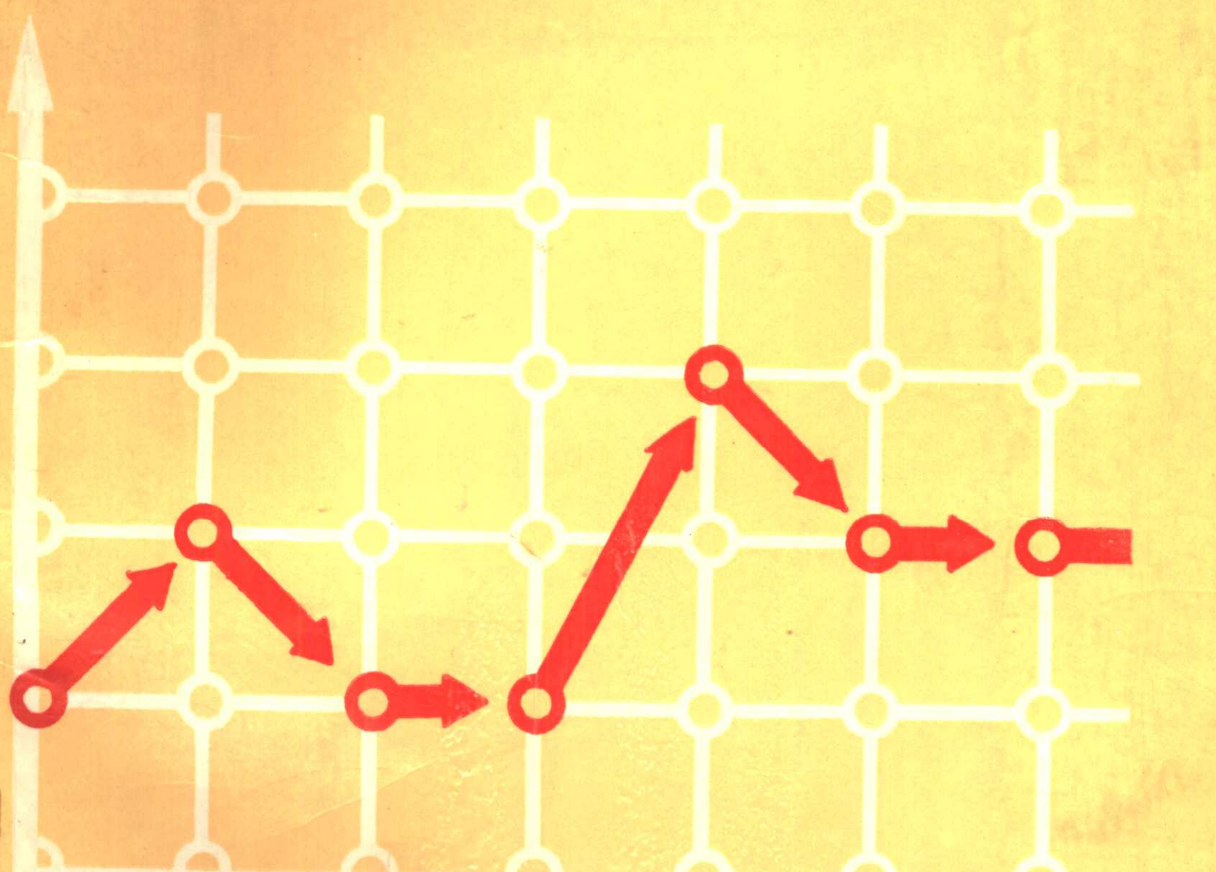
高等学校教学用书

随机信号分析及工程应用

李在铭　张全芬　李晓峰　编



电子科技大学出版社

高等学校教学用书

随机信号分析及工程应用

李在铭　张全芬　李晓峰　　编

电子科技大学出版社

·1990·

内 容 简 介

本书从工程实际出发论述了随机信号的基础理论与工程应用。主要内容包括：随机实验，物理系统及其概率分析模型，基础概率论，随机变量，随机向量和随机信号的基础理论与分析方法，随机信号通过线性与非线性系统，高斯、窄高斯、马尔可夫、独立随机、维纳与泊松计数等典型随机信号及随机信号的参数测量，均方估计等。

本书结合工程实际，侧重物理概念与分析方法，深入浅出，便于自学，配有足够的例题与习题。

本书适于各类信息学科，特别是电子类工程技术人员进修提高之用 尤宜作为高等学校大专、本科和研究生的教材和参考书。

高等学校教学用书

随机信号分析及工程应用

李在铭 张全芬 李晓峰 编

*

电子科技大学出版社出版
中国成都市建设北路二段四号
中国科学院光电所印刷厂印刷
四川省新华书店发行

*

开本 787×1092 1/16 印张 15.875 字数 380千字
版次 1990年9月第一版 印次 1990年9月第一次印刷
印数 1—3000册
中国标准书号 ISBN 7—81016—257—8／TN·73
(15452·114) 定价：5.40元（压膜）

