实用
经济数学基础

暨南大学成人教育学院
李文献 李树香
周 冰 钱志大 林宗振 编著

ECONOMICS
MATHEMATICS

暨南大学出版社

实用经济数学基础

暨南大学成人教育学院

李文献　李树香
周　冰　钱志大　林宗振　编著

暨南大学出版社

内容简介

本书主要内容为函数，极限与连续，导数与微分，积分，多元函数微积分，行列式与距阵，线性方程组，概率基础知识以及随机变量数学特征等．书末附有数学公式，希腊字母表，积分表以及二项分布正态分布表及主要中英数学名词对照表．

本书除注意到数学学科的内在系统性之外，还根据经济类专业对数学的实际需要和成人教育的特点，精选实际应用内容，注意理论与实际相结合．

为了读者便于自学，本书编写中尽量作到说理浅显，叙述详细，例题较多，本书可作大专教材及经济管理干部自学用书或参考书．

书　　名	实用经济数学基础
作　　者	李文献 李树香 周 冰 钱志大 林宗振 编
责任编辑 封面设计	张子安
出　　版	暨南大学出版社出版发行
印　　装	轻工业部广州轻工业学校印刷厂
规　　格	787×1092 毫米 1/32 13.6 印张 390 千字
版　　次	1989 年 11 月第 1 版 1989 年 11 月第 1 次印刷
印　　数	1–5000 册
书　　号	ISBN 7-81029-015-0/O·2 定　　价 8.25 元

愿本书为培养经济数学人材作出贡献

卢　文

一九八九年于暨南园

前　言

这是一本专为成人教育编写的教材。以前，成人教学使用的有关教材多是普通高校课本或专科的《经济数学》等。教学实践证明，由于它的内容多而全，未能适合成人教育时间短、应用性强的需要，因此，编写适合成人教学的有关教材就显得十分必要。鉴于上述情况，暨南大学成人教育学院组织有关教师编写了这本教材。

本教材主要供函授大学、夜大学、职工大学，职业大学、电视大学等成人高等学校经济类专业的大专班使用；也可作为普通大专学校、普通高校中的大专班以及专业证书班同类专业的教材，并可供经济工作者参考。

本教材根据经济类专业对数学的实际需要和成人教育的特点，精选实际应用的内容，注重理论与实际相结合；对重点、难点作较详细的叙述和分析。每章前有学习要求提示，后有小结，每节附思考题；书后附主要数学名词中英文对照表、数学公式以及希腊字母表。

本教材另一个显著特点是结合各章所学内容编入经济模型方面计算例题。

为了便于自学，配合主教材，编有《实用经济数学基础学习指导》。书中包含学习每章的基本要求、重点、难点，根据编者多年的教学经验指出学员学习中容易出现的问题以及解决的方法；并根据教材的内容编入难题选解以及教材的习题答案，为了学员继续深造的需要，我们编入部分超过教材的内容如级数、方程的近似解等等。本书不仅可供学员使用，也可用作教师的教学参考书。

《实用经济数学基础》全书共十一章。参加编写的有以下几

位副教授：（按章节为序）

第一、二章　　　　李文献
第三、四章　　　　李树香
第五、六章　　　　周　冰
第七、八章　　　　钱志大
第九、十、十一章　林宗振

中山大学卢文教授指导了整个编写工作。全书由卢文教授和冼其尤副教授审校。暨南大学数学系的领导大力支持本教材的编写，在此一并表示谢忱。

本教材是应教学需要而仓促编写的，加上我们的水平有限，缺点和错误在所难免，尚祈专家们和读者加以指正。

编　者

一九八九年八月暨南园

目　　录

第一章 函数

[基本要求]

1.正确理解函数的概念。

2.牢记六类基本初等函数的性质及其图形。

3.熟练掌握复合函数分解的方法。

在中学数学中，我们已经接触过函数的概念以及六类基本初等函数。函数是数学分析研究的对象，在运用数学模型研究实际问题时，函数扮演着重要的角色。为了今后学习的需要，对函数的概念及其有关问题加以回顾，加深认识，进一步理解，使之更加系统化和条理化是很有必要的。

