中学数学习题汇编

陕西科学技术出版社

中学数学习题汇编

高希尧 编

陕西科学技术出版社

出 版 说 明

为了提高教学质量，根据教育部教学大纲的要求和现行教材，我们组织编写了一套中学数、理、化教学参考读物，陆续出版。

中学数学习题汇编

高希尧　编

陕西科学技术出版社出版

（西安北大街131号）

陕西省新华书店发行　国营五二三厂印刷

开本 787×1092 1/32　印张 30.125　字数 646,000

1980年10月第1版　1980年10月第1次印刷

印数 1—39,000

统一书号：7202·3　定价：2.15元

前　言

为配合中学数学教学，我们编选了这本《中学数学习题汇编》，供中学学生和数学爱好者练习使用。也为中学数学教师提供一些参考资料。

全书内容包括代数、平面几何、立体几何、三角和平面解析几何五章，共1800余题，大部分选自国内外数十年来高考入学试题和数学竞赛试题。所选内容一般不超过现行中学数学教学大纲所规定的范围，且具有较强的技巧性和综合性。此外，也选用了少量难度较大的习题，以供爱好者研习之用。各部分习题前编有解法提要，书后配有较详细的解答或提示。有些习题解法不一，由于篇幅所限，多仅录一种，供读者参考。

本书编选过程中，承蒙陕西师大魏庚人、胡宗慎、西安师专夏自强、西安二十中侯宗仁诸先生审阅指导；陕西省教育学院翟振化、陕西师大附中谷炎城诸同志也曾给予热情支持和帮助，谨此一并表示衷心感谢。

由于编者学识浅陋，功力不逮，缺点错误在所难免，恳切希望读者提出批评指正。

高　希　尧

1979．6．　西　安

目　　录

第一章 代 数

一、代数式的变换

解 法 提 要

1. 代数式的恒等变形：改变代数式的形式，而保持它的值不变．进行恒等变形，要根据整式、分式、根式等的性质和运算法则熟练选用公式，并注意变形过程中字母的允许值范围．

2. 因式分解的方法：（1）提取公因式法；（2）分组分解法；（3）十字相乘法；（4）乘法公式；（5）利用余数定理；（6）综合除法．

3. 变形中要特别注意绝对值和算术根．

$$\sqrt{a^2}=|a|=\begin{cases}a，当 a\geqslant 0 时；\\ -a，当 a<0 时．\end{cases}$$

4. 关于数的整除性问题：

（1）注意任何一个 n 位数，定可写成

$$a_0 10^{n-1}+a_1 10^{n-2}+\cdots+a_k 10^{n-K}+\cdots+a_n \text{ 的形式．}$$

（2）判断一个数能否被另一数 a 整除，常用方法有：(a) 把该数分成两部分，使其中一部分能被 a 整除，只需研究另一部分能否被 a 整除；(b) 把该数分解出含有 a 的因子；(c) 利用数学归纳法证明；(d) 利用二项式定理．

（3）如果研究一个多项式 A 能否被多项式 B 整除，还可从多项式能否包含多项式 B 的所有根来判别．

分解因式（1—16）：

1. $(ab+ac+bc)(a+b+c)-abc$.

2. $(a+b+c)^3-a^3-b^3-c^3$.

3. x^3+5x^2+3x-9.

4. $x^4+x^2+\sqrt{2}\,x+2$.

5. $x^5+x^4+x^3+x^2+x+1$.

6. $a^3+b^3+c^3-3abc$.

7. $y^3(a-x)-x^3(a-y)+a^3(x-y)$.

8. $(1+x+x^2+x^3+\cdots+x^n)^2-x^n$.

9. $x^{10}+x^5+1$.

10. $\sqrt[3]{a^2b^4}+\sqrt[3]{b^2c^4}+\sqrt[3]{c^2a^4}-(\sqrt[3]{b^4c^2}+\sqrt[3]{c^4a^2}+\sqrt[3]{a^4b^2})$.

11. $bc(b+c)+ca(c-a)-ab(a+b)$.

12. $a^2b^2(b-a)+b^2c^2(c-b)+c^2a^2(a-c)$.

13. $x^2y+xy^2+x^2z+xz^2+y^2z+yz^2+2xyz$.

