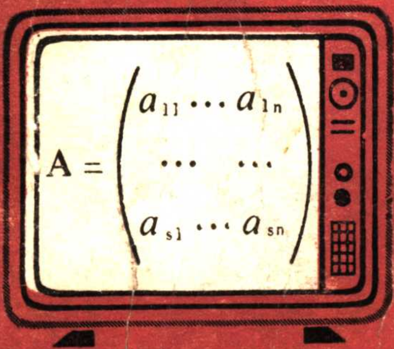
电视大学辅导参考



线性代数

卢振有 编

辽宁科学技术出版社

15

电视大学辅导参考

线 性 代 数

卢 振 有 编

辽 宁 科 学 技 术 出 版 社

一九八五·沈阳

2

线 性 代 数

Xianxing Daishu

卢振有 编

辽宁科学技术出版社出版 (沈阳市南京街6段1里2号)
辽宁省新华书店发行 沈阳新华印刷厂印刷

开本：787×1092 1/32 印张：14 字数：310,000
1985年9月第1版 1985年9月第1次印刷

责任编辑：禾 果 封面设计：秀 中

印数：1—24,100

统一书号：7288·19 定价：2.80 元

目　　录

第 1 讲

第一章 行列式

——二级、三级行列式

一、内容概述

（一）研究对象

内容表：

<table>
<tr><td rowspan="5">高等代数</td><td rowspan="4">线性代数</td><td>线性方程组</td><td>$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=b_1 \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=b_2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{s1}x_1+a_{s2}x_2+\cdots+a_{sn}x_n=b_s \end{cases}$$</td></tr>
<tr><td>矩阵</td><td>由$s\times n$个数排成的s行、n列的表：$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & & \cdots\cdots \\ a_{s1} & a_{s2} & \cdots & a_{sn} \end{pmatrix}$$称为一个矩阵</td></tr>
<tr><td>二次型</td><td>二次齐次多项式 $Ax^2+2Bxy+Cy^2$ 称为二次型</td></tr>
<tr><td>向量空间</td><td>由全体向量组成的集合，有加法与数量乘法运算，并满足 8 条运算规律的，称为向量空间，即线性空间</td></tr>
<tr><td colspan="3">多　项　式　理　论</td></tr>
</table>

（二）数域

定义 1 对数集 P 中任意两个数，施行某种运算仍是 P 中的数，称为数集 P 对该种运算是封闭的。

定义 2 由一些数组成的集合 P，如果满足：

（1）0 与 1 在 P 里；

（2）P 对加、减、乘、除（除数不为零）运算都是封闭的。

则称 P 为一个数域。

说明

（1）全体有理数组成的集合 θ，全体实数组成的集合 R，全体复数组成的集合 K，都是数域。全体整数组成的集合不是数域。

（2）任何一个数域都包含全体有理数，即有理数域是最小的数域。

（三）二级、三级行列式

1．定义

定义 1 称式子

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

为二级行列式。

定义 2 称式子

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32},$$

为三级行列式。

2. 应用行列式解线性方程组

（1）二元一次方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2 \end{cases}$$

当 $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \neq 0$时，有唯一解

$$x_1 = \frac{\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}}; \qquad x_2 = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}}$$

（2）三元一次方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3 \end{cases}$$

当 $D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \neq 0$时，有唯一解

$$x_1 = \frac{\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}}{D}; \quad x_2 = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix}}{D};$$

$$x_3 = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix}}{D}.$$

二、例题分析

例 1 计算行列式

$$\begin{vmatrix} 1 & \log_b a \\ \log_a b & 1 \end{vmatrix}.$$

解 应用二级行列式的定义写成代数和的形式，然后用对数的运算进行化简.

$$\begin{vmatrix} 1 & \log_b{}^a \\ \log_a{}^b & 1 \end{vmatrix} = 1 - \log_a{}^b \log_b{}^a = 1 - 1 = 0.$$

例 2 利用行列式解线性方程组

$$\begin{cases} 2x + 3y + 5z = 10 \\ 3x + 7y + 4z = 3 \\ x + 2y + 2z = 3 \end{cases}$$

