线性代数原理

线性代数原理

张远达 编

上海教育出版社

线性代数原理

张远达 编

上海教育出版社出版

（上海永福路 123 号）

新华书店上海发行所发行　上海群众印刷厂印刷

开本 787×1092 1/32　印张 16.75　字数 366,000

1980 年 8 月第 1 版　1980 年 8 月第 1 次印刷

印数 1—20,000 本

统一书号：7150·2185　　定价：1.35 元

前 言

线性代数这门学科，在十九世纪就已经获得了光辉的成就．由于它在数学的许多分支以及物理、技术科学中有越来越广泛的应用，所以直到目前，它不仅在代数，而且在科学技术的许多领域里，都占有重要的地位．正因为这个原故，需要学习和了解线性代数的读者越来越多．作为一个数学工作者，写一本便于自修线性代数的书籍，应为刻不容缓的．

编写这书的目的，是想详细地、系统地阐述线性代数的主要内容，以利于读者自修．因此，本书在写法上，每章甚至每节的开头，总是把要解决的问题明确提出，让读者先有一个梗概．对于线性代数的初等部分，如行列式和线性方程组的理论，仍给以一定的篇幅．对于非齐次(线性的)方程组的基础解系这个问题，在一般书上就谈得很少，而本书完全用讲齐次方程组之基础解系的平行的办法来讲，借以对照看出齐次与非齐次之间无实质性的差异．而讲基础解系时势必牵涉到向量间的线性相关及无关的概念，这对初学者理解时往往感觉困难较大，本书环绕"行列式等于零的充要条件是它的行(或列)为线性相关"这个问题为中心来写是合宜的．

线性代数传统的写法大致有两种，一是从线性空间的线性变换的所谓不变子空间的概念出发，引出线性变换的一些标准形(如有理标准形、约旦标准形、对角形等)；另一种写法是从矩阵的角度入手，直接讲求矩阵的这样一些标准形的具体方法．前一种写法的优点在于把几何问题能够阐明得非常

透彻，但其缺点是对某一个矩阵怎样用具体的方法求得它的标准形，往往使初学的同志感到陌生；后一种写法固可使读者明了怎样实际求矩阵之标准形的方法，但对于其几何意义则茫无所知. 线性代数实际上产生于解析几何，线性代数与解析几何有紧密的联系，故若丢掉几何意义，只讲矩阵之标准形的实际求法，这不是一个好的方法. 然考虑到矩阵是数学本身以及应用科学的一个很重要的工具，又不得不突出矩阵，所以本书是突出矩阵的运算，但紧接着就详尽阐述它们的几何意义，借以开阔读者的视野，洞悉几何与代数之内在的联系.

因此，全书自始至终，对代数与几何的关系都给以重视，例如坐标变换、二次曲面(曲线)的分类(投影、仿射、度量)都反复作了说明，这样既联系了几何，也丰富了线代数的内容. 同样，在讲了实直交矩阵之实标准形后(第八章)，也跟着说明直觉空间(三维与二维的)内的直交变换究竟表示怎样的几何运动.

当然，由于本书是研究线性代数，所以对于提及的几何材料不能要求自成几何系统，只能把几何材料看成是线性代数的应用. 线性代数的应用自然不只限于解析几何，如数学分析和微分方程，它们与线性代数的关系也很密切，因而在第六章末说明了怎样利用二次齐式中有定及不定的理论来解决数学分析中多元函数之极大极小问题，在第五章第 6 节后面紧接着又介绍了利用矩阵之有理标准形与约旦标准形来解微分方程组. 本书尤其对线性代数在微分方程中的应用给以特别的重视，故第九章讲矩阵分析，目的是说明怎样利用矩阵知识来解决一阶变系数线性非齐次微分方程组的解之存在及唯一性问题. 同时，也在第九章，利用矩阵分析知识研究了在线性代数计算方法中解线性方程组之迭代法的收敛条件.

第十章讨论几个特殊问题，如直积、复合矩阵、特征值的估计、矩阵之极分解、全矩阵环的基．利用复合矩阵而通过极分解，说明酉矩阵与厄米特矩阵在线性代数中的重要地位，因而对酉矩阵与厄米特矩阵的特性又作了深入一步的探讨．

1962年时，作者曾与熊全淹先生合编《线性代数》一书，近年来，学习（包括自修）线性代数的读者渐多，各方来信询问这书甚为殷切，但考虑作者在62年的书对自学者不尽相宜，鉴于各方面的这一要求理应重新改写，限于个人学识水平，不妥甚至谬误之处一定很多，望广大读者指正．