在下面的讨论中，如果没有特别说明，我们都是在实数范围内进行。

§1 函数概念

定义 1.1 在考察过程中，如果有两个变量 x 和 y，以及它们之间的一个对应规律或法则，对于变量 x 在其变化范围内的每一个值，通过这个规律或法则，可以得到变量 y 的一个或多个与之对应的值，则称变量 y 为变量 x 的函数，记为 $y=f(x)$。其中变量 x 称为自变量，变量 y 称为因变量或函数，变量 x 的变化范围称为函数的定义域。

在函数的定义中指出，对于自变量 x 在其变化范围内的每一个值，函数 y 具有确定的一个或多个对应值。由此，对于只有一个对应值的情形，我们称之为单值函数；而对于有多个对应值的情形，我们称之为多值函数。大量事实告诉我们，对于多值函数，在很多情形下，同一个 x 值所对应的几个不同的函数值之

间往往存在着一定的联系，只要知道了其中的一个对应值，就能得到其他的对应值。因此，我们可以限制函数值的变化范围，即适当选取其中一个单值支，对这一单值支的研究就和对单值函数的研究是一样。基于上述原因，如果没有另外的说明，使用"函数"这一词总是指单值函数。

例　圆面积 S 和半径 r 之间的关系 $S=\pi r^2$ 给出了一个定义域为 $(0, +\infty)$ 的函数 $S=f(r)$。

对于函数的概念，我们一定要注意到：

1. 符号 $y=f(x)$ 只表示 y 是 x 的函数，并不是 y 等于 f 和 x 的乘积。如果同时考察几个函数时，为区别起见，可以分别表示为 $f(x)$，$g(x)$，$\varphi(x)$，…。

2. 函数有两个要素：其对应规律和定义域。我们说给出了一个函数，就是同时给出了它的对应规律和定义域。我们说两个函数相等，就是指两个函数的定义域和对应关系完全相同。给出一个函数，关键在于给出对应关系和定义域，至于用什么字母表示自变量和函数是不重要的，如 $y=\sin x$ 和 $S=\sin t$ 都称为正弦函数。

3. 有时，某些函数的自变量和因变量都指某个确定的具体量，如前面提到的圆面积公式 $S=\pi r^2$ 所表示的函数。这时它的定义域应根据其实际意义，即圆半径 r 只能是正数这一点来决定。一般情况下，如果不考虑函数的具体意义，这时，它的定义域可以从对应关系本身来决定。如式子 $y=\sqrt{1-x^2}$ 给出一个函数，其定义域是能计算 $\sqrt{1-x^2}$ 的一切 x 值，即区间 $[-1,1]$。在这种情况下，给出了对应关系也就给出了定义域，从而给出了整个函数。

4. $f(x_0)$ 或 $y|_{x=x_0}$ 表示函数 $y=f(x)$ 在点 $x=x_0$ 处的对应值，称为函数在点 x_0 处的值。在定义域内，所有函数值的全

体，称为函数的值域。

5. 通常采用分析法（或称公式法）、图示法及表格法等三种方法表示函数。

(1) 分析法： 两个变量之间的函数关系通过公式和分析式子指出：要对自变量施行哪些数学运算（如加、减、乘、除、乘方、开方、取对数、求正弦、余弦等等），以及按怎样的次序来进行这些运算，才能得出函数的对应值。我们说这些函数是用分析法表示的。例如：

$$y = ax^2 + bx + c, \quad y = \frac{1}{1 - x^2}, \quad y = \sqrt{1 + \sin 2x}.$$

等都是用分析法表示的函数。

由于用分析法表示的函数，形式比较简单、完整，便于从数学上对函数作定量的分析和运算，是我们今后主要采用的方法。但在实际问题中，有些函数有时很难、甚至不可能用公式来表示。

(2) 图示法： 如果把自变量 x 和因变量 y 分别当作直角坐标平面上点的横坐标和纵坐标，则函数的图形一般说来是坐标平面上的曲线（如图1-1）。用坐标平面上的曲线表示函数的方法称为图示法。