解 先求出系数行列式 D，然后再用行列式解方程组的方法求解

$$\because \quad D = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 3 & 7 & 4 \\ 1 & 2 & 2 \end{vmatrix} = 28 + 12 + 30 - 35 - 16 - 18 = 1 \neq 0,$$

$\therefore$ 方程组有唯一解

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 10 & 3 & 5 \\ 3 & 7 & 4 \\ 3 & 2 & 2 \end{vmatrix}}{1} = \frac{140 + 36 + 30 - 105 - 18 - 80}{1} = \frac{3}{1} = 3;$$

$$y=\frac{\begin{vmatrix}2&10&5\\3&3&4\\1&3&2\end{vmatrix}}{1}=\frac{12+40+45-15-24-60}{1}=\frac{-2}{1}=-2;$$

$$z=\frac{\begin{vmatrix}2&3&10\\3&7&3\\1&2&3\end{vmatrix}}{1}=\frac{42+9+60-70-27-12}{1}=\frac{2}{1}=2.$$

例 3 证明：对于实数 a、b、c，方程$\begin{vmatrix}a-x&b\\b&c-x\end{vmatrix}=0$的根是实数。

证 用二级行列式的定义，把用行列式的形式所表示的方程展成用代数式表示的一元二次方程，然后用判别式大于等于零来证明方程有实根。

即 $$\begin{vmatrix}a-x&b\\b&c-x\end{vmatrix}=(a-x)(c-x)-b^2$$

$$=x^2-(a+c)x+(ac-b^2)=0$$

$$\because\quad (a+c)^2-4(ac-b^2)=a^2+2ac+c^2-4ac+b^2$$

$$=(a-c)^2+b^2\geqslant 0$$

$\therefore$ 方程的根是实根。

三、习题

1. 计算下列行列式：

（1）$\begin{vmatrix}1&2&3\\2&3&1\\3&1&2\end{vmatrix}$；

解 $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 6+6+6-27-8-1=-18.$

（2）$\begin{vmatrix} 0 & x & y \\ -x & 0 & z \\ -y & -z & 0 \end{vmatrix}$；

解 $\begin{vmatrix} 0 & x & y \\ -x & 0 & z \\ -y & -z & 0 \end{vmatrix} = 0-xyz+xyz-0-0-0=0.$

（3）$\begin{vmatrix} a & b & c \\ b & c & a \\ c & a & b \end{vmatrix}$；

解 $\begin{vmatrix} a & b & c \\ b & c & a \\ c & a & b \end{vmatrix} = abc+abc+abc-c^3-b^3-a^3$

$$=3abc-a^3-b^3-c^3$$

2．证明 $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} a_2 & b_2 & c_2 \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$

证 左边$=a_1b_2c_3+a_2b_3c_1+a_3b_1c_2-a_3b_2c_1-a_2b_1c_3-a_1b_3c_2$，

右边$=-(a_2b_1c_3+a_1b_3c_1+a_3b_2c_1-a_3b_1c_2-a_1b_2c_3-a_2b_3c_1)=a_1b_2c_3+a_2b_3c_1+a_3b_1c_2-a_3b_2c_1-a_2b_1c_3-a_1b_3c_2$，

∴ 左边＝右边

∴ 原式成立。

3．解方程组

$$\begin{cases}x_1+ax_2+a^2x_3=a^3\\x_1+bx_2+b^2x_3=b^3\\x_1+cx_2+c^2x_3=c^3\end{cases}$$

（a，b，c为各不相同的常数）．

解　$\because D=\begin{vmatrix}1 & a & a^2\\1 & b & b^2\\1 & c & c^2\end{vmatrix}=bc^2+ab^2+ca^2-ba^2-ac^2$

$-cb^2=(b-a)c^2+ab(b-a)-c(b-a)(b+a)=(b-a)$

$[c^2+ab-c(b+a)]=(b-a)[c(c-a)-b(c-a)]$

$=(b-a)(c-a)(c-b)\neq 0,$

$\therefore$　方程组有唯一解。

又$\because\begin{vmatrix}a^3 & a & a^2\\b^3 & b & b^2\\c^3 & c & c^2\end{vmatrix}=a^3bc^2+ab^2c^3+a^2b^3c-a^2bc^3-a^3b^2c$

