高 等 学 校 教 材

可靠性分析的理论基础

武汉水利电力学院 潘 仲 立 编

水 利 电 力 出 版 社

高等学校教材
可靠性分析的理论基础
武汉水利电力学院　潘仲立　编
*
水利电力出版社出版
（北京三里河路6号）
新华书店北京发行所发行·各地新华书店经售
水利电力出版社印刷厂印刷
*
787×1092毫米　16开本　9印张　198千字
1988年11月第一版　1988年11月北京第一次印刷
印数0001—4400册　定价1.85元
ISBN 7-120-00404-2/TM·115

内 容 提 要

本书为高等工科院校电力类专业的选修课教材。共分七章，主要内容有：概率基本知识，元件可靠性模型，系统可靠性基本理论和计算方法，马尔可夫过程在可靠性分析中的应用，可靠性试验及其数据的处理，蒙特卡诺法及其在可靠性分析中的应用，可靠性管理优化。

本书除作为高等院校选修课教材外，也可供有关专业的研究生选用和从事可靠性工作的工程技术人员参考。

前　　言

本书是根据1984年4月在上海交通大学召开的“电力系统选修课教材编写大纲讨论会”所确定的大纲编写的。初稿经有关院校试用，并于1985年8月在成都科技大学召开的“电力系统教材编审组扩大会议（共28个院校参加）”上进行了讨论，与会同志对初稿提出了十分宝贵的意见和建议。会后，根据大家的意见和建议，作者对初稿进行了认真的修改。

全书由戴景宸教授主审。在教材编写过程中，还得到了西安交通大学孙启宏教授，上海交通大学白同朔副教授，浙江大学张万礼副教授，东北电力学院丘昌涛教授，湖南大学江荣汉副教授等的大力支持和帮助，作者在此一并表示感谢。

由于编者水平所限，书中难免有错误和不妥之处，恳请读者批评指正。

编　者

1986年11月

目　录

绪　　论

一、可靠性问题的提出和基本概念

长期以来人们在生产、工作和生活等各方面都在使用可靠性这一概念对事物进行评价和比较，如某个人可信或不可信，某个东西耐用或不耐用，发电厂或变电站的双母线比单母线可靠等。但这种定性的可靠性认识一般只能用在较简单事物的评价和比较上，并且给人的印象是模糊的。随着科学技术的发展，设备和系统的结构越来越复杂，对于复杂的设备、系统和事物，用定性的可靠性评价已不能满足生产和工作的需要，必须用现代科技理论和计算手段进行定量的可靠性分析和计算，才能正确的评价和改善复杂设备、系统和事物的可靠性，因此可靠性学科的产生和发展是生产和工作的需要，是历史的必然。

可靠性的定义是：元件、设备和系统等在规定的条件下和预定的时间内，完成规定功能的概率。

元件、设备和系统根据使用过程的不同分为可修复和不可修复两大类。可修复元件、设备和系统是指它们损坏后经过修理能恢复到原有功能而可以再投入使用者。不可修复元件、设备和系统是指它们在损坏后无法修复或无修复价值者。

在研究两类不同元件、设备和系统的可靠性问题时，我们用具体的可靠性指标来衡量。不可修复元件、设备和系统的可靠性指标是可靠度，它的定义是：“在规定的条件下和预定的时间内未发生故障这一事件的概率”。可修复元件、设备和系统可靠性指标是可用度（或称有效度），它的定义是：“在某一特定的时刻 t 能维持其正常功能的概率”。在可靠性分析中，使用得最多的是“稳态可用度”，它的定义是：“可修复元件、设备和系统在长期运行中处于或准备处于工作状态的时间所占的比例”。实际上稳态可用度也是一个概率值。由于元件、设备和系统的可靠性指标定义为一个概率量，这就使得元件、设备和系统的可靠性有了一个可以衡量和计算的定量标准。在实际工作中，对不同的元件、设备和系统还定义了一些其他的可靠性指标，这些可靠性指标也都是用概率量或统计量来表示。由此可见，概率与统计是可靠性分析的基础。

二、可靠性学科发展简史

可靠性研究开始于第二次世界大战时期，第一次正式的可靠性估计报告是德国为了探讨导弹的不良特性而提出的，这些导弹是由大量高可靠度的元件组成，这次研究后确定的一个重要结论是：一个当任一元件事故均可导致系统事故的系统，其可靠性等于各独立元件可靠性的乘积，因此，系统可靠性比这些元件中可靠性最低的一个还要低。今天，这一简单的结论已是尽人皆知的了，然而，在当时却是一个崭新的发现。