14. $x^2y+xy^2+x^2z+xz^2+y^2z+yz^2+3xyz$.

15. $x^3(x^2-7)^2-36x$.

16. $(x+1)(x+3)(x+5)(x+7)+15$.

17. 化简 $\left(2\frac{7}{9}\right)^{\frac{1}{2}}+0.1^{-2}+\left(2\frac{10}{27}\right)^{-\frac{2}{3}}$。

18. 求值 $\left(\frac{1}{300}\right)^{-\frac{1}{2}}+10\cdot\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^{\frac{1}{2}}\left(\frac{27}{4}\right)^{\frac{1}{4}}-10(2-\sqrt{3})^{-1}$.

19. 化简 $|6-a|-|2a+1|+\sqrt{a^2+10a+25}$，其中 $a<-5$.

化简下列各式（20—35）：

20. $y=\sqrt{x^2+4x+4}+\sqrt{x^2-2x+1}+\sqrt{x^2-6x+9}$.

21. $y=\sqrt{x^2+4x+4}+\sqrt{x^2-2x+1}$.

22. $$\frac{1}{1-x}+\frac{1}{1+x}+\frac{2}{1+x^2}+\frac{4}{1+x^4}+\frac{8}{1+x^8}+\frac{16}{1+x^{16}}.$$

23. $$\frac{1}{(a-b)(a-c)}+\frac{1}{(b-c)(b-a)}+\frac{1}{(c-a)(c-b)}.$$

24. $$\frac{1}{x(x+1)}+\frac{1}{(x+1)(x+2)}+\frac{1}{(x+2)(x+3)}$$

$$+\frac{1}{(x+3)(x+4)}+\frac{1}{(x+4)(x+5)}.$$

25. $$\frac{a-c}{a^2+ac+c^2}\cdot\frac{a^3-c^3}{a^2b-bc^2}\cdot\left(1+\frac{c}{a-c}-\frac{1+c}{c}\right)$$

$$+\frac{c(1+c)-a}{bc}.$$

26. $$\frac{\left[\dfrac{(a+x)^2}{ax}-4\right]\cdot\left[\dfrac{(a-x)^2}{ax}+4\right]:(a^6-x^6)}{(a^2x-ax^2):\{[(a+x)^2-ax]\cdot[(a-x)^2+ax]\}}$$

$$\cdot\frac{a-\dfrac{ax}{a+x}}{a+\dfrac{ax}{a-x}}.$$

27. $$\left[1.5-\left(x^4-\frac{x^4+1}{x^2+1}\right)\cdot\frac{x^3-x(4x-1)-4}{x^7+6x^6-x-6}\right]$$

$$+\frac{x^2+29x+78}{3x^2+12x-36}.$$

28. $$\frac{(\sqrt{a}-\sqrt{b})^3+2a^2:\sqrt{a}+b\sqrt{b}}{a\sqrt{a}+b\sqrt{b}}+\frac{3\sqrt{ab}-3b}{a-b}.$$

29. $\left\{\dfrac{1+x^{\frac{1}{2}}y^{\frac{1}{2}}(x^3+y^6)^{\frac{1}{2}}}{x^{\frac{1}{2}}y^{\frac{1}{2}}[1-xy(x^3+y^6)]}\right\}^{-1}$。

30. $\left(\dfrac{\sqrt[4]{ax^3}-\sqrt[4]{a^3x}}{\sqrt{a}-\sqrt{x}}+\dfrac{1+\sqrt{ax}}{\sqrt[4]{ax}}\right)^{-2}\cdot\sqrt{1+2\sqrt{\dfrac{a}{x}}+\dfrac{a}{x}}$。

31. $\left(\dfrac{\sqrt{1+a}}{\sqrt{1+a}-\sqrt{1-a}}+\dfrac{1-a}{\sqrt{1-a^2}-1+a}\right)$

$\times\left(\sqrt{\dfrac{1}{a^2}-1}-\dfrac{1}{a}\right)$。 （其中 $0<a<1$）

32. $[(a^{-\frac{3}{2}}b^2)^{-1}\cdot(ab^{-3})^{\frac{1}{2}}\cdot(b^{\frac{1}{2}})^7]^{\frac{1}{3}}$。