武汉大学　张远达

一九七九年三月

目　　录

第一章 行 列 式

本章讨论下面五个问题：1．行列式的概念是怎样形成的？2．行列式有什么性质？3．怎样计算一个行列式？4．如何应用行列式的性质来解线性方程组？5．行列式的性质与计算可以怎样推广？

第1节 行列式的概念

行列式这个概念究竟是怎样形成的呢？这就得从解一次方程组谈起．

我们都知道怎样解方程组：

$$\begin{cases} a_1x+b_1y=k_1, \\ a_2x+b_2y=k_2. \end{cases} \tag{1}$$

具体步骤是：从(1)里先消去 y 而求得 x，这只要将(1)的第一、二两个式子分别乘以 b_2 与 $-b_1$，然后再相加，就得到

$$(a_1b_2-a_2b_1)x=k_1b_2-k_2b_1.$$

同理，在(1)中也可消去 x 而求得 y，这就要将(1)的第一、二两个式子分别乘以 $-a_2$ 与 a_1，然后再相加，得到

$$(a_1b_2-a_2b_1)y=a_1k_2-a_2k_1.$$

于是，在 $D=a_1b_2-a_2b_1\neq 0$ 时，(1)的解为

$$\begin{cases} x=\dfrac{k_1b_2-k_2b_1}{a_1b_2-a_2b_1}, \\ y=\dfrac{a_1k_2-a_2k_1}{a_1b_2-a_2b_1}. \end{cases} \tag{2}$$

反之，容易检验(2)又确为(1)的解.

(2)式尽管提供了方程组(1)之解的公式，但(2)式很难记忆．为了易于记住(2)式，我们要从表示式中发现一些字母之间的规律.

可以发现，(2)中 x 与 y 的表示式中的分母是相同的，即都等于 $a_1b_2-a_2b_1$，而这个数又仅与(1)中 x, y 的系数有关，与常数项无关．如果把这些系数按它们在原来方程组中的位置写出，并在两旁各加一条竖直线，即用符号

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}$$

来表示 $a_1b_2-a_2b_1$ 这个数，即

$$D=\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}=a_1b_2-a_2b_1. \tag{3}$$

我们把(3)称为*二级行列式*，把 D 中横写的叫做*行*，竖写的叫做*列*，因此(3)含有两个行与两个列．从(3)式看出：符号 $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}$ 可看成是：从左上角到右下角的对角线上两个元素相乘取符号“+”所得的 a_1b_2，再将其中从右上角到左下角的对角线上两个元素相乘取符号“−”所得的 $-a_2b_1$，然后再把这两个结果合并就得到了(3)式．这就是计算二级行列式的规则.

利用这个规则，即可把(2)中 x 与 y 之表达式的分子分别表成

$$\begin{vmatrix} k_1 & b_1 \\ k_2 & b_2 \end{vmatrix} \quad 与 \quad \begin{vmatrix} a_1 & k_1 \\ a_2 & k_2 \end{vmatrix},$$

于是(2)式可记成

$$x=\frac{\begin{vmatrix} k_1 & b_1 \\ k_2 & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}},\quad y=\frac{\begin{vmatrix} a_1 & k_1 \\ a_2 & k_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}}.$$

象这样用二级行列式来表达方程组(1)的解的公式，非常简便，而且也容易记忆.

再看含三个未知量 x_1, x_2, x_3 的三个方程所成的方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+a_{13}x_3=b_1, \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+a_{23}x_3=b_2, \\ a_{31}x_1+a_{32}x_2+a_{33}x_3=b_3. \end{cases} \tag{4}$$

为了解(4)式，就得消去(4)中的任两个未知量，求得只含一个未知量的方程. 例如把(4)的第一、二、三个方程分别用 $a_{22}a_{33}-a_{23}a_{32}$, $a_{13}a_{32}-a_{12}a_{33}$, $a_{12}a_{23}-a_{13}a_{22}$ 去乘，然后再加起来，结果可知 x_2 与 x_3 的系数都等于零，而得到等式:

$$\begin{aligned}(a_{11}a_{22}a_{33}&+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}-a_{11}a_{23}a_{32}-a_{12}a_{21}a_{33} \\ &-a_{13}a_{22}a_{31})x_1 \\ &=b_1a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}b_3+a_{13}b_2a_{32}-b_1a_{23}a_{32} \\ &\quad -a_{12}b_2a_{33}-a_{13}a_{22}b_3.\end{aligned}$$

所以，当

$$\begin{aligned}D=a_{11}a_{22}a_{33}&+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}-a_{11}a_{23}a_{32} \\ &-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{13}a_{22}a_{31}\neq 0\end{aligned}$$

时，就得到

$$x_1=\frac{b_1a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}b_3+a_{13}b_2a_{32}-b_1a_{23}a_{32}-a_{12}b_2a_{33}-a_{13}a_{22}b_3}{a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}-a_{11}a_{23}a_{32}-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{13}a_{22}a_{31}}.$$