前　言

在近代信息社会里，社会的各个方面、各种自然科学、工程技术领域无一不是与信息紧密相关的。信息具有不确定性，或称随机性。携带信息的信号称为随机信号。因此，随机信号和系统的理论与分析方法是信息科学技术的重要基础。应用信息科学与技术的工程技术人员要充分发挥自己的才能，进一步提高并掌握近代科学技术必须要学习这一门知识。

本书总结了作者多年来从事这方面研究与教学的经验，为信息工程类专业的专科，本科和研究生编写了这一基础教材。此教材也特别适合于信息工程类各专业技术人员进修提高之用。使用本书的读者需要具有大学（工科）一、二年级的基础知识。

随机信号与系统的理论是抽象的，它的基本概念和分析方法不易掌握，用以解决工程技术、社会组织管理等各类实际问题更是困难。本书从工程实际出发、应用功能分析方法讨论随机信号的基本理论与应用，侧重物理概念和工程分析，深入浅出，注意层次。书中有足够的例题和习题，便于自学。为了便于读者查询有关的数学知识，书末备有一定的附录。

本教材经过适当安排可用于40～85学时的不同层次的读者。根据不同的读者对象，授课侧重点如下表所示。

安排 读者	参考学时	复　习	重点讲授
大专读者	50		第一，二，三，五，六章
本科读者	60—85	第二章	第一，三，五，六，七，八，十二章，
研 究 生	60	第二、三章	第一，四，五，六，九至十三章、

本教材由李在铭编写第一、二、五、六、十一和十二章并统编全书；由张全芬编写第七、八、九、十章；由李晓峰编写第三、四和十三章。

本教材经电子科技大学陈尚勤教授、肖先赐教授和西南技术物理应用研究所高级工程师曾建希评审，提出了若干宝贵意见。在此教材编写过程中，电子科技大学无线电技术系通信工程教研室各位老师提出了宝贵的意见并给予了热情的帮助。这里一并表示真诚的感谢。由于编者水平有限，书中难免存在一些缺点和错误，殷切希望广大读者批评指正。

编　者

目　录

此为试读，需要完整PDF请访问：www.ertongbook.com

第一章　随机实验　物理系统及其概率分析模型

§1.1　随机实验　随机信号与系统

一、随机实验，随机信号与系统

在研究各种物理或社会现象时，我们会遇上复杂的和简单的实验，大的或小的系统。比如，有一个生产电子设备的工厂，在产品出厂前需要检查产品的质量，看其是否达到规定的产品指标。达到规定指标的产品称为合格产品，没有达到的称为不合格产品。某件产品的质量用Q来表示。很明显，产品质量与具体测试的某件产品s有关，因此产品的质量记为$Q(s)$。产品s不同，其质量不同，我们约定

$$Q(s)=\begin{cases}1 & \text{产品 } s \text{ 合格}\\ 0 & \text{产品 } s \text{ 不合格}\end{cases}$$

产品质量$Q(s)$在具体测试s产品之前是不能事先知道的。这种在具体观察之前不能确定的量，比如$Q(s)$，称为随机变量。在具体观察之前不能确定的现象称为随机现象，观察随机现象的实验称为随机实验。严格地讲，实验都是随机的。下面我们举两个信息处理与传输系统的例子。

信息传输系统或网络如图1.1所示。我们随意地取出系统或网络中可作为发送信息端(发端)与接收信息端（收端）的两个站A和B。发信者将声音、图象或数据形式的信息经过信息传输系统（Information Transmission system 简称 ITS）传送给收端的收信者。收信者事先不知道发信者在某次发信时具体要发送什么消息。因此，对收信者来讲，可以认为A要发出的消息是若干可能消息中的某一种，u_i，$i=1，2，\cdots，k$。将可能发送的消息用集合U表示

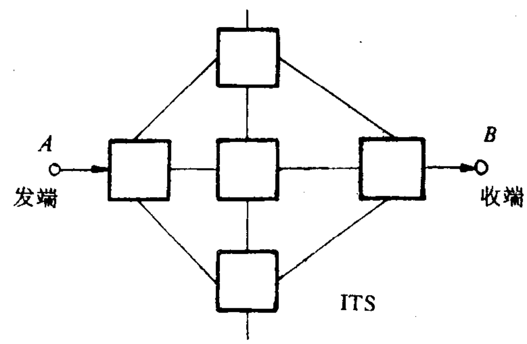


图1.1　信息传输

$$U=(u_1,\ u_2,\ \cdots,\ u_k) \tag{1.1}$$

另外，由A至B传送信息的系统ITS通常有可能将具体发送的信息搞错。这样，收端B每次收到什么样的信息更是不能事先准确地知道。若收端B可能接收到的消息为v_j，$j=1，2，\cdots，m$，同样可用集合V表示为

$$V=(v_1,\ v_2\cdots,\ v_m) \tag{1.2}$$

发端A发送的消息u_i是不（能事先）确定的，收端B收到的消息也是不（能事先）确定的。对收信者B来讲，由A至B的信息传送系统是传送不能事先确知的信息的系统，且系统本身具有使传送信息错乱的不确定性。将不确定的消息或信息表为函数形式就是不确定的信号，具有不确定特性或参数的系统或网络称为不确定系统或网络。通常，相应地称为随机信号，随机系统或网络。