第二次世界大战后，可靠性首先应用于电子、核子和空间工程，因为这些领域要求高度的可靠性，从而促进了可靠性理论的迅速发展。

对电力系统可靠性的研究，第一批有价值的著作出现于1947年，在这些文章中，概率

数学的应用还是比较简单的，并且只限于研究发电系统的可靠性。20世纪60年代研究工作扩展到了输电系统和配电系统，并且使用了更为复杂的方法。

1965年9月北美电力系统发生了世界电业史上最严重的事故，从而促进了电力系统可靠性研究的进一步发展。现在可靠性研究工作几乎已扩展到电力系统的各个方面。

我国的可靠性研究工作近几年来得到了迅速的发展，可靠性理论的应用越来越广泛。随着四化建设和科学技术的发展，不但要求拥有一批专职的可靠性工程师和科学工作者，同时要求所有的工程技术人员都具有一定的可靠性理论知识，以提高各种产品、设备和系统的工作可靠性。

第一章　概率的基本知识

§ 1-1　随　机　事　件

一、随机事件

在自然界和人们的社会活动中所遇到的一切现象可分为两大类：一类是在特定的条件下一定会发生的现象，这种现象称为必然现象或必然事件。例如在标准大气压下，水加热到100℃时必然会沸腾。另一类是有了一定条件而现象却可能发生也可能不发生，这类现象称为随机现象或随机事件。例如掷一枚钱币，正面或反面出现是随机的，出现正面是一个随机事件，出现反面是另一个随机事件。

概率理论中的随机事件通常是通过随机试验来观察的，每次试验都可能得到不同的结果，称之为一个基本事件或单元素事件。可能出现的全体基本事件的集合组成一个样本空间s。例如掷两枚骰子的样本空间是

$$s=\{1,\ 1;\ 1,\ 2;\ \cdots\cdots 6,\ 5;\ 6,\ 6\}$$

其中的事件1，1和1，2等都是基本事件。

一般来说，事件是s的一个子集，这个子集包含所有满足定义的属性或要求的一些基本事件。例如两个骰子点数和为8的随机事件E_1为

$$E_1=\{2,\ 6;\ 3,\ 5;\ 4,\ 4\}$$

共包含三个基本事件。而两个骰子点数相等的随机事件E_2为

$$E_2=\{1,\ 1;\ 2,\ 2;\ \cdots\cdots 6,\ 6\}$$

共包含六个基本事件。显然包含全部基本事件的样本空间s也是一个随机事件，且是个必然事件。

二、事件之间的关系

1.两事件的并　事件E_a发生、事件E_b发生、事件E_a和E_b同时发生的事件称为两事件的并，如图1-1(a)所示。数学表达式为

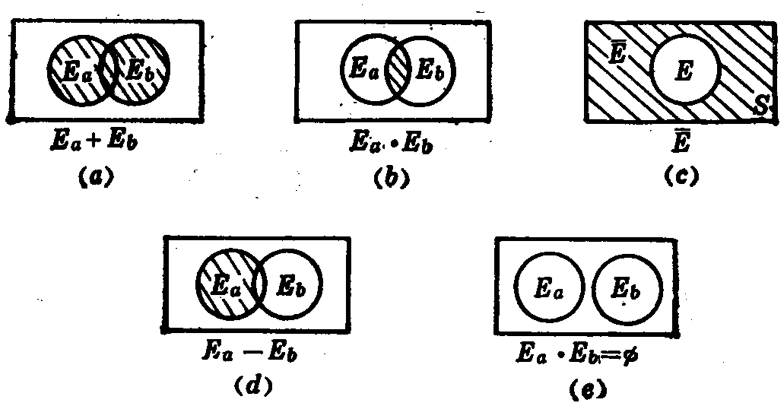

图 1-1　事件的关系与运算

$$E_a \cup E_b \quad 或 \quad E_a + E_b$$

2.两事件的交　两事件同时发生的事件，称为两事件的交。如图1-1(b)中E_a与E_b相交的阴影部分所表示的事件。数学表达式为

$$E_a \cap E_b \quad 或 \quad E_a \cdot E_b$$

3.事件的补　事件E没有出现的事件称为事件E的补，以$\bar{E}$表示，如图1-1(c)中阴影部分所表示的事件。因为任一次随机试验中E和$\bar{E}$不会同时发生，而且E和$\bar{E}$必然有一个发生，所以有