33. $\left(27a^{\frac{5}{2}}\sqrt{ab^{-\frac{1}{3}}\sqrt[4]{b^{\frac{4}{3}}}}\right)^{\frac{1}{3}}$。 $(b\neq 0)$

34. $\dfrac{a^{2n+1}-6a^{2n}+9a^{2n-1}}{a^{n+1}-4a^n+3a^{n-1}}$。

35. $\dfrac{[(a+b)^{-\frac{1}{2}}+(a-b)^{-\frac{1}{2}}]^{-1}+[(a+b)^{-\frac{1}{2}}-(a-b)^{-\frac{1}{2}}]^{-1}}{[(a+b)^{-\frac{1}{2}}+(a-b)^{-\frac{1}{2}}]^{-1}-[(a+b)^{-\frac{1}{2}}-(a-b)^{-\frac{1}{2}}]^{-1}}$。

36. 求当 $x=\sqrt[4]{2}$，$y=\sqrt[8]{3}$ 时，$\dfrac{\dfrac{x}{8y^3}+\dfrac{1}{4y^2}}{x^2+2xy+2y^2}$

$-\dfrac{\dfrac{x}{8y^3}-\dfrac{1}{4y^2}}{x^2-2xy+2y^2}-\dfrac{1}{4y^2(x^2+2y^2)}$

$+\dfrac{1}{4y^2(x^2-2y^2)}$的值。

37. 当 $x=\dfrac{\sqrt{3}}{4}$时，计算$\dfrac{1+2x}{1+\sqrt{1+2x}}+\dfrac{1-2x}{1-\sqrt{1-2x}}$。

38. 当 $x=\sqrt{3}-\sqrt[3]{2}$ 时，计算

$$\frac{x^2-2x\sqrt{3}-\sqrt[3]{4}+3}{x-\sqrt{3}}.$$

39. 当 $a=(2+\sqrt{3})^{-1}$，$b=(2-\sqrt{3})^{-1}$ 时，计算

$$(a+1)^{-1}+(b+1)^{-1}。$$

40. 当 $x=\sqrt[3]{7+5\sqrt{2}}-\dfrac{1}{\sqrt[3]{7+5\sqrt{2}}}$ 时， 求 $x^3+3x-14$ 的值。

41. 若 $0<x<1$，化简

$$\left(\frac{\sqrt{1+x}}{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}+\frac{1-x}{\sqrt{1-x^2}+x-1}\right)$$

$$\times\left(\sqrt{\frac{1}{x^2}-1}-\frac{1}{x}\right)。$$

42. 化简 $y=(x+2\sqrt{x-1})^{-\frac{1}{2}}+(x-2\sqrt{x-1})^{-\frac{1}{2}}$，其中 $x\geqslant 1$，$x\neq 2$。

43. 当 $x=(a+\sqrt{a^2-1})^{\frac{2mn}{m-n}}$，$(a>1,\ m\neq n,\ m\neq 0,\ n\neq 0)$ 计算 $(\sqrt[m]{x}+\sqrt[n]{x})^2-4a^2\sqrt[mn]{x^{m+n}}$.

44. 当 $x=a\left(\dfrac{m^2+n^2}{2mn}\right)^{\frac{1}{2}}$，$(a>0,\ n>m>0)$ 计算

$$\left[\frac{(x^2+a^2)^{-\frac{1}{2}}+(x^2-a^2)^{-\frac{1}{2}}}{(x^2+a^2)^{-\frac{1}{2}}-(x^2-a^2)^{-\frac{1}{2}}}\right]^{-2}.$$

45. 若 $\dfrac{x}{a-b}=\dfrac{y}{b-c}=\dfrac{z}{c-a}$，而 a、b、c 各不相等，计算 $x+y+z$。

46. 证明 $\sqrt{a\pm\sqrt{b}}=\sqrt{\dfrac{a+\sqrt{a^2-b}}{2}}\pm\sqrt{\dfrac{a-\sqrt{a^2-b}}{2}}$.

($a>0$, $b>0$, $b<a^2$)

47. 化简 $\dfrac{2+\sqrt{3}}{\sqrt{2}+\sqrt{2+\sqrt{3}}}+\dfrac{2-\sqrt{3}}{\sqrt{2}-\sqrt{2-\sqrt{3}}}$.