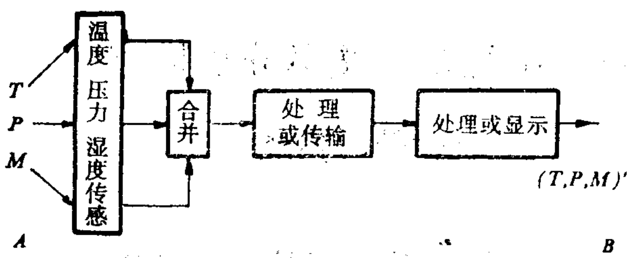


图 1.2 信息探测与处理系统

信息探测与处理系统如图1.2。某地A的温度T，气压P和湿度M需要探测并自动地发送至B地，经处理后再记录和显示出来。在B地得到的信息可用数组或向量表示

$$\mathbf{X}=(T,\ P,\ M)' \tag{1.3}$$

式中符号′表示转置。各个被观察量T、P和M，在某次具体观察之前都是不确定的。因此，各次具体的观察结果可能不相同。我们用s来表示某次具体的观察，则s的一次观察结果可以表示为$T(s)$、$P(s)$和$M(s)$。数组（1.3）可以表示为

$$\mathbf{X}(s)=[T(s),\ P(s),\ M(s)]' \tag{1.4}$$

这里的$T(s)$、$P(s)$和$M(S)$又称为随机变量，$\mathbf{X}(s)$称为随机向量。

上面例子中提到的随机变量和向量都可能是时间t的函数，这时，我们有

$$\mathbf{X}(t,s)=[T(t,s),\ P(t,s),\ M(t,s)]' \tag{1.5}$$

具有两个自变量的不确定量，如$T(t,s)$、$P(t,s)$和$M(t,s)$称为随机过程，而$\mathbf{X}(t,s)$是多个随机过程组成的有序组合称为向量随机过程。上述的随机过程或变量又可以广义地称为随机信号。

在前面举出的实验中，在每次观察之前，被观察量会出现什么值是不确定的，这种被观察的量取什么值不能在测试之前事先确定的现象就是随机现象。观察随机现象的实验称为随机实验。很多工程系统，不论大小，其行为或表征其特征的参量是随机的，这样的系统称为随机系统。描述随机实验中随机现象或随机系统参数的数学函数称为随机信号。

为信息时代里，各项工作无不与信息有关，或者获取信息，或者传输与交换信息、存储处理信息。信息是与不确定性连在一起的。获取信息的实验称为随机实验，携带信息的信号是随机信号。

二、随机系统的可预测性

如前面分析的那样，任何一个实验观察，如传输或处理信息的系统，所处理的量严格来讲是不能事先确定的，这种不确定性的形成可用下面的方框图1.3表示。观察结果不确定的原因可能是各种各样的。比如：不知道起作用的所有原因，因果机理太复杂，系统结构或初始数据不足，以及其他各种原因，这些都使得每次可能的结果无法事先准确地知道。这就造成了单次或多次（有限次）观察的不确定性和随机性。

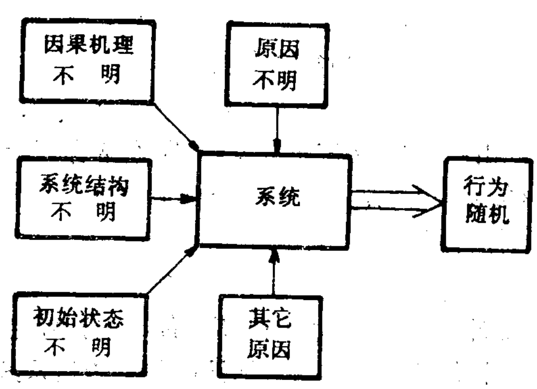


图 1.3 系统行为不确定性

在随机实验中，由于随机事件（如A）的出现或变量的取值是不确定的，因此，转而研究多次观察中事件A出现的相对频率（或平均次数）和变量取值的经验平均。

假若我们把一个实验重复地进行n次，实验中某个实验A发生了n_A次，那么事件A的相对频率，即平均发生次数，可表示为

$$\bar{n}_A = \frac{n_A}{n} \tag{1.6}$$

实验中有某一个被测量$X(s)$，在第i次测试时取值为$x(s_i)$，那么这个被测量$X(s_i)$的平均取值是

$$\bar{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x(s_i) \tag{1.7}$$

经验表明,同一个实验独立地重复进行时,随机事件A的相对频率$\bar{n}_A$和随机变量X的经验平均是相对稳定的，而且有极限存在

$$P[A] = \lim_{n\to\infty} \bar{n}_A \tag{1.8}$$

和

$$E[X] = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x(s_i) \tag{1.9}$$

通常，$P[A]$称为事件A在该实验中发生的概率，$E[X]$称为随机变量X在该实验中的统计平均或数学期望。因此，随机实验中，某个随机事件A的概率$P[A]$和随机变量X的统计平均$E[X]$，在大量试验观察时是稳定的、确知的，因而他们是可预测的。这就是随机系统的一个重要性能：事件、随机变量和信号的可预测性。