$$E \cdot \bar{E} = \phi \quad 及 \quad E + \bar{E} = s$$

式中　ϕ——不可能事件；

s——必然事件，在这里也是样本空间。

4.两事件E_a与E_b之差　事件E_a发生而E_b不发生的事件称为两事件之差，如图1-1(d)中阴影部分所表示的事件。显然有

$$E_a - E_b = E_a \bar{E}_b$$

5.互不相容事件　不可能同时发生的事件称为互不相容事件，如图1-1(e)，其特点是

$$E_a \cdot E_b = \phi$$

上面的定义虽然是对两个事件，但可以很容易地推广到多个事件的场合。

根据上述定义，不难证明表1-1所示的事件逻辑关系式都是正确的。表中A、B和C分别代表一般事件，1代表必然事件或样本空间，0代表不可能事件。

表 1-1　　事件逻辑运算基本关系式

	事件逻辑并关系式	事件逻辑交关系式
等幅律	$A \cup A = A$	$A \cap A = A$
交换律	$A \cup B = B \cup A$	$A \cap B = B \cap A$
结合律	$A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$	$A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$
吸收律	$A \cup (A \cap B) = A$	$A \cap (A \cup B) = A$
分配律	$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$	$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$
0-1律	$A \cup 0 = A$ $A \cup 1 = 1$	$A \cap 0 = 0$ $A \cap 1 = A$
互补律	$A \cup \bar{A} = 1$	$A \cap \bar{A} = 0$
戴·摩根定理	$\overline{A \cup B} = \bar{A} \cap \bar{B}$	$\overline{A \cap B} = \bar{A} \cup \bar{B}$

由表1-1的基本关系式可以看出，事件逻辑运算关系式都具有对偶性质，即，将任一事件的逻辑关系式中的并（加）与交（乘）相互交换后，得到的另一事件的逻辑关系式仍然成立。对0—1律，除交换并与交的形式外，还应对0与1进行交换。如

$$A \cap (\bar{A} \cup B) = A \cap B$$

和

$$(A \cap B) \cup (\bar{A} \cap C) = (A \cup C) \cap (\bar{A} \cup B)$$

则根据对偶性质，必然有关系式

$$A\cup(\bar{A}\cap B)=A\cup B$$

和

$$(A\cup B)\cap(\bar{A}\cup C)=(A\cap C)\cup(\bar{A}\cap B)$$

§1-2 事件的概率及其运算

一、事件的概率

事件的概率是量度事件发生的尺度，它是事件的函数，并且是个实函数，函数取值只能在 0 到 1 范围内，对必然事件其概率函数值为 1，对不可能发生的事件其概率函数值为零。因此事件E的概率函数$P(E)$必须满足下面的要求，即

$$0\leqslant P(E)\leqslant 1 \tag{1-1}$$

$$P(S)=1 \tag{1-2}$$

如果事件E_a和E_b互不相容，则有

$$P(E_a\cup E_b)=P(E_a)+P(E_b) \tag{1-3}$$

以上三个表达式，称为概率公理。显然，根据它们并不能直接求得某一已知事件的概率值，事件概率的实际值必须在试验或判断的基础上求得。一般求事件概率的方法可分为两种类型：一种是以试验为基础，称为客观概率，另一种是以判断为基础，称为逻辑概率。

1.以试验为基础的方法

以试验为基础的方法，即所谓相对频率法。若试验重复n次，其中事件E发生了n_E次，则E的概率估计值为

$$\hat{P}(E)=\frac{n_E}{n}$$

n越大，这一近似概率值就越准确。当n趋于无穷大时，n_E/n的极限值就定义为事件E的概率

$$P(E)=\lim_{n\to\infty}\frac{n_E}{n} \tag{1-4}$$

2.以判断为基础的方法

以判断为基础的方法有多种，这里介绍一种基于等可能结果的概率定义，也称之为古典概率定义。它规定，如果试验的结果是等可能的，那么某一事件出现的结果数与试验结果总数之比就是这个事件的概率。例如，当掷一颗骰子时，假设所有六个结果是等可能的，那么出现点数$\geqslant 3$的概率等于4/6。这个结果不需要做任何试验即可得到，因此又称为逻辑概率。

