高中数学 I

基础300题解

〔日〕土桥　恭编
孙　涤　寰译

吉林人民出版社

高中数学Ⅰ基础300题解

〔日〕土桥 恭 编

孙涤襄 译

吉林人民出版社

高中数学Ⅰ基础300题解

〔日〕土桥　恭编

孙 涤 寰译

*

吉林人民出版社出版　吉林省新华书店发行

长春新华印刷厂印刷

*

787×1092毫米32开本　10½印张　229,000字

1981年[illegible]月第1版　1981年3月第1次印刷

印数：1—105,210册

书号：7091·1200　定价：0.78元

内 容 提 要

本书是配合日本现行高中数学Ⅰ而编选的题解。内容包括代数、几何、三角、概率、集合和逻辑方面的300道习题及其解答。其内容和难易程度基本上相当于我国新编中学数学教材的水平。习题较为新颖，富有启发性。本书特点是，着重考查学生对基础知识理解和掌握的程度以及运用基础知识分析和解决问题的能力，以便得到相应的提高。

本书可供高中学生及中学数学教师参考。

序　　言

据说："牛顿少年时，在剑桥大学附近的夜市，买到一本《欧几里德几何学原本》进行学习，可是又觉得它的内容只不过是常识性的东西，因此便弃之不学了，马上又自鸣得意地学起《笛卡尔的坐标几何学》.1664年4月在参加选拔享受德利尼奖学金的考试中，他的几何成绩不佳，完全失败了，考试官巴罗博士提醒他说：'因为你缺乏几何学的基础知识，所以怎么学也白费'，他认真地总结了这个教训，振作起精神，于是又重新刻苦地、反复地学习了《欧几里德几何学原本》，从而开始领会到几何学的奥妙，同时深切地感到，在所有的学术方面，基础知识是非常重要的，从此转变了学习态度，终于成为数学史上罕见的大数学家."

我认为在高中的数学学习中，一开始对好象容易的地方，就马马虎虎地应付过去，只一个劲地死记硬背难题解法的毫无实力的学生是大有人在的。

数学是在一个基础理论之上积累其他基础理论，由这些基础理论构成的严谨理论体系，这一点可以说是数学的生命。

1979年实行的第一次统一考试，也是想要调查一下"高中阶段应达到的一般的、基本的学习程度"，在数学I*的广泛的范围内，出了把重点放在基础知识上的试题，要求综合性的知识. 所以，不仅要记住基础知识，而且必须有灵活运用基础知识的能力，因此应当在根据教科书复习基础知识之

* 日本高中数学教科书——译者注

后，通过典型的重要的习题来掌握“数学的思考方法”，并把基础知识全部整理出来，以便应付实际的需要或考试。

本书是根据上述宗旨，从教科书的基础知识出发，把标准的入学试题（第一次统一考试的标准）作为上限，精选300道题，分成九章，按发展的阶段编排的。它的内容不仅适用于想要掌握数学Ⅰ基本内容的人，而且也很适用于想参加第一次统一考试的人。

由于全部习题采用符号表格解答的形式，所以自己运用的公式、计算方法、思考方法等是否正确，马上就能得到验证。因为在平时的学习中对基础知识的检查，或在统一考试中都采用了符号表格形式，所以要在应试之前使用本书，熟悉这种解题形式。