§1.2 经验平均 相对频率与概率的经验特性

随机变量X取值的经验平均$\bar{X}$可用取值的相对频率来表示。在实验Θ中，进行n次独立重复实验观察，某个随机变量X可能会有L个不同的数值：x_1，x_2，…，x_L。其中某个数值x_K $k\in[1,L]$，在实验中实际出现了n_K次，那么X在这n次反复试验中取值等于x_K的相对频率是

$$\bar{n}(X=x_k) = \bar{n}_k = n_k/n \qquad k\in[1,L] \tag{1.10a}$$

于是，X的L个不同可能值x_1，x_2，…，x_L就对应着L个相对频率$\bar{n}_1$，$\bar{n}_2$，…，$\bar{n}_L$。这样一个对应关系可以表示成图1.4a的列线图形式，或者图1.4b的直方图形式，这些图形象地给出了随机变量X取值相对频率的分布。使用样本函数$\delta(x)$

$$\delta(x_i) = \begin{cases} 1 & x_i = 0 \\ 0 & \text{其它} \end{cases}$$

可以将这个分布表示成简明的数学形式

$$\bar{n}_k = \sum_{i=1}^{L} \bar{n}_i\delta(x_k - x_i)$$

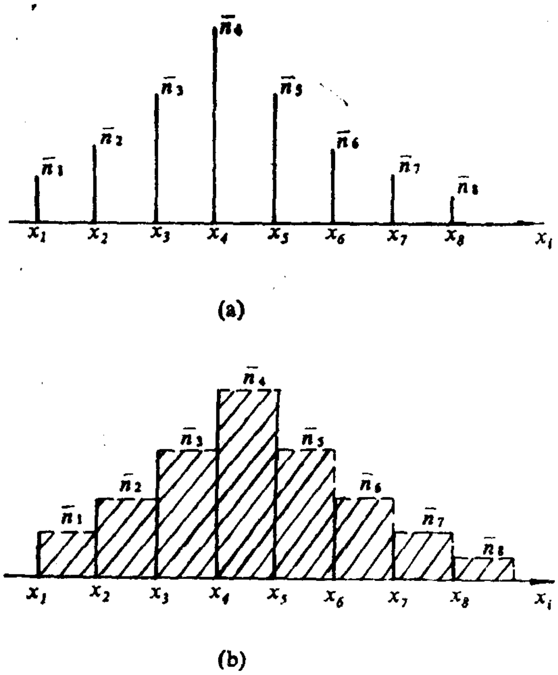


图 1.4 随机变量x取值的列线图和直方图（$L=8$）

（a）列线图 （b）直方图

$$=\sum_{i=1}^{L}\frac{n_i}{n}\delta(x_k-x_i) \qquad (1.10b)$$

利用相对频率，随机变量X的经验平均可以表示为

$$\bar{X}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{L}n_ix_i \qquad (1.11a)$$

$$=\sum_{i=1}^{L}\bar{n}_ix_i \qquad (1.11b)$$

在上述实验中，若随机变量X通过函数$g(\cdot)$映射为变量Y

$$Y=g(X) \qquad (1.12)$$

容易理解，变量Y也是随机的，其经验平均是

$$\bar{Y}=\sum_{i=1}^{L}g(x_i)\bar{n}_i \qquad (1.13)$$

一、相对频率的经验特性

任意事件A的相对频率可以表示为事件指示函数的经验平均。事件指示函数定义为

$$I_A(i)=\begin{cases}1 & \text{第}i\text{次观察时，事件}A\text{出现}\\ 0 & \text{第}i\text{次观察时，事件}A\text{没出现}\end{cases} \qquad (1.14)$$

若将实验重复n次，事件A出现了n_A次，我们有关系式

$$n_A=\sum_{i=1}^{n}I_A(i) \qquad (1.15)$$

利用前面相对频率与经验平均定义，式(1.6)与式(1.7)有

$$\bar{n}_A=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}I_A(i)$$

$$=\bar{I}_A \qquad (1.16)$$

式中$\bar{I}_A$是事件A指示函数的经验平均。

相对频率有下述性质：

性质 1： $\bar{n}_k=\frac{n_k}{n}\in[0,1]$ (1.17)