二、事件概率的运算

在可靠性分析中，经常是用试验或判断的方法，先确定某些事件的概率，例如先确定元件事件的概率，在此基础上，再计算系统事件的概率。而系统事件往往是元件事件的函数，所以系统事件的概率就由已知元件事件概率决定，这就要进行事件概率的运算。下面分两种情况进行讨论。

1.概率加法

当E_1，E_2，……E_n为互不相容事件时，由公理式（1-3）可直接推论而得到n个事件并的事件概率为

$$P\left(\sum_{i=1}^{n} E_i\right)=\sum_{i=1}^{n} P(E_i) \tag{1-5}$$

若E是S中的事件，有

$$P(E)+P(\bar{E})=1$$

或

$$P(E)=1-P(\bar{E}) \tag{1-6}$$

对两个相容事件，有

$$P(E_a+E_b)=P(E_a)+P(E_b)-P(E_aE_b) \tag{1-7}$$

对n个相容事件，有

$$P\left(\sum_{i=1}^{n} E_i\right)=\sum_{i=1}^{n} P(E_i)-\sum\sum_{i<j} P(E_iE_j)+\sum\sum\sum_{i<j<k} P(E_iE_jE_k)$$

$$-\cdots\cdots-(-1)^n P\left(\prod_{i=1}^{n} E_i\right) \tag{1-8}$$

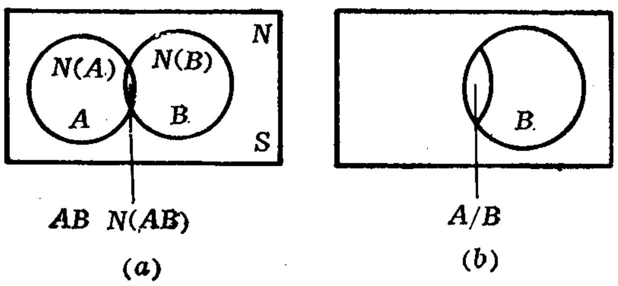

图 1-2 条件概率的解释

2.概率乘法

若一个事件A的概率与某个另外的事件B的发生与否有关，这时事件A的概率是有条件的，称为条件概率，用$P(A/B)$表示B已发生时A的概率。若将事件A、B、AB和A/B用图表示，则如图1-2所示。

因为 $$P(AB)=\frac{N(AB)}{N} \quad 及 \quad P(B)=\frac{N(B)}{N}$$

所以 $$P(A/B)=\frac{N(AB)}{N(B)}=\frac{P(AB)}{P(B)}$$

或 $$P(AB)=P(B)P(A/B) \tag{1-9}$$

由此可见，事件A/B是以B为样本空间上的事件A。这种一个事件的发生概率与另一个事件的发生有关的两个事件称为互相有关或非相互独立的两个事件。由图1-2可以明显看出，非独立的两个事件存在着下述关系：

$$P(A/B)\neq P(A) \quad 和 \quad P(B/A)\neq P(B)$$

在有些特殊场合，事件B的发生与否并不影响事件A的概率，称事件A与B相互独立。并有

$$P(A/B)=P(A) \quad 和 \quad P(B/A)=P(B)$$

从而 $$P(AB)=P(A)P(B) \tag{1-10}$$

式（1-10）是检验事件A和B独立性的基本公式。但在实际应用中，判断两个事件是否相互独立，常常是从实际经验出发。如果两事件相互间没有影响，就可以认为这两个事件相互独立。

必须指出，两个事件相互独立与互不相容是两个不同的概念。独立性是根据两事件的发生是否有相互影响来判断，互不相容是根据两事件是否会同时发生来判断，这两个概念并无什么联系。

如果事件A的概率是以$B_1, B_2, \cdots\cdots B_i\cdots\cdots B_n$为条件，其中$B_i$之间互不相容，并且$B_i$的并构成样本空间（如图1-3）。则

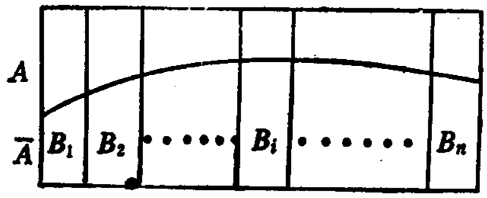

图 1-3　全概率图

$$
\begin{aligned}
P(A) &= P(A \cdot S) \\
&= P(AB_1 + AB_2 + \cdots\cdots + AB_n) \\
&= \sum_{i=1}^{n} P(AB_i) = \sum_{i=1}^{n} P(A/B_i)P(B_i)
\end{aligned}
\tag{1-11}
$$