使用本书时，要特别注意下列几点：

① 沉着冷静地看准题，抓住题意；

② 经常考虑曲线及几何图形的背景；

③ 注意整理题中所包含的基础知识；

④ 不是填窟窿式的，而要作为一般的设问形式的题来解；

⑤ 答案要弄准号码，整整齐齐地填满；

⑥ 修改处要擦干净，尽可能使用塑料橡皮；

⑦ 以坚强的毅力，坚持到底。

希望同学们很好地使用这本习题集，并祝取得成功。

东京都立秋川高中　土桥　恭

目　录

习题

解答

习　　题

1　数、式的计算

§1　整式的计算

[1] 设　$A=2x^3+3x^2-6$　　$B=12+3x^2-x^3-2x$
$C=3x-2x^3-x^2-4$ 时，回答下列的(1)～(3)：

(1)　$A+B+C=-\boxed{a_1}x^3+\boxed{b_1}x^2+\boxed{c_1}x+\boxed{d_1}$

(2)　$A-B=\boxed{a_1}x^3+\boxed{b_1}x^2+\boxed{c_1}x-\boxed{d_1e_1}$

(3)　$2A-[B+(3C+A)-2B]$

$=\boxed{a_1}x^3+\boxed{b_1}x^2-\boxed{c_1d_1}x+\boxed{e_1f_1}$

$\boxed{\text{提示}}$ 把同类项纵向对齐即可。(3)化简 $2A-[B+(3C+A)-2B]=A+B-3C$ 之后，再计算。

[2] 展开下列各式：

(1)　$(3x+4)(2x-5)$

$=\boxed{a_1}x^2+\boxed{b_1c_1}x+\boxed{d_1e_1f_1}$

(2)　$(x+2y)^3=x^3+\boxed{a_1}x^2y+\boxed{b_1c_1}xy^2+\boxed{d_1}y^3$

（3） $(x+2)(x^2-2x+4)=\boxed{a_1}x^3\ \boxed{b_1}x^2+\boxed{c_1}x+\boxed{d_1}$

（4） $(2a-b)(4a^2+2ab+b^2)=\boxed{a_1}a^3+\boxed{b_1}a^2b+\boxed{c_1}ab^2+\boxed{d_1e_1}b^3$

$\boxed{\text{提示}}$ （1） $(ax+b)(cx+d)=acx^2+(ad+bc)x+bd$

（2） $(a+b)^3=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$

（3） $(a+b)(a^2-ab+b^2)=a^3+b^3$

（4） $(a-b)(a^2+ab+b^2)=a^3-b^3$

[3] 展开下列各式：

（1） $(a+2b-3c)(a-2b+3c)=\boxed{a_1}a^2+\boxed{b_1c_1}b^2+\boxed{d_1e_1}c^2+\boxed{f_1}ab+\boxed{g_1h_1}bc+\boxed{i_1}ca$

（2） $x(x+1)(x+2)(x+3)=x^4+\boxed{a_1}x^3+\boxed{b_1c_1}x^2+\boxed{d_1}x+\boxed{e_1}$

$\boxed{\text{提示}}$ 复杂式子的展开，如果适当地代换，并在加、乘的顺序上想些办法，就能利用公式展开。（1）设 $2b-3c=t$，则原式 $=(a+t)(a-t)=a^2-t^2$。（2）原式 $=x(x+3)\times(x+1)(x+2)=(x^2+3x)(x^2+3x+2)$，这里设 $x^2+3x=t$，则原式 $=t(t+2)=t^2+2t$。

[4] （1） $(a^2-3ab+2b^2)\div(a-b)$ 的商式是 $\boxed{a_1}a+\boxed{b_1c_1}b$，余式是 $\boxed{d_1}$。

（2） $(3-13x^2+4x^4-16x)\div(2x^2+1-3x)$ 的商式是

$\boxed{a_1}x^2+\boxed{b_1}x+\boxed{c_1d_1}$，余式是$-\boxed{e_1f_1}x+\boxed{g_1}$。

提示　整式的除法，按一个字母的降幂排列整理之后，用同整数一样的方法进行除法运算，求得商式和余式。

§2　因式分解

［ 5 ］将下列各式作因式分解：

（1）$5a^3b+25a^2b^2-15ab^3$

$$=\boxed{a_1}a^{\boxed{b_1}}b^{\boxed{c_1}}(\boxed{d_1}a^2+\boxed{e_1}ab+\boxed{f_1g_1}b^2)$$