48. 化简 $2\sqrt{3+\sqrt{5-\sqrt{13+\sqrt{48}}}}$.

49. 若 $x\leqslant 2$, 证明 $\sqrt{x+2\sqrt{x-1}}+\sqrt{x-2\sqrt{x-1}}=2$.

50. 证明 $\sqrt{2+\sqrt{3}}\cdot\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{3}}}$

$$\times\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{3}}}}$$

$$\times\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{3}}}}=1.$$

分母有理化（51—60）：

51. $\dfrac{1}{1+\sqrt{2}+\sqrt{3}}$.

52. $\dfrac{1}{2+\sqrt{5}+2\sqrt{2}+\sqrt{10}}$.

53. $\dfrac{1}{2+\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{4}}$.

54. $\dfrac{12}{\sqrt[3]{11}-\sqrt[3]{5}}$.

55. $\dfrac{1}{\sqrt[3]{4}+\sqrt[3]{6}+\sqrt[3]{9}}$.

56. $\dfrac{1}{\sqrt[4]{2}+\sqrt[4]{4}+\sqrt[4]{8}+2}$.

57. $\dfrac{1}{\sqrt[2n]{a}-\sqrt[2n]{b}}$.

58. $\dfrac{1}{\sqrt{\sqrt{2}+\sqrt[3]{3}}}$.

59. $\dfrac{1}{(5-\sqrt{3})^{6}}$.

60. $\dfrac{1}{\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}+\sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{z}}$,

其中 $\dfrac{a}{x}=\dfrac{b}{y}=\dfrac{c}{z}$.

61. 证明数$\sqrt{2}$的无理性。

62. 试证 lg 3 是个无理数。

63. 求$(1+4x-4x^2)^{175}(1+2x)^5(1-3x+x^2+2x^3)^{149}$展开后的多项式各项系数之和。

64. 把$(6x^5-5x^4+4x^3-3x^2+x-2)^{1979}$展开并合并同类项后，试计算所得多项式系数之和。

65. 求$(x^3-2x+2)^{35}(x^2-5x+3)^{18}$展开式各项系数之和。

66. 证明 $(1-x+x^2-x^3+\cdots-x^{99}+x^{100})(1+x+x^2+\cdots+x^{100})$ 展开并合并同类项后，多项式中不含 x 的奇次幂项。