$-ab^3c^2=abc(bc^2+ab^2+ca^2-ba^2-ac^2-cb^2)$

$=abc(b-a)(c-a)(c-b),$

$\begin{vmatrix}1 & a^3 & a^2\\1 & b^3 & b^2\\1 & c^3 & c^2\end{vmatrix}=b^3c^2+a^3b^2+a^2c^3-a^2b^3-a^3c^2-c^3b^2$

$=b^2c^2(b-c)+a^3(b^2-c^2)-a^2(b^3-c^3)$

$=(b-c)[b^2c^2+a^3(b+c)-a^2(b^2+bc+c^2)]$

$=(b-c)[b^2c^2+a^3b+a^3c-a^2b^2-a^2bc-a^2c^2]$

$=(b-c)[c^2(b^2-a^2)-a^2b(b-a)-a^2c(b-a)]$

$=(b-c)(b-a)[c^2(b+a)-a^2b-a^2c]$

$=(b-c)(b-a)[c^2b+c^2a-a^2b-a^2c]$

$=(b-c)(b-a)[c^2b-abc+c^2a-a^2c+abc-a^2b]$

$=(b-c)(b-a)[bc(c-a)+ac(c-a)+ab(c-a)]$

$$= (b-c)(b-a)(c-a)(ab+bc+ca)$$
$$= -(b-a)(c-a)(c-b)(ab+bc+ca),$$

$$\begin{vmatrix} 1 & a & a^3 \\ 1 & b & b^3 \\ 1 & c & c^3 \end{vmatrix} = bc^3 + ab^3 + ca^3 - ba^3 - cb^3 - ac^3$$

$$= c^3(b-a) + ab(b^2-c^2) - c(b^3-a^3)$$
$$= (b-a)[c^3 + ab(b+a) - c(b^2+ba+a^2)]$$
$$= (b-a)[c^3 + ab^2 + a^2b - b^2c - abc - a^2c]$$
$$= (b-a)[c(c^2-b^2) - ab(c-b) - a^2(c-b)]$$
$$= (b-a)(c-b)[c(c+b) - ab - a^2]$$
$$= (b-a)(c-b)[c^2 + bc - ab - a^2]$$
$$= (b-a)(c-b)[c(c-a) + b(c-a) + a(c-a)]$$
$$= (b-a)(c-a)(c-b)(a+b+c),$$

$$\therefore \quad x_1 = \frac{abc(b-a)(c-a)(c-b)}{(b-a)(c-a)(c-b)} = abc;$$

$$x_2 = \frac{-(b-a)(c-a)(c-b)(ab+bc+ca)}{(b-a)(c-a)(c-b)}$$
$$= -(ab+bc+ca);$$

$$x_3 = \frac{(b-a)(c-a)(c-b)(a+b+c)}{(b-a)(c-a)(c-b)} = a+b+c.$$

四、练习题

1．计算下列行列式：

（1）$\begin{vmatrix} 2\sin\theta\cos\theta & 2\sin^2\theta - 1 \\ 2\cos^2\theta - 1 & 2\sin\theta\cos\theta \end{vmatrix}$．（答：1）

（2）$\begin{vmatrix} \dfrac{(1-t)^2}{1+t^2} & \dfrac{2t}{1+t^2} \\ \\ \dfrac{2t}{1+t^2} & -\dfrac{(1+t)^2}{1+t^2} \end{vmatrix}$．　（答：$-1$）

（3）$\begin{vmatrix} 0 & a & 0 \\ b & c & d \\ 0 & e & 0 \end{vmatrix}$．　（答：0）

（4）$\begin{vmatrix} a+x & x & x \\ x & b+x & x \\ x & x & c+x \end{vmatrix}$．　（答：$(ab+bc+ca)x+abc$）

2．利用行列式解下列方程组：

（1）$\begin{cases} 4x+7y+13=0 \\ 5x+8y+14=0 \end{cases}$　（答：$x=2, y=-3$）

（2）$\begin{cases} 5x+2y+3z+2=0 \\ 2x-2y+5z=0 \\ 3x+4y+2z+10=0 \end{cases}$　（答：$x=2,\quad y=-3,\quad z=-2$）