（2）$x(a-b)+y(a-b)=(\boxed{a_1}a+\boxed{b_1c_1}b)(\boxed{d_1}x+\boxed{e_1}y)$

（3）$2a(3a-b)+b(b-3a)$

$$=(\boxed{a_1}a+\boxed{b_1c_1}b)(\boxed{d_1}a+\boxed{e_1f_1}b)$$

（但$a_1<d_1$）

提示　提取公因式。$ma+mb=m(a+b)$

$ma+mb+mc=m(a+b+c)$

［ 6 ］将下列各式作因式分解：

（1）$4x^2+12x+9=(\boxed{a_1}x+\boxed{b_1})^2$

（2）$x^2+\boxed{a_1b_1}x+16=(x+\boxed{c_1})(x+8)$

(3) $a^2+3a-18=(a+\boxed{a_1})(a+\boxed{b_1c_1})$

提示 (1) $a^2+2ab+b^2=(a+b)^2$

(2) $x^2+(a+b)x+ab=(x+a)(x+b)$

[7] 将下列各式作因式分解：

(1) $3x^2-10x+3=(3x-\boxed{a_1})(x-\boxed{b_1})$

(2) $2x^2+5xy-3y^2=(x+\boxed{a_1}y)(\boxed{b_1}x-\boxed{c_1}y)$

(3) $x^2+(2y-1)x+y(y-1)$

$$=(x+\boxed{a_1}y+\boxed{b_1})(x+\boxed{c_1}y-1)$$

提示 (1) $acx^2+(bc+ad)x+bd=(ax+b)(cx+d)$

$$\begin{array}{lll} a & b \longrightarrow bc & \\ & \times & \\ c & d \longrightarrow ad & \\ \hline ac & bd & bc+ad \end{array}$$

x^2的系数　常数项　x的系数

(2) 与$2x^2+5x-3$的因式分解同样考虑。 (3) 二元二次式对于一个字母x（或y）整理之后，再进行因式分解。

[8] 将下列各式作因式分解：

(1) $64a^3-27=(\boxed{a_1}a+\boxed{b_1c_1})\times$

$$(\boxed{d_1e_1}a^2+\boxed{f_1g_1}a+\boxed{h_1})$$

(2) $8x^3+12x^2+6x+1=(\boxed{a_1}x+\boxed{b_1})^3$

$\boxed{\text{提示}}$ （1） $a^3-b^3=(a-b)(a^2+ab+b^2)$

（2） $a^3+3a^2b+3ab^2+b^3=(a+b)^3$

[9] 将下列各式作因式分解：

（1） $x^2y^4-1=(x^{\boxed{a_1}}y^{\boxed{b_1}}+1)\times$

$$(x^{\boxed{c_1}}y^{\boxed{d_1}}-1)$$

（2） $a^2-(b-1)^2$

$$=(a+\boxed{a_1}b+\boxed{b_1c_1})\ (a+\boxed{d_1e_1}b+\boxed{f_1})$$

（但是，$a_1>d_1e_1$）

（3） $12x^2-3y^4=\boxed{a_1}\ (\boxed{b_1}x+\boxed{c_1}y^2)\times$

$$(\boxed{d_1}x-\boxed{e_1}y^2)$$

$\boxed{\text{提示}}$ $a^2-b^2=(a+b)(a-b)$

[10] 将下列各式作因式分解：

（1） $x^4-13x^2+36=(x^2-\boxed{a_1})\ (x^2-\boxed{b_1})$

$$=(x+\boxed{c_1})\ (x-\boxed{d_1})\ \times$$

$$(x+\boxed{e_1})(x-\boxed{f_1})$$

（设$a_1<b_1$，$c_1\leqslant d_1\leqslant e_1\leqslant f_1$）

（2） $a^4-5a^2b^2-36b^4=\ (a^2+\boxed{a_1}b^2)\ (a^2-\boxed{b_1}b^2)$

$$=(a^2+\boxed{a_1}b^2)\ (a+\boxed{c_1}b)(a-\boxed{d_1}b)$$

【提示】 双二次式，设$x^2=t$，则

（1） 原式$=t^2-13t+36=(t-4)(t-9)$．由此，原式

$$=(x^2-4)(x^2-9).$$

［11］ 关于$A=3x^2+xy-2y^2+6x+y+3$在方框$\boxed{}$内填上适当的数．

（1） 把A变为$3x^2+Bx+C$的形式，则$B=\boxed{a_1}y+\boxed{b_1}$，

$C=\boxed{c_1d_1}y^2+\boxed{e_1}y+\boxed{f_1}$，但$B$、$C$是$y$的整式，

（2） 把A因式分解，则$(x+\boxed{a_1}y+\boxed{b_1})\times$

$(\boxed{c_1}x+\boxed{d_1e_1}y+\boxed{f_1})$．

【提示】 A式的因式分解是在关于y的式子C因式分解基础上进行的。

［12］ 在下面的$\boxed{}$内填上适当的数或符号，当$a=\boxed{a_1b_1c_1}$时，$x^2+7xy+ay^2-5x+43y-24$能分解为两个一次式的积$(x+\boxed{d_1e_1}y+\boxed{f_1})(x+\boxed{g_1}y+\boxed{h_1i_1})$．但，设$d_1e_1<g_1$．