67. 把 $2x^3-x^2+2x-4$ 变为 $a(x-2)^3+b(x-2)^2+c(x-2)+d$ 的形式。

68. 试确定 a、b 之值，使 $x^4+ax^3+2x^2+bx-2$ 能被 x^2-x-2 所整除。

69. 证明多项式 $x^3+y^3+z^3-3xyz$ 可被 $x+y+z$ 整除。

70. 求定一个三次式 $f(x)$，使 $f(1)=0$，$f(2)=-16$，$f(3)$

$=-20$，$f(4)=0$。

71．证明 $2^{55}+1$ 可被 11 整除。

72．设 n 为正整数，证明 $13^{2n}-1$ 是 168 的倍数。

73．证明 $7^{21}-487$ 可被 288 整除。

74．若 n 是偶数，证明 $13^{n}+6$ 可被 7 整除。

75．证明连续四个自然数之积与 1 的和是一个完全平方数。

76．证明对于任何自然数 n，$3^{2n}-8n-1$ 都能被 64 整除。

77．证明三个连续整数的立方和可被 9 整除。

78．证明对于任何整数 n，分数 $\dfrac{14n+3}{21n+4}$ 都是既约分数。

79．证明形式为 a^4+4 的数（a 是任意整数，$a\neq 1$）是一个合数。

80．证明对于任何正整数 n，$n^3+\dfrac{3}{2}n^2+\dfrac{1}{2}n-1$ 都是整数，且用 3 除时余 2。

81．证明 $\sqrt{10}[(1+\sqrt{10})^{100}-(1-\sqrt{10})^{100}]$ 是整数。

82．若 n 为任意整数，证明 n^2-n+1 为奇数。

83．证明对于 x 的任意实数值，

$$(x-1)(x-3)(x-4)(x-6)+10$$

是正数。

84．设 m 为正整数，证明乘积

$$(x^m-1)(x^{m-1}-1)(x^{m+1}-1)$$

可被 $(x-1)(x^2-1)(x^3-1)$ 整除。

85．设 k 为自然数，证明 $x^{3k}+x^{32}+x^{28}$ 可被 x^2+x+1 整除。

86．设 m、n 为自然数，求

$$a^{m-1}+a^{m-2}+\cdots+a+1$$

可被 $a^{n-1}+a^{n-2}+\cdots+a+1$

整除的条件。

87. 证明

$$a^2\cdot\frac{(x-b)(x-c)}{(a-b)(a-c)}+b^2\cdot\frac{(x-c)(x-a)}{(b-c)(b-a)}$$

$$+c^2\cdot\frac{(x-a)(x-b)}{(c-a)(c-b)}=x^2.$$

88. 证明：若 $m+n+p=0$，则 $m^3+n^3+p^3=3mnp$。

89. 若 $a+b+c=0$，证明

$$\left(\frac{a-b}{c}+\frac{b-c}{a}+\frac{c-a}{b}\right)\left(\frac{c}{a-b}+\frac{a}{b-c}+\frac{b}{c-a}\right)$$

$$=9.$$

90. 证明：若实数 a，b，c 之间有下列关系

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=\frac{1}{a+b+c},$$

则其中一定有两数互为相反的数。

91. 证明：若$\frac{a}{b}=\frac{b}{c}$，则$\frac{a^2+b^2}{b^2+c^2}=\frac{a}{c}$。

92. 若$\frac{a_1}{b_1}=\frac{a_2}{b_2}=\cdots=\frac{a_n}{b_n}$，求证

$$(a_1^2+a_2^2+\cdots+a_n^2)(b_1^2+b_2^2+\cdots+b_n^2)=(a_1b_1+a_2b_2+\cdots+a_nb_n)^2.$$

93. 若 $a_1^2+a_2^2+\cdots+a_n^2=p^2$，$b_1^2+b_2^2+\cdots+b_n^2=q^2$，且 $a_1b_1+a_2b_2+\cdots+a_nb_n=pq$，

求证 $\frac{a_1}{b_1}=\frac{a_2}{b_2}=\cdots=\frac{a_n}{b_n}=\frac{p}{q}$。(题中各字母皆为实数)

94. 已知$\frac{a_1}{b_1}=\frac{a_2}{b_2}=\cdots=\frac{a_k}{b_k}$，且 c_1，c_2，$\cdots c_k$ 皆不为 0，求证

$$\left(\frac{a_1}{b_1}\right)^n=\frac{c_1a_1^n+c_2a_2^n+\cdots+c_ka_k^n}{c_1b_1^n+c_2b_2^n+\cdots+c_kb_k^n}.$$

95. 已知$\frac{a_1}{b_1}=\frac{a_2}{b_2}=\cdots=\frac{a_n}{b_n}$，求证

$$\sqrt{a_1b_1}+\sqrt{a_2b_2}+\cdots+\sqrt{a_nb_n}$$
$$=\sqrt{(a_1+a_2+\cdots+a_n)(b_1+b_2+\cdots+b_n)}.$$

$(a_k>0,\ b_k>0,\ k=0,\ 1,\ 2,\ \cdots n)$

96. 已知 n 为奇数，且$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=\frac{1}{x+y+z}$，求证

$$\frac{1}{x^n}+\frac{1}{y^n}+\frac{1}{z^n}=\frac{1}{x^n+y^n+z^n}.$$

97. 设 x，y，z 为三个不相等的实数，且 $x+\frac{1}{y}=y+\frac{1}{z}$ $=z+\frac{1}{x}$，求证 $x^2y^2z^2=1$。

98. 证明 $\sqrt[3]{20+14\sqrt{2}}+\sqrt[3]{20-14\sqrt{2}}=4$。

99. 证明 $\sqrt[3]{2+\sqrt{5}}+\sqrt[3]{2-\sqrt{5}}=1$。

100. 证明 $\sqrt{8+2\sqrt{10+2\sqrt{5}}}+\sqrt{8-2\sqrt{10+2\sqrt{5}}}$ $=\sqrt{2}\,(\sqrt{5}+1)$。

101. 证明 $\sqrt[3]{26+15\sqrt{3}}=\sqrt{7+4\sqrt{3}}$。