式（1-11）就是全概率定理。

对n个非独立事件A_1，$A_2\cdots\cdots A_n$，有

$$
\begin{aligned}
P(A_1 \cdot A_2 \cdots\cdots A_n) = P(A_1)P(A_2/A_1)P(A_3/A_1A_2)\cdots\cdots \\
\cdots\cdots P(A_n/A_1A_2\cdots\cdots A_{n-1})
\end{aligned}
\tag{1-12}
$$

对n个独立事件，有

$$
P(A_1A_2\cdots\cdots A_n) = \prod_{i=1}^{n} P(A_i) \tag{1-13}
$$

§1-3　随机变量及其分布函数

对随机现象进行观察称为随机试验。在绝大多数随机试验中所得的试验结果往往可以用一个实数来描述，这种试验称为数值试验。由于试验有好些可能的结果，若以X表示，则称X为随机变量。例如，当对一批电阻器进行抽样试验时，随机变量可能是每个样品的电阻值。当掷两颗骰子时，随机变量可能是两个骰子点数的和。因此随机变量是个函数，其值随试验而变化。

随机变量的取值可能是连续的（如被抽样的电阻值），也可能是离散的（如两个骰子点数之和）。

为了掌握随机变量的分布规律，就必须研究随机变量的分布情况，即了解它取各种可能值的概率，为此引入了随机变量的概率分布的概念。

与随机变量X有关而特别值得研究的是$X \leqslant x$事件的概率，其中x为一已知实数。显然这一事件的概率是x的函数。这样定义的概率函数称为随机变量X的累计概率分布函数，用$F_X(x)$表示，即

$$
F_X(x) = P(X \leqslant x) \tag{1-14}
$$

累计概率分布函数具有下列特征：

（1）　$0 \leqslant F_X(x) \leqslant 1$

（2）　$F_X(-\infty) = 0$

　　　$F_X(+\infty) = 1$

（3）$F_X(x)$是递增函数。

如果随机变量是离散型，则用概率分布函数进行描述。这个函数定义为

$$P_X(x)=\begin{cases} P(X=x_i) & \text{当}X=x_i\text{时} \\ 0 & \text{其他情况} \end{cases} \tag{1-15}$$

式中x_i是X的离散值。$P_X(x)$和$F_X(x)$之间有如下关系

$$F_X(x)=\sum_{x_i<x} P_X(x_i) \tag{1-16}$$

如果随机变量是连续型，还可用概率密度函数来表示其概率分布。这个函数定义为

$$f_X(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{P(x<X\leqslant x+\Delta x)}{\Delta x}=\frac{dF_X(x)}{dx} \tag{1-17}$$

所以具有如下近似关系

$$P(x<X\leqslant x+\Delta x)\approx f_X(x)\Delta x$$

即随机变量X落在区间$(x,x+\Delta x)$的概率，近似等于$f_X(x)\Delta x$。显然

$$\int_{-\infty}^{\infty} f_X(x)dx=1 \tag{1-18}$$

$$F_X(x)=\int_{-\infty}^{x} f_X(x)dx \tag{1-19}$$

$$F_X(a)-F_X(b)=P_X(a<x\leqslant b)=\int_a^b f_X(x)dx \tag{1-20}$$

由此可见，在连续型随机变量中，随机变量落在某一个数值上的概率等于零，即$P_X(X=a)=0$。对离散型随机变量，则有

$$P_X(a<X\leqslant b)=F_X(b)-F_X(a) \tag{1-21}$$

$$P_X(a\leqslant X\leqslant b)=F_X(b)-F_X(a)+P_X(X=a) \tag{1-22}$$

$$P_X(a<X<b)=F_X(b)-F_X(b)-P_X(X=b) \tag{1-23}$$

$$P_X(a\leqslant X<b)=F_X(b)-F_X(a)+P_X(X=a)-P_X(X=b) \tag{1-24}$$

§1-4 分布的数字特征量

虽然累计概率分布函数、概率分布函数和概率密度函数已经可以准确而全面地描述随机变量的分布全貌。但有时还需要知道分布的某些其他性质，如随机变量分布的中心和分布的离散程度等。于是又定义了一些数字特征量来描述这些性质。

