 或 $f(a)>\mu>f(b)$ 的任一实数,则 (a,b) 内至少有一点 ξ,使 $f(\xi)=\mu$.

定理 8(零点定理) 若 $f\in C[a,b]$,且 $f(a)\cdot f(b)<0$,则 (a,b) 内至少有一点 ξ,使 $f(\xi)=0$.

定理 9 若 $f\in C[a,b]$,则 $f(x)$ 可以取到介于最大值 M 与最小值 m 之间的一切实数.

注 ① 定理 4 是定理 3 的推论;

② 定理 5 是定理 1 和定理 3 的推论.

例 题

说明 解法或证明中,括号中的内容是对该题的分析、提示,并非解题过程.

1. 已知 $f(\frac{1}{x}+1)=\frac{2}{x^2}+\frac{1}{x}+1$,求 $f(x)$ 及其定义域 $D(f)$.

解法 1 ($f(\frac{1}{x}+1)$ 以 $\frac{1}{x}+1$ 为自变量,若以 x 为自变量时,其对应规则不是 f)

令 $\frac{1}{x}+1=t$,有 $x=\frac{1}{t-1}$,有

$$f(t)=\frac{2}{(\frac{1}{t-1})^2}+\frac{1}{\frac{1}{t-1}}+1,$$

得 $f(t)=2t^2-3t+2,t\neq1$.

以 x 代 t,有

$$f(x)=2x^2-3x+2,x\neq1,$$

故

$$D(f)=(-\infty,1)\cup(1,+\infty).$$

(以 x 代 t,仅改变自变量所用符号,未改变函数的实质)

解法2 (将右端凑成 $\frac{1}{x}+1$ 的组合,这对于用解法 1 失效的一些题型很有用)

设 $\frac{2}{x^2}+\frac{1}{x}+1=A(\frac{1}{x}+1)^2+B(\frac{1}{x}+1)+C$,用比较系数法:

$$\begin{cases}A=2,\\2A+B=1,\\A+B+C=1,\end{cases}\quad 得\quad \begin{cases}A=2,\\B=-3,\\C=2.\end{cases}$$

故

$$f(\frac{1}{x}+1)=2(\frac{1}{x}+1)^2-3(\frac{1}{x}+1)+2.$$

以 t 代 $\frac{1}{x}+1$ 有 $f(t)=2t^2-3t+2,t\neq1$,以 x 代 t 有

$$f(x)=2x^2-3x+2,x\neq1,D(f)=(-\infty,1)\cup(1,+\infty).$$

(往往可以不用比较系数法,而经适当变形就能得出 $f(x)$ 的表达式.例如由 $f(\sin^2x)$

$=\cos 2x+\tan^2 x$ 求 $f(x)$：因 $\cos 2x+\tan^2 x=1-2\sin^2 x+\dfrac{\sin^2 x}{1-\sin^2 x}$，故 $f(x)=1-2x+\dfrac{x}{1-x})$.

2. 已知 $f(x)$满足 $f(x)+2f\left(\dfrac{1}{x}\right)=x+1,\ x\neq 0$，求 $f(x)$.

解 令$\dfrac{1}{x}=t$，有 $x=\dfrac{1}{(t)}$，代入已知式，有

$$f\left(\frac{1}{t}\right)+2f(t)=\frac{1}{t}+1,$$

以 x 代t 得

$$f\left(\frac{1}{x}\right)+2f(x)=\frac{1}{x}+1.$$

解

$$\begin{cases} f(x)+2f\left(\dfrac{1}{x}\right)=x+1, \\ 2f(x)+f\left(\dfrac{1}{x}\right)=\dfrac{1}{x}+1, \end{cases}$$

得 $f(x)=\dfrac{1}{3}\left(\dfrac{2}{x}-x+1\right), x\neq 0$.

3. 设 $f(x)=\dfrac{\ln x+1}{\ln x-1}\ (x>\mathrm{e})$，求 $f(x)$的反函数 f^{-1}及其定义域.

解 令 $y=\dfrac{\ln x+1}{\ln x-1}$，有 $\ln x=\dfrac{y+1}{y-1}$，得 $x=\mathrm{e}^{\frac{y+1}{y-1}}$，交换 x,y 符号得f 的反函数f^{-1}为 $y=\mathrm{e}^{\frac{x+1}{x-1}}$，而 f^{-1}的定义域为 f 的值域，由 $\lim\limits_{x\to \mathrm{e}^+}\dfrac{\ln x+1}{\ln x-1}=+\infty$，$\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln x+1}{\ln x-1}=1$，得 f 的值域为$(1,+\infty)$，故 f^{-1}的定义域为$(1,+\infty)$.

4. 已知 $y=f(u)=\ln u, u=\varphi(x)=a-x^2$，考察 a 在何区间取值，$y=f(\varphi(x))$是复合函数，并求该复合函数的定义域.

解 由 $y=f(u)=\ln u$，知 $f(u)$的定义域为$(0,+\infty)$，记为 $D(f)=(0,+\infty)$. 由 $u=\varphi(x)=a-x^2$，知 $\varphi(x)$的值域为$(-\infty,a]$，记为 $Z(\varphi)$. 显然，若 $D(f)\cap Z(\varphi)$非空，即$(0,+\infty)\cap(-\infty,a]\neq\varnothing$时，$y=f(\varphi(x))$才构成复合函数，这要求 $a>0$，即 a 在$(0,+\infty)$上取值，$y=f(\varphi(x))=\ln(a-x^2)$是复合函数，其定义域为$(0,a]$，$(a>0)$.

5. 求复合函数 $y=\arcsin(x^2-2)$的定义域.

解 $y=\arcsin u, u=x^2-2$，要求$|u|\leqslant 1$，即$|x^2-2|\leqslant 1$，即 $-1\leqslant x^2-2\leqslant 1$，即 $1\leqslant x^2\leqslant 3$. 由 $x^2\leqslant 3$，得 $-\sqrt{3}\leqslant x\leqslant\sqrt{3}$；再由 $1\leqslant x^2$，得 $x\geqslant 1$ 或 $x\leqslant -1$. 故 $y=\arcsin(x^2-2)$的定义域为$[-\sqrt{3},-1]\cup[1,\sqrt{3}]$.

6. 设 $f(x)$是奇函数，$\varphi(x)=x^3$，问 $\varphi[f(x)]$是不是奇函数?

解 （按奇函数的定义验证即可）

因 $f(x)$是奇函数，故 $f(-x)=-f(x)$. 现 $\varphi[f(x)]=f^3(x)$，而 $\varphi[f(-x)]=\varphi[-f(x)]=[-f(x)]^3=-f^3(x)=-\varphi[f(x)]$，故 $\varphi[f(x)]$是奇函数.

7. 下面两个函数是不是周期函数? 若是，求出最小周期，若不是，请证明之.