这是因为独立重复试验总共进行了n次，一定有$0\leqslant n_k\leqslant n$。同时还有

$$\sum_{i=1}^{L}n_i=n$$

性质 2：

$$\sum_{i=1}^{L}\bar{n}_i=1 \qquad (1.18)$$

性质3：若实验中事件A与B互相排斥，而且事件C

$$C = A \cup B$$

事件A、B和C出现的次数分别记为n_A、n_B和n_C时，那么有关系式

$$n_C = n_A + n_B$$

于是

$$\bar{n}_C = \bar{n}_A + \bar{n}_B \tag{1.19}$$

性质 4：相对频率$\bar{n}_A$随观察次数$n \to \infty$而趋于稳定，即

$$\lim_{n \to \infty} \bar{n}_A = P[A] \in [0, 1] \tag{1.20}$$

式中$P[A]$为事件A的概率。

二、概率的经验特性

前面，我们从重复实验中任一事件A的相对频率具有稳定极限的角度提出了该事件的概率。从这个经验平均的意义上，可得出概率的下述基本特性：

特性 1：实验Θ中任一事件A的概率$P[A]$是有界的正值

$$P[A] \in [0, 1] \tag{1.21}$$

特性 2：若S是Θ中所有可能结果的集合

$$S = (\Theta\text{实验中所有可能结果})$$

那么，S表示了一个必然事件（肯定要发生的事件）则有

$$P[S] = 1 \tag{1.22}$$

特性 3：若事件A与事件B互斥，那么有概率关系

$$P[A \cup B] = P[A] + P[B] \tag{1.23}$$

§1.3 随机系统的概率分析模型与分析方法

一、随机系统的概率分析模型

任何物理系统，从严格的意义上讲，表征其行为的事件、参数是随机的。于是，在普遍意义上，大量的物理系统都需要将其视为随机系统。由于系统是随机的，它的表征和模拟应按照图 1.5 的概率分析模型进行。图中给出随机系统的下述三个模型：

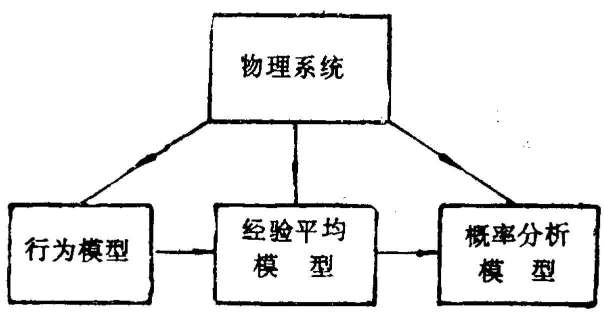


图 1.5 物理系统的概率分析模型

$$\text{行为模型} = \begin{pmatrix} \text{描述系统行为特征} \\ \text{采用行为特征参量}\omega \\ \omega\text{取值具有不确定性和可预测性} \end{pmatrix}$$

$$\begin{array}{c}\text{行为经验} \\ \text{平均模型}\end{array} = \begin{pmatrix} \text{特征参数}\omega\text{取值的经验} \\ \text{平均和相对频率} \end{pmatrix}$$

和

$$\begin{array}{c}\text{行为的概率} \\ \text{分析模型}\end{array} = \begin{pmatrix} \text{特征参数}\omega\text{取值的} \\ \text{统计平均和概率} \end{pmatrix}$$

此为试读，需要完整PDF请访问：www.ertongbook.com

二、随机系统的概率分析方法

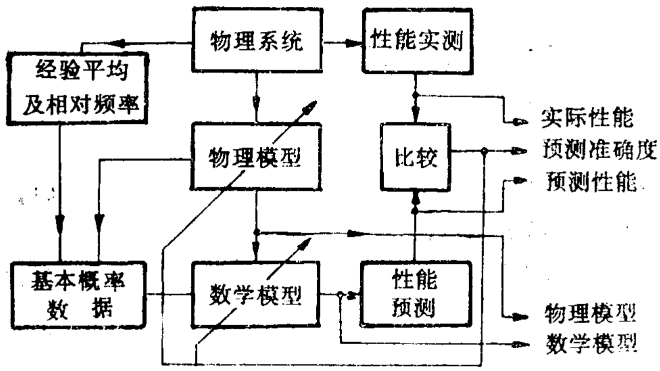


图 1.6 随机系统的概率分析方法

建立随机系统模型，并用此模型来分析，预测系统的行为称为随机系统的概率分析方法。这一方法的基本内容如图1．6所示，我们看到随机系统的研究与分析是在两个领域里进行的。一个属于物理世界的实际领域，另一个属于抽象思维世界的概率推理领域。在实际领域中，我们处理实在的物理系统，进行实验观察和性能测定。在概念推理领域中，我们建立系统的物理模型，概率分析的数学模型，预测其性能并与实测结果相比较。通过比较与研究我们进一步改进系统的分析模型或重新设计新的物理系统。这样的概率分析方法可归纳为下述步骤：