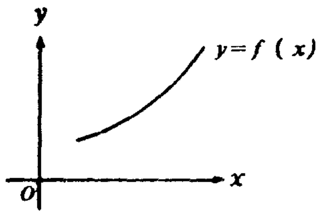

图 1-1

其优点在于直观、明显，能从图形上直接看到变量之间的依赖关系和变化趋势。缺点是不容易描得精确，有时不便于作理论研究。

(3) 表格法： 如常见的对数表、三角函数表等都是把自变

量中的一系列值与其对应的函数值列成表，这种表示函数的方法称为表格法。

表格法的优点在于能从表中直接查出某些函数值，避免了很多繁琐运算，使用方便。缺点是表中所列的值不够完全，有些值也可能不够精确。

为此，在实际应用中，必须从实际出发，选取适当的表示法，或互相配合、综合使用上述三种方法。

6. 在科学技术及经济领域中，还经常遇到那些在不同范围内用不同式子分段表示的函数，称为分段函数。

例如某工厂生产某产品每日最多生产 200 吨，固定成本为 150 元，生产量为 0 到 100 吨范围内，每多生产一吨，成本增加 5 元，而产量在 100 吨以上，每多生产一吨，成本只增加 3 元，那么成本 C（元）是日产量 x 的函数：

$$C=f(x)=\begin{cases}150+5x, & 0\leqslant x\leqslant 100,\\ 650+3(x-100), & 100<x\leqslant 200.\end{cases}$$

这个函数就是一个分段函数。对于分段函数，求某点的函数值，首先应判定该点所在的范围，然后选取函数在这范围内的表达式去计算。如日产量 50 吨的成本应由第一式去计算，得

$$C|_{x=50}=150+5\times 50=400\ （元）$$

而日产量为 110 吨的成本，应由第二式计算，得

$$C|_{x=110}=650+3\times(110-100)=680\ （元）。$$

7. 如下函数的几个方面特性是今后需要加以注意的：

(1) 有界性

定义 1.2 如果存在一个数 $M>0$，使得函数 $f(x)$ 在其定义域 D 内，不等式

$$|f(x)| \leqslant M$$

恒成立，则称$f(x)$在 D 内是有界的。否则，就称$f(x)$在 D 内是无界的。

例如，$y=\sin x$、$y=\cos x$在其定义域（$-\infty$，$+\infty$）内，都有

$$|\sin x| \leqslant 1 \ , \ |\cos x| \leqslant 1 \ ,$$

所以$y=\sin x$和$y=\cos x$在其定义域（$-\infty$，$+\infty$）内都是有界的。

而$y=\operatorname{tg} x$，$y=\operatorname{ctg} x$则是无界的。

同样地，$y=\dfrac{1}{\sqrt{x}}$在其定义域（0，$+\infty$）内也是无界的。

(2) 单调性

定义 1.3 在区间（a、b）内的任意两点 x_1 和 x_2，当 $x_1<x_2$ 时，如果有$f(x_1)<f(x_2)$，则称$f(x)$在区间（a、b）内是单调增加的；如果有$f(x_1)>f(x_2)$，则称$f(x)$在区间内是单调减少的。