一、数学期望

这个数字特征量表征随机变量分布的平均值（即分布中心）。设X为离散型随机变量，它取值为x_1，x_2，……x_n，对应的概率分布函数为P_1，P_2，……P_n。则X的数学期望定义为

$$E(X)=\sum_{i=1}^{n} x_iP_i \tag{1-25}$$

因为$\sum_{i=1}^{n} P_i = 1.0$，所以$E(X)$实际上是X的加权平均。

【例 1-1】 图1-4示出了某随机变量X及其分布，求X的期望值。

解： $E(X)=\sum_{i=1}^{5} x_i P_i = 0.2\times 2+0.4\times 4+0.2\times 6+0.1\times 8+0.1\times 10=5$

显然若将P_i看作物理上的权，则X的期望就是重力中心。

对连续型随机变量，若其概率密度函数为$f_X(x)$，则X取值为$(x, x+dx)$的概率为$f_X(x)dx$，因此连续型随机变量的数学期望值为

$$E(X)=\int_{-\infty}^{\infty} x f_X(x)dx \tag{1-26}$$

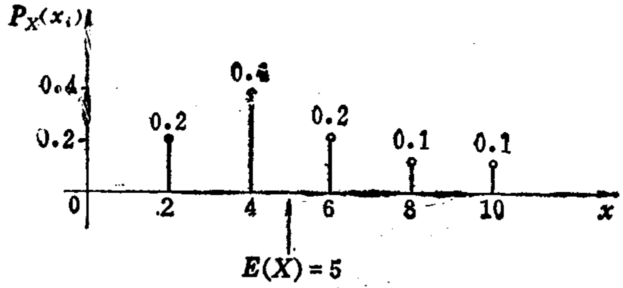

图 1-4 数学期望值与加权平均值的关系图

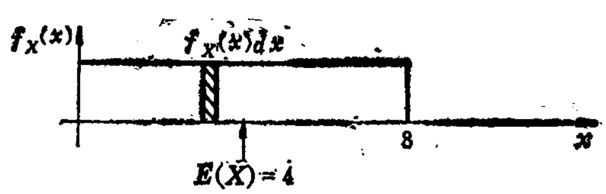

图 1-5 例1-2概率密度分布图

【例 1-2】 若连续型随机变量的概率密度函数为$f_X(x)=\frac{1}{8}(0\leqslant X\leqslant 8)$，如图1-5所示。求$X$的数学期望值。

解：
$$E(X)=\int_{-\infty}^{\infty} x f_X(x)dx=\int_{0}^{8} x\times\frac{1}{8}dx=4$$

在可靠性分析中，有时还用到数学期望的下面两个性质：

（1）线性性质。设X和Y为两个连续型随机变量，它们之间有关系

$$Y=aX+b$$

式中a和b为常数。则有

$$E(Y)=aE(X)+b \tag{1-27}$$

（2）和的性质。设Y及X_i（$i=1,2,\cdots\cdots n$）为随机变量，且有关系

$$Y=X_1+X_2+\cdots\cdots+X_n$$

则
$$E(Y)=E(X_1)+E(X_2)+\cdots\cdots+E(X_n) \tag{1-28}$$

二、方差

方差表征随机变量对于其数学期望的离散程度。方差值愈大，随机变量的值在其数学期望值左右分布愈宽，愈不集中。

对离散型随机变量X，其方差定义为

$$D(X)=\sum_{i=1}^{n}(x_i-E(X))^2 P_i \tag{1-29}$$

对连续型随机变量X，其方差定义为

$$D(X)=\int_{-\infty}^{\infty}[x-E(X)]^2 f_X(x)dx \tag{1-30}$$

可以证明

$$D(X)=E(X^2)-[E(X)]^2 \tag{1-31}$$

【例 1-3】 求两点分布的方差。

解：在两点分布中，X取值 0 和 1，其概率分别为$P_X(0)=q$，$P_X(1)=p$。因$E(X)=p$和$p+q=1$。

所以
$$D(X)=(0-p)^2q+(1-p)^2p=pq$$

【例 1-4】 已知均匀分布的密度函数为

$$f_X(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{b-a} & a\leqslant x\leqslant b\\ 0 & x<a\text{或}x>b\end{cases}$$