1．建立物理模型。根据实在系统中研究的行为、特性，由系统结构、状态与工作环境建立系统的物理描述。

2．建立基本概率。通过相对频率的测定和上面建立的物理模型，运用概率公理分配基本可能事件的概率。

3．建立概率分析的数学模型。由基本概率数据、系统物理模型建立系统的概率分析模型。

4．预测系统行为（性能）。由系统模型预测系统行为的平均特性与概率。

5．比较系统实际与预测性能，调整、改进物理与数学模型以达到要求的准确度。

6．给出系统行为描述。由系统物理与数学模型预测行为特性及其准确度。

习　题

1.1 某种型号的信号发生器，其输出电压 $U(t)=A\cos(\omega t+\varphi)$，其中$t$是时间变量，以开机时为参考点$t=0$；$A$、$\omega$和$\varphi$固定不变。若准确地测量该信号发生器的输出电压，试问：

（1）信号发生器输出的电压是否是随机信号？

（2）这里的信号发生器是不是随机系统？

（3）测量信号发生器输出电压的实验是不是随机实验？

1.2 条件如题1.1。对具体的某个信号发生器，ω是常数，A在A_0附近5％范围内变化，φ可能值是$\varphi_1,\varphi_2,\cdots,\varphi_k$（$A_0$和$k$是常数）。试问：

（1）信号发生器输出的电压是否是随机信号？

（2）信号发生器是不是一个随机系统？

1.3 条件如题1.2。试问测定输出电压的实验是否是随机实验？给出可能的幅度、相位集合。

1.4 条件如题1.2。试问观察信号发生器输出信号函数结构的实验是不是随机实验？

1.5 有一个数据存储单元，每次最多可存储8字节，对其工作时存储数据的情况连

续观察100次，设第i次观察时，存储器存储的字节数为$X(t_i)$，观察结果如表1.1。设事件$A=\{X(t_i)$超过存储单元容量之半$\}$。试求：

（1）事件A的指示函数及其数值表；

（2）事件A的相对频率。

1.6 利用表1.1给出数据存储器在该100次观察中存储字节数的直方图。

1.7 利用表1.1给出题1.5中数据存储单元存储数据的行为模型、行为经验平均模型和行为概率分析模型。

表1.1 观 察 结 果

t	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
$X(t_i)$	5	8	0	1	5	4	4	3	4	6	8	8	1	0	1	3	4	0	8	0
t	21	22	23	24	25	26	27	28	26	30	31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
$X(t_i)$	6	4	1	8	2	1	0	0	2	5	4	3	6	0	2	1	4	2	6	7
t	41	42	43	44	45	46	47	48	49	50	51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
$X(t_i)$	2	8	6	4	3	8	0	2	0	3	2	0	8	8	3	0	5	6	7	7
t	61	62	63	64	65	66	67	68	69	70	71	72	73	74	75	76	77	78	79	80
$X(t_i)$	3	8	5	7	5	4	4	8	2	8	6	7	6	3	2	6	1	7	5	0
t	81	82	83	84	85	86	87	88	89	90	91	92	93	94	95	96	97	68	99	100
$X(t_i)$	0	4	7	3	6	8	0	1	7	4	3	3	0	8	0	6	7	0	8	2

第二章　基础概率论

§2.1　随机实验样本空间　事件与事件概率

一、随机实验样本点与样本空间

一个随机实验，我们将其记为E。进行实验就是为了观察实验中出现的各种现象，研究实验的各种可能结果。随机实验中的基本可能结果或者是可以计数的，或者是不可以计数的。为了形象地表示一个随机实验，我们可以把实验中的每一个基本可能结果用一个点表示，称为随机实验的样本点，记为小写英文字母s。

$$\begin{matrix}\text{随机实验的} \\ \text{基本可能结果}\end{matrix} \xleftrightarrow{\text{表示为}} \begin{matrix}\text{随机实验的} \\ \text{样本点}s\end{matrix} \tag{2.1}$$

随机实验的全部基本可能结果组成了一个样本点的集合。这个集合记为大写的英文字母S,称为随机实验的样本空间。

$$\begin{aligned} S &= \{\text{随机实验的全部基本可能实验结果}\} \\ &= \{s : s\text{为随机实验的所有样本点}\} \end{aligned} \tag{2.2}$$

不同的随机实验具有不同的样本点和样本空间。相同的实验安排是否具有同样的样本空间呢？也不一定。由于实验中研究和观察的对象不同，相同实验安排也可能有不同的实验样本点和样本空间。

例2.1　观察某个随机电压发生器输出的电压U，测量该电压的数值。若电压发生器输出电压U的数值范围在$[u_1, u_2]$上，试分析该实验的样本点和样本空间。

解：对随机电压发生器输出的电压U进行测量。某次测量所得到的电压u，根据给定的条件，测得的数值必定满足

$$u \in [u_1, u_2]$$

不满足该式的任何电压数值不可能是这一实验的测试结果。因此，$u \in [u_1, u_2]$是该实验的基本可能结果。所有这些基本可能结果的集合就是此实验的样本空间S

$$S = \{u : u \in [u_1, u_2]\}$$

其上的基本可能实验结果u可以表示为实轴上的一点，样本空间S就是实轴上的一个闭区间$[u_1,u_2]$，如图2.1（a）。这种空间或集合的几何表示常称为文氏图（Venn Diagram）。