单调增加的函数的图形是沿 x 轴的正向上升的曲线(图1-2)，单调减少的函数的图形是沿 x 的正向下降的曲线(图1-3)。

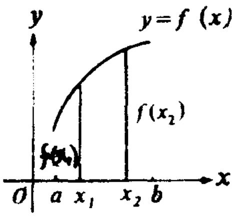

图 1-2

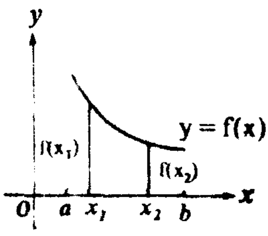

图 1-3

(3) 奇偶性

定义 1.4 设函数$f(x)$的定义域对称于原点，对于定义域内

任一 x，如果式子

$$f(-x)=-f(x)$$

成立，则称$f(x)$为奇函数；如果式子

$$f(-x)=f(x)$$

成立，则称$f(x)$为偶函数。

奇函数的图形（图 1–4）对称于原点，偶函数的图形（图 1–5）对称于 y 轴。

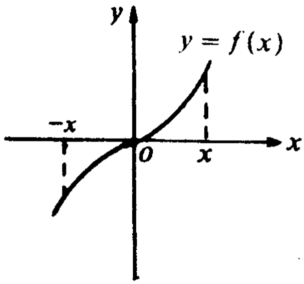

图 1–4

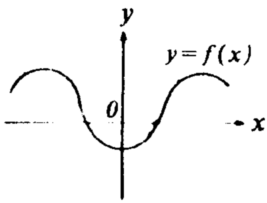

图 1–5

例如，$y=\sin x$是奇函数，$y=\cos x$是偶函数，$y=\sin x+\cos x$既不是奇函数也不是偶函数。

(4) 周期性

定义 1.5 如果至少存在一个数 T，使函数$y=f(x)$对于任意有意义的 x，都有关系式

$$f(x+T)=f(x)$$

成立，则称函数$f(x)$为周期函数。满足上式中的最小正数 T，称为该周期函数的周期（图 1–6）。

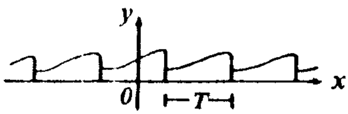

图 1–6

例如，$y=\sin x$，$y=\cos x$

是以 2π 为周期的周期函数；$y=\operatorname{tg} x$，$y=\operatorname{ctg} x$ 是以 π 为周期的周期函数。

思 考 题

1.什么叫做函数?函数定义中包括那两个要素?

2.函数 $f(x)=\log_a x^2$ 与 $g(x)=2\log_a x$ 相等吗?

3.函数 $f(x)=\dfrac{x^2-1}{x-1}$ 与 $g(x)=x+1$ 相等吗?

4.通常有哪三种方法表示函数?它们各有什么优缺点?

5.怎准判断函数的奇偶性、函数在一个区间的单调性?

§2 经济中常用的函数

在各种经济活动中，经常遇到各种各样的变量，如时间 (t)、产量 (x)、价格 (p)、成本 (C)、需求量或销售量 (Q)、收益 (R) 和利润 (L) 等。在某些过程中，其中某两个变量构成一定的函数关系，例如

1. 成本函数

在某个过程中，如果成本 (C) 是产量 (x) 的函数，则称这函数为成本函数，记为 $C=C(x)$。这时，$\dfrac{C(x)}{x}$ 表示产量为 x 时的平均成本。

例如，某厂为了生产某种产品，需一次性投入 b 元生产准备费，另外每生产一件产品需支出 a 元，所以，生产 x 件产品的总成本 C 是产量 x 的函数

$$C = C(x) = ax + b$$

其中 b 称为固定成本，ax 称为可变成本，而 $\bar{C} = \frac{C(x)}{x} = \frac{ax+b}{x}$ 称为平均成本。

2. 需求函数

如果需求量（Q）是价格（p）的函数，则称这函数为需求函数，记为 $Q = Q(p)$。如果价格（p）是需求量（Q）的函数，则这函数称为价格函数，记为 $p = p(Q)$。

3. 收益函数

如果收益（R）是销售量（Q）的函数，则称这函数为收益函数。如已知价格函数 $p = p(Q)$，则收益函数

$$R = p \cdot Q = Q \cdot p(Q) = R(Q)。$$

4. 利润函数

已知成本函数 $C = C(x)$，收益函数 $R = R(x)$，则利润（L）是产量（x）的函数，这函数被称为利润函数：

$$L = L(x) = R(x) - C(x)$$

例 1 某产品每日产量不超过 100 件，产量为 x 件时，产品的总成本为 $\frac{1}{2}x^2 + 50X + 50$，每件售价为 $80 - \frac{1}{4}x$，求其每日的利润。

解 由假定，总成本

$$C = \frac{1}{2}x^2 + 50X + 50$$

总收益

$$R = (80 - \frac{1}{4}x)x$$