用类似的方法，可求得

$$x_2=\frac{a_{11}b_2a_{33}+b_1a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}b_3-a_{11}a_{23}b_3-b_1a_{21}a_{33}-a_{13}b_2a_{31}}{a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}-a_{11}a_{23}a_{32}-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{13}a_{22}a_{31}},$$

$$x_3=\frac{a_{11}a_{22}b_3+a_{12}b_2a_{31}+b_1a_{21}a_{32}-a_{11}b_2a_{32}-a_{12}a_{21}b_3-b_1a_{22}a_{31}}{a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}-a_{11}a_{23}a_{32}-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{13}a_{22}a_{31}}.$$

这就是说：当 $D\neq0$ 时，方程组(4)如果有解，这解必是上面那样的形状.

反之，将这样的 x_1, x_2, x_3 的值代入方程组(4)，也容易检验它们确是(4)的解. 所以，当 $D\neq0$ 时，方程组(4)有唯一的一组解，即是上面 x_1, x_2, x_3 的表达式.

同前面一样，为了便于记忆这公式，我们要从这些表达式中发现一些字母之间的规律.

首先，我们看到 x_1, x_2, x_3 的表达式里分母都等于 D；而 $x_i(i=1, 2, 3)$ 的表达式之分子，是将 D 中凡 x_i 之系数 a_{1i}, a_{2i}, a_{3i} 分别用 b_1, b_2, b_3 去替换而成的. 于是，只要对分母的结构弄清楚了，则 x_1, x_2, x_3 之表达式的结构也就搞清楚了.

与引进二级行列式一样，用符号

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \tag{5}$$

来表示 D，即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}-a_{11}a_{23}a_{32}-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{13}a_{22}a_{31};$$

(5)中含有三行、三列，我们把(5)称为*三级行列式*. 上式表明，(5)是由六个项组成，其中每一项都是(5)中三个元素的乘积，且每个乘积含有每一行及每一列的一个元素且仅含每一行每一列的一个元素，因此，其中的每一项都可以写成下面的形式：

$$a_{1p}a_{2q}a_{3r}, \tag{6}$$

其中 p, q, r 是自然数 1, 2, 3 的某排列. 与二级行列式类

似，引用对角线法则，很容易把(5)中正负项写出来．先写出一个有六条对角线的表，如

$$\left|\begin{array}{ccc|cc} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{31} & a_{32} \end{array}\right.$$

这对角线表是将原三级行列式的第一、二两列重复写出依次附加在三级行列式的右边而成，其中每一条对角线把三个元素连在一块取其积，在实线对角线上三个元素的乘积冠以“+”号，在虚线对角线上三个元素的乘积冠以“－”号，然后把这六个乘积加起来，就得到三级行列式(5)的值．

引用三级行列式的记号，对方程组(4)，当 $D\neq 0$ 时，它的唯一的一组解就可写成：

$$x_1=\frac{\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}},\qquad x_2=\frac{\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}},$$

$$x_3=\frac{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}}.$$

怎样把二级、三级行列式的意义推广到一般的 n 级行列式，并利用它来表达由 n 个未知量 n 个方程所组成的线性方程组的

解呢？从上面的推导可知，由两个未知量中消去一个比较容易，而由三个未知量中消去两个就已经很麻烦了，至于一般，由 n 个未知量中消去 $n-1$ 个，在理论上虽然是可能的，但要具体地实施，其困难程度可想而知. 因此，n 级行列式的定义也就不能用上面类似的方法去求得.

我们来详细研究一下二级、三级行列式的结构，找出它们内在的规律，然后根据它来形式地定义 n 级行列式. 可以看出，为了得到(5)中所有的项，只需要在乘积(6)中使第二个指标 p, q, r 取 1, 2, 3 的所有可能的六种不同的排列

$$1,\ 2,\ 3;\ 2,\ 3,\ 1;\ 3,\ 1,\ 2;\ 1,\ 3,\ 2;\ 2,\ 1,\ 3;\ 3,\ 2,\ 1 \tag{7}$$

就行了. 但是，乘积(6)在(5)中出现的时候，有一些带有正号，另一些却带有负号，这就还需要指明选择正负号时所依据的法则. 实际上，(6)中带有正号的那些项(即乘积)的第二个指标 p, q, r 形成下列的三个排列：

$$1,\ 2,\ 3; \qquad 2,\ 3,\ 1; \qquad 3,\ 1,\ 2; \tag{8}$$

带有负号的那些乘积的第二个指标 p, q, r 形成下列的三个排列：

$$1,\ 3,\ 2; \qquad 2,\ 1,\ 3; \qquad 3,\ 2,\ 1. \tag{9}$$

现在问(8)中的三个排列与(9)中的三个排列的区别是什么？为此，先要引入一个逆序的概念.