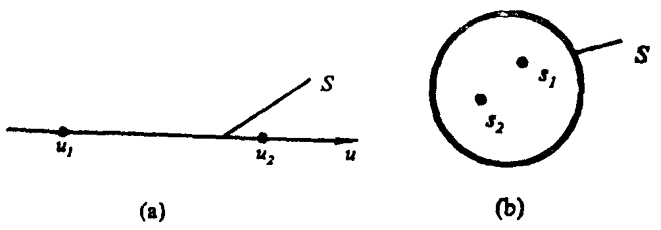


图 2.1　实验样本空间

（a）例2.1连续样本空间　（b）例2.2离散样本空间

例2.2　实验安排与例2.1相同。但是此次着重观察输出电压$u \geqslant u_0$和$u < u_0$的情况，u_0是$[u_1, u_2]$上的一个确定数值。试分析实验的样本点和样本空间。

分析：这一随机实验的可能结果有两个，s_1和s_2，s_1是$u \geqslant u_0$，s_2是$u < u_0$，$u_0 \in [u_1, u_2]$。因此，这时实验的样本点s_1，s_2和样本空间S可以表示如图2.1（b），而且有关系

式$S=\{s_1, s_2\}$

二、事件与事件概率

实验中的事件是指实验中满足一定条件的基本可能结果之集合。

$$\text{实验中事件} = (\text{具有一定条件的基本可能实验结果}$$
$$= (\text{具有一定条件的样本点}) \quad (2.3)$$

给定实验中事件的方法有两种：一种是表列法，列举出属于该事件的所有可能的基本实验结果；另一种是描述法，指出属于该事件的各个基本实验结果应该具备的条件。前面例2.1中给定S的方法是描述法，例2.2中给定S的方法是表列法。

随机实验中某一个事件的发生，是指在该实验中出现了属于该事件的某一个基本可能结果。事件(比如B)在某次具体的实验观察中出现的可能性，用一个数值$P[B]$来表示。数值$P[B]$称为在该随机实验中事件B发生的概率。它满足下面将要讨论的公理条件。

三、概率公理

根据第一章中研究的概率实验模型及其特性，容易规定随机实验中的事件B的概率必须满足下述公理：

公理1：任何随机实验都有基本的可能实验结果、样本空间和事件，以及表示实验中事件发生可能性的概率数值。

公理2：任何事件B的概率$P[B]$是事件B的函数，是非负的实数，即

$$P[B]\geqslant 0 \quad (2.4)$$

公理3：随机实验中的样本空间S是一个必然要出现的事件，其概率数值为1，即

$$P[S]=1 \quad (2.5)$$

公理4：事件概率对于事件具有可加性。可加性分为两种，有限可加性和计数可加性。

(1)有限可加性：若事件A与B互相排斥，即是说

$$A\cap B=\phi \quad (2.6)$$

ϕ为不可能事件。那么，事件$A\cup B$的概率是事件A的概率加上事件B的概率，即

$$P[A\cup B]=P[A]+P[B] \quad (2.7)$$

事件A与B互斥条件中的运算符号$\cap$是事件的积运算符号。$A\cap B$就是事件A与事件B同时发生的事件。式(2.6)是说“事件A与B同时发生”是不可能事件。因此，事件A和B是相互排斥的，不可能同时发生的。式(2.7)中的事件$A\cup B$称为或事件，符号$\cup$是或运算符号。或事件$A\cup B$是“A发生或B发生或两者都发生”的事件。

(2)计数可加性：若有按一定序号编号的无穷多个事件A_i，$i=1, 2, \cdots$，彼此间互相排斥，即

$$A_i\cap A_j=\phi \qquad i\neq j \quad (2.8)$$

那么

$$P[\lim_{n\to\infty}\bigcup_{i=1}^{n}A_i]=\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}P[A_i] \quad (2.9)$$

式中，符号$\bigcup\limits_{i=1}^{n}A_i$的意思是

$$\bigcup_{i=1}^{n} A_i = A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n \tag{2.10}$$

上述概率公理是概率应该具备的最为根本的条件。另有一些性质虽然也是基本的，但是，它们可以由上面的公理推出，因而没有将其作为公理。例如下面这两个基本性质：

性质1：事件（如B）的概率$P[B]$在[0，1]上，即

$$P[B] \in [0,\ 1] \tag{2.11}$$

性质2：不可能事件是实验中不可能发生的事件，记为ϕ。因此，它在每次试验中发生的可能性为0，于是

$$P[\phi] = 0 \tag{2.12}$$

例2.3 有二进制随机数据X，其可能值为0或1。在实验中$X=0$和$X=1$两种事件出现的可能性是相同的。按照概率公理，试给出事件$X=0$和$X=1$的概率。