求均匀分布的方差。

解：因为

$$E(X)=\int_{-\infty}^{\infty}xf(x)dx=\int_a^b x\frac{1}{b-a}dx=\frac{a+b}{2}$$

$$E(X^2)=\int_{-\infty}^{\infty}x^2f(x)dx=\int_a^b x^2\frac{1}{b-a}dx=\frac{1}{3}(b^2-ab+a^2)$$

所以
$$D(X)=E(X^2)-[E(X)]^2=\frac{(b-a)^2}{12}$$

以上是当随机变量的取值和分布函数已知时，求$E(X)$和$D(X)$的方法。如果不知道随机变量的分布，而只有N次取样所得的资料，则期望值可由采样平均值$\overline{x}$求得，方差可由采样方差S^2求得。这些量的计算式是

$$\overline{x}=\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}x_i \tag{1-32}$$

$$S^2=\frac{1}{N-1}\sum_{i=1}^{N}(x_i-\overline{x})^2 \tag{1-33}$$

§ 1-5 可靠性分析中几种常用的概率分布

一、二项分布

假设电力系统有n台发电机组，每台机组只有两种状态，即运行状态或停运状态，且已知运行状态的概率为p，停运状态的概率为q，各机组状态相互独立。这里随机变量X是所有n台机组中运行的台数，如果此数等于r，则停运台数一定是$(n-r)$。根据概率运算规则，n个独立的机组中同时有r个运行的事件概率为$p^rq^{(n-r)}$。由于n台机组中可能出现r台运行的组合数为

$$\binom{n}{r}=\frac{n(n-1)\cdots\cdots(n-r+1)}{1\cdot 2\cdots\cdots r}=\frac{n!}{r!(n-r)!} \tag{1-34}$$

随机变量X的概率分布函数为

$$P_X(r)=P(X=r)=\binom{n}{r}P^r q^{(n-r)} \tag{1-35}$$

$$r=0,1,2,\cdots\cdots n$$

因为二项式（$p+q$）^{n}的展开式为

$$(p+q)^n=\sum_{r=0}^{n}\binom{n}{r}p^r q^{(n-r)}$$

所以式（1-35）恰为$(p+q)^n$二项式的第r项，故当随机变量X的概率分布函数满足式（1-35）时，称X服从二项分布，通常以$B(p,n)$表示，括号中为已知参数。

二项分布的数学期望为

$$E(X)=\sum_{x=0}^{n}x\binom{n}{x}p^x q^{(n-x)}=np \tag{1-36}$$

二项分布的方差为

$$D(X)=E(X^2)-[E(X)]^2=npq \tag{1-37}$$

二、泊松分布

当试验次数n很大，$p\ll 1$，且$r\ll n$时，用式（1-35）计算则很麻烦。例如某射击试验，设每次击中目标的概率等于$p=0.001\ll 1$，当然每次击不中目标的概率为$1-p=0.999=q$。如果总射击次数$n=5000$次，问至少两次击中目标的概率是多少？

显然，击中目标的次数X是个服从二项分布的随机变量。至少两次击中目标的概率为

$$\begin{aligned}P_X(X\geqslant 2)&=P_X(X=2)+P_X(X=3)+\cdots\cdots+P_X(X=5000)\\&=1-P_X(X=0)-P_X(X=1)\\&=1-C_n^0p^0q^{n-0}-C_n^1p^1q^{n-1}\\&=1-(0.999)^{5000}-5000\times 0.001\times(0.999)^{4999}\\&=0.9598\end{aligned}$$

对于这种服从二项分布的特殊情况，可以进行下面的近似处理，因为$n\gg r$，所以有

$$\binom{n}{r}=\frac{n(n-1)(n-2)\cdots\cdots(n-r+1)}{r!}\approx\frac{n^r}{r!} \tag{1-38}$$

$$\begin{aligned}q^{(n-r)}&=(1-p)^{(n-r)}\approx(1-p)^n\\&=1-np+\frac{n(n-1)}{2\cdot 1}p^2\cdots\cdots\\&\approx e^{-np}\end{aligned} \tag{1-39}$$

将式（1-38）和（1-39）代入式（1-35），且令$np=m$，则得

$$P_X(r)=P_X(X=r)=\frac{m^r e^{-m}}{r!} \tag{1-40}$$

式（1-40）就是泊松分布的概率函数，通常以$P(m)$表示。当用泊松分布代替二项分布时，上例的值为