任意两个自然数，如果大的在小的前面，就叫这两个自然数间有一个*逆序*. 一个排列中所有任意两个数的逆序数的和，叫做这排列的*逆序数*. 在(8)中，对第一个排列，没有逆序(即逆序数等于零)；在第二个排列中，如果逐次把每一个数同它后面的各个数比较，容易看出有两个逆序(一个是2在1前，另一个是3在1前)；同样，可以看出，第三个排列也有两个逆序(一个是3在1前，另一个是3在2前). 于是，我们得知

(8)中所有的排列都有偶数个逆序. 用同样的方法可知, (9)中所有的排列都有奇数个逆序. 当排列的逆序数为偶数或奇数时, 就叫该排列分别为偶排列或奇排列. 这就告诉我们, (5)中各项正负号选择的法则是: (5)中任一项(6)应冠以正号或负号,完全由它的第二个指标形成的排列 p, q, r 为偶排列或奇排列来决定.

在上述讨论基础上,我们可以得到:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \sum_{(p,q,r)} (-1)^{[p,q,r]} a_{1p} a_{2q} a_{3r}, \tag{10}$$

式中符号 $[p, q, r]$ 表示排列 p, q, r 的逆序数,符号 $\sum\limits_{(p,q,r)}$ 表示对 1, 2, 3 的所有可能的排列取和.

因为 1, 2 两个数的所有可能的排列只有 1, 2 与 2, 1 两个,前者的逆序数为零,后者的逆序数为 1, 所以

$$\begin{aligned} \sum_{(p,q)} (-1)^{[p,q]} a_{1p} a_{2q} &= (-1)^{[1,2]} a_{11} a_{22} + (-1)^{[2,1]} a_{12} a_{21} \\ &= a_{11} a_{22} - a_{12} a_{21}, \end{aligned}$$

因之,有

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = \sum_{(p,q)} (-1)^{[p,q]} a_{1p} a_{2q},$$

这恰与(10)式的形式一致. 这就是说, 二级行列式的概念为三级行列式的特例. 在(10)式基础上,不难推广到一般的情形: 设有 n^2 个数,把它们写成一个有 n 行和 n 列的符号,如

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}. \tag{11}$$

我们叫(11)为 n 级行列式,它表示所有这样乘积的代数和, 即

每个乘积含有 n 个元素，使每行每列的元有且只有一个出现在该乘积中，于是这些乘积都可以写成下面的形式：

$$a_{1p_1}a_{2p_2}\cdots a_{np_n}, \tag{12}$$

其中 $p_1, p_2, \cdots, p_n$ 是 $1, 2, \cdots, n$ 的某一排列，每个这样的排列依 $1, 2, \cdots, n$ 的顺序来比较就有一个逆序数，当这逆序数为偶数时，这项取(+)号，而当逆序数为奇数时，这项就取负(−)号．用式子表示，就是：

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{(p_1, p_2, \cdots, p_n)} (-1)^{[p_1, p_2, \cdots, p_n]} \cdot a_{1p_1}a_{2p_2}\cdots a_{np_n}, \tag{13}$$

其中符号 $[p_1, p_2, \cdots, p_n]$ 表示排列 $p_1, p_2, \cdots, p_n$ 的逆序数，符号 $\sum\limits_{(p_1, p_2, \cdots, p_n)}$ 表示要对 $1, 2, \cdots, n$ 的所有排列取和．

因为 n 个数字 $1, 2, \cdots, n$ 的所有排列共有 $1\cdot 2\cdot\cdots\cdot n = n!$ 个，所以 n 级行列式共有 $n!$ 个项．

还需说明的是，对于行列式(11)中的每个元素 a_{ij}，它的右下角有两个下标，第一个下标"i"表示元素 a_{ij} 所在的行的序数，第二个下标"j"则表示这元素所在的列的序数，于是 a_{ij} 又表明它是第 i 行第 j 列的元素．而(13)中把每项写成乘积 $a_{1p_1}a_{2p_2}\cdots a_{np_n}$ 的形式，其意义就是要将每项的 n 个元素依照行的先后次序来写(例如 a_{1p_1} 是在第一行上的，所以写在乘积的最前面，a_{2p_2} 是在第二行上的，所以写在乘积的第二位，最后 a_{np_n} 是在第 n 行上的，所以写在乘积的第 n 位)．所谓 $p_1, p_2, \cdots, p_n$ 依顺序 $1, 2, \cdots, n$ 来比较其逆序数，就是说按照列的顺序来比较逆序数．至于当元素 a_{ij} 的第一个下标 i 不