解：由题给定的条件，这一随机实验的基本可能结果只有两个，$X=0$和$X=1$。因此，该实验的样本空间S可以表示为

$$S = \{X=0\} \cup \{X=1\}$$

而且事件$\{X=0\}$与$\{X=1\}$是互斥的。由公理3和4，我们有

$$P[X=0] + P[X=1] = 1$$

进而，依据题中给出事件$X=0$与$X=1$具有相等可能性的条件，则有

$$P[X=0] = P[X=1]$$

联合求解上面两个关系式，容易得出

$$P[X=0] = P[X=1] = 1/2$$

§2.2 条件事件 条件概率与独立事件

一、条件事件与条件概率

在随机实验中，研究的主要对象是随机事件的发生情况。除研究事件自身的发生情况外，还特别需要研究事件在一定条件下的发生情况。比如说，一个事件A发生的条件下，另一个事件B的发生情况。这种事件的发生情况可以记为$B \mid A$。

$$B \mid A = \text{事件}A\text{发生条件下的事件}B \tag{2.13}$$

$B \mid A$通常又称为以A为条件的事件B，或简称条件事件$B \mid A$，条件事件$B \mid A$的概率记为$P[B \mid A]$。

在研究条件事件$B \mid A$时，通常假定作为条件的事件A的概率$P[A] \neq 0$。条件事件$B \mid A$的概率定义为

$$P[B \mid A] = \frac{P[A \cap B]}{P[A]} \qquad P[A] \neq 0 \tag{2.14}$$

条件概率有下面的基本性质：

1．**概率乘法定理**：事件A和B之积运算得到的积事件$A \cap B$的概率，由条件概率定义式(2.14)，我们有

$$P[A \cap B] = P[A]P[B \mid A] \qquad P[A] > 0$$

$$=P[B]P[A\mid B] \qquad P[B]>0 \tag{2.15}$$

2．概率的链式规则： m个事件$A_1,A_2,\cdots,A_m$之积（也就是同时发生的事件），可以写为

$$\bigcap_{i=1}^{m} A_i=A_1\cap A_2\cap\cdots\cap A_m=A_1A_2\cdots A_m \tag{2.16a}$$

这一事件的概率 $P\left[\bigcap_{i=1}^{m} A_i\right]$有关系式

$$P\left[\bigcap_{i=1}^{m} A_i\right]=P[A_1\mid A_2A_3\cdots A_m]P[A_2\mid A_3A_4\cdots A_m]\cdots P[A_{m-1}\mid A_m]P[A_m] \tag{2.16b}$$

证明： 连续运用概率乘法定理，应用式（2.15）由式（2.16b）的右边出发，容易证明这一概率链式规则。首先，

$$P[A_{m-1}\mid A_m]P[A_m]=P[A_{m-1}A_m]$$

继续运用概率乘法定理，有

$$P[A_{m-2}\mid A_{m-1}A_m]P[A_{m-1}\mid A_m]P[A_m]=P[A_{m-2}A_{m-1}A_m]$$

由此类推，概率链式规则（2.16b）最后得到证明。

3．全概率公式： 事件组A_i（$i=1，2，\cdots，m$）中任意两个事件是互斥的，而且有关系式

$$S=A_1\cup A_2\cdots\cup A_m \tag{2.17}$$

那么，称这个事件组对样本空间S作了一个分割。该事件组 A_i（$i=1，2，\cdots，m$）又称为完备事件组。任何一个事件 B的概率有关系式

$$P[B]=\sum_{i=1}^{m} P[B\cap A_i]$$

$$=\sum_{i=1}^{m} P[A_i]P[B\mid A_i] \qquad P[A_i]>0 \tag{2.18}$$

式（2.18）被称为全概率公式。

4．贝叶斯（Bayes）公式： 若有事件完备组 $A_i(i=1，2，\cdots，m)$，对于任何一个事件B，$P[B]>0$，由乘法定理有

$$P[BA_k]=P[A_k\mid B]P[B]=P[A_k]P[B\mid A_k]$$

式中，$1\leqslant k\leqslant m$，将全概率公式代入上式，容易推出

$$P[A_k\mid B]=\frac{P[A_k]P[B\mid A_k]}{\sum_{i=1}^{m}P[A_i]P[B\mid A_i]} \tag{2.19}$$

该式称为贝叶斯公式。

贝叶斯公式在信息传输与处理的各种问题中获得了广泛的应用。比如：事件组 A_i（$i=1，2，\cdots，m$）中的任何一个事件都可能引起事件B，如果我们在研究事件B出现的情况下，事件A_k（$1\leqslant k\leqslant m$）出现的概率，这时可以使用贝叶斯公式。通常把 各个 $P[B\mid A_i]$称为先

此为试读，需要完整PDF请访问：www.ertongbook.com