3．证明 $\begin{vmatrix} 1 & a & bc \\ 1 & b & ca \\ 1 & c & ab \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & b & b^2 \\ 1 & c & c^2 \end{vmatrix}$．

第 2 讲

第一章 行列式

——排 列

一、内容概述

（一）定义

定义 1 由$1,2,\cdots,n$组成的一个有序数组，称为一个n元排列。

说明

（1）由任意n个不同的自然数所组成的排列，也称为n元排列。

（2）n元排列共有$n!$个。

定义 2 $1\ 2\ 3\ \cdots\ n$是一个按照由小到大的次序排列的n元排列，称为自然顺序。

定义 3 一个排列中，如果有两个数的次序是由大到小，则称这两个数字组成一个逆序。一个排列的逆序的总数，称为这个排列的逆序数。用τ表示。

定义 4 逆序数是偶数的排列，称为偶排列；逆序数是奇数的排列，称为奇排列。

定义 5 在一个排列中，把某两个数字互换位置，而其余的数字保持不动，就得到另一个排列，这样一种变换称为

一个对换。

（二）定理

定理 1 对换改变排列的奇偶性。即经过一次对换，奇排列变成偶排列，偶排列变成奇排列。

定理 2 在全部的 n 元排列中，奇、偶排列的个数各占一半，各是$\frac{1}{2}n!$个。

定理 3 任一个n 元排列都可以通过一系列的对换与排列$1\ 2\ \cdots\ n$互变，并且所作对换次数的奇偶性与这排列的奇偶性相同。

说明

（1）一个n 元排列的任意一个排列，可以经过一系列的对换，变成另外的任意一个所要求的n元排列。

（2）一个n元排列通过对换变成自然顺序，所作对换的次数与这个排列有相同的奇偶性。

二、例题分析

例 1 决定134782695的逆序数，从而决定排列的奇偶性。

解 根据排列的逆序数定义，从排列中第一个数计算起，直到排列中的最后一个数为止，看排在它们后面的数中，有几个比它们小的数，就有几个逆序，把所有的逆序加起来，就得到了这个排列的逆序数。

$\tau(134782695)=1+1+3+3+1+1=10$

$\therefore$ 134782695是偶排列。

例 2　决定i，j 使 $1274i56j9$ 成偶排列.

解　所求排列是由 9 个数字组成，缺数字3和 8 ，看i和 j 位置上怎样安排 3 和 8 ，使排列的逆序数为偶数即可。

（1）当 $i=8$，$j=3$ 时

$\tau(127485639)=4+1+3+1+1=10$。

（2）当 $i=3$，$j=8$时

$\tau(127435689)=4+1=5$.

$\therefore$ 127485639是偶排列.

例 3　写出把排列12435变成排列25341的那些对换.

解　根据对换定义作

$$12435 \xrightarrow{4,3\text{对换}} 12345 \xrightarrow{2,5\text{对换}} 15342 \xrightarrow{1,2\text{对换}} 25341$$

即　4 和 3 对换，2 和 5 对换，1 和 2 对换.

例 4　已知 $a_1a_2\cdots a_n$的逆序数为 I，求 $a_na_{n-1}\cdots a_1$ 的逆序数，并讨论其两排列的奇偶关系.

解（1）求 $a_na_{n-1}\cdots a_1$ 的逆序数.

在一个n元排列中，逆序数和顺序数的总和为$\dfrac{n(n-1)}{2}$，

因为$\tau(n\ n-1\cdots 2\ 1)=\dfrac{n(n-1)}{2}$，每对换一次不改变逆序数和顺序数的总数。排列 $a_na_{n-1}\cdots a_1$ 的逆序数恰是排列 $a_1a_2\cdots a_n$ 的顺序数.

$\because$　$\tau(a_1a_2\cdots a_n)=\mathrm{I}$，

$$\therefore\quad \tau(a_na_{n-1}\cdots a_1)=\frac{n(n-1)}{2}-\mathrm{I}.$$

（2）讨论排列 $a_1a_2\cdots a_n$ 和排列 $a_na_{n-1}\cdots a_1$ 的奇偶关