【提示】 根据待定系数法，设原式$=(x+py+3)(x+qy-8)$．

§3 整式的因式、倍式

［13］ 试求下列两个整式的最高公因式与最低公倍式．

（1） $6a^2b^2c^3$，$9ab^3$

G.C.M* $\boxed{a_1}\,a^{\boxed{b_1}}\,b^{\boxed{c_1}}\,c^{\boxed{d_1}}$

L.C.M** $\boxed{e_1 f_1}\,a^{\boxed{g_1}}\,b^{\boxed{h_1}}\,c^{\boxed{i_1}}$

（2） x^3+7x^2+12x，x^2-x-20

G.C.M $\boxed{a_1}\,x^2+\boxed{b_1}\,x+\boxed{c_1}$

L.C.M $(x+\boxed{d_1})(x+\boxed{e_1})(x+\boxed{f_1})\times$

$(x+\boxed{a_1 h_1})$ $(d_1<e_1<f_1)$

$\boxed{\text{提示}}$ 最高公因式的求法是：先对已给的整式进行因式分解，取出一切公因式，再写上各因式的最小方指数。最低公倍式的求法是：先取出一切不同的因式，再写上各因式的最大方指数。还有，含有整系数的情形，一般是分别写上它们的最大公约数，最小公倍数。

［14］ 设最高公因式是 $x-1$，最低公倍式是$x^3-6x^2+11x-6$，则有次数相等的两个整式$(x-1)\times(\boxed{a_1}\,x+\boxed{b_1 c_1})$ 和 $(x-1)(\boxed{d_1}\,x+\boxed{e_1 f_1})$。

$(b_1 c_1>e_1 f_1)$。

$\boxed{\text{提示}}$ 如设整式A、B的最高公因式是G，最低公倍式是L，则$A=GA'$，$B=GB'$．A'、B'互质，$L=GA'B'$．因此，从$L\div G$求得A'、B'。

§4 分式、比例式

［15］ 计算下列各式：

（1） $\dfrac{x^2-y^2}{x^2-(y-z)^2}\times\dfrac{(x-y)^2-z^2}{x^2-xy}$

* 最高公因式　　** 最低公倍式——译者注

$$+\frac{x^2+2xy+y^2}{x^2+xy-xz}=-\frac{\boxed{a_1}}{\boxed{b_1}}$$

⓪ $x+y-z$　① $x-y+z$　② $x-y-z$

③ $x+y+z$　④ $x+y$　⑤ $y+z$

⑥ $z+x$　⑦ $x-y$　⑧ $y-z$

⑨ $z-x$

（2） $\frac{a^4-16}{a^4+8a^2+16}\times\frac{a^3-8}{a^2+4}\div\frac{a^2+2a+4}{a^2+4a+4}=\frac{1}{\boxed{a_1}}$

⓪ a^2-2a+4　① a^2+2a+4　② a^2+4

③ $a+2$　④ $a-2$　⑤ $(a+2)^2$

⑥ $(a-2)^2$

提示 （1） $\frac{A}{B}\times\frac{C}{D}\div\frac{E}{F}=\frac{ACF}{BDE}$

（2） $\frac{A}{B}\div\frac{C}{D}\times\frac{E}{F}=\frac{ADE}{BCF}$

[16] 计算下列各式。

（1） $\frac{2x-1}{x+5}-\frac{2x+1}{x-2}$

$$=-\frac{\boxed{a_1b_1}x+\boxed{c_1}}{\boxed{d_1}x^2+\boxed{e_1}x-\boxed{f_1g_1}}$$

（2） $\frac{x+1}{x-1}+\frac{x}{x+1}-\frac{2x^2+x}{x^2-1}=\frac{\boxed{a_1}x+\boxed{b_1}}{x^{\boxed{c_1}}-1}$

提示 设A，B是整式。A除以B商是Q，余式是R，则$A=BQ+R$　$\therefore\frac{A}{B}=Q+\frac{R}{B}$。当在分子的次数≥分母的次数时，用这样的变形有效。