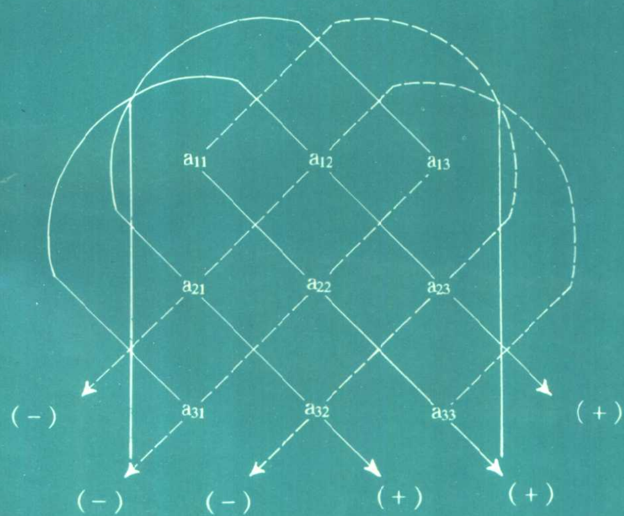
财经类高等数学系列教材 ②

熊福生 主编

线性代数



中国金融出版社

财经类高等数学系列教材
主　编　郭青峰
副主编　李庆高　王明惠
　　　　杨冬莲　熊福生

（第二分册）

线　性　代　数

本册主编　熊福生

责任编辑:张聪林
封面设计:孔维云
责任印制:谷晓红

图书在版编目(CIP)数据

线性代数-熊福生主编.-北京:中国金融出版社,1996.5
ISBN 7-5049-1605-6

Ⅰ.线…
Ⅱ.熊…
Ⅲ.线性代数
Ⅳ.0151.2

中国版本图书馆 CIP 数据核字(96)第 07421 号

出版:中国金融出版社
发行:
社址:北京广安门外小红庙南街 3 号
邮编:100055
经销:新华书店
印刷:北京北方印刷厂印刷
开本:850 毫米×1168 毫米 1/32
印张:10.25
字数:295 千字
版次:1996 年 8 月第 1 版
印次:1996 年 8 月第 1 次印刷
印数:1—6000
定价:15.40 元

编者说明

随着我国经济体制改革的深入发展和社会主义市场经济体制的建立与完善，经济管理水平日益提高经济决策的科学化、计量化与经济理论的数量化已成为必然趋势。因此，未来社会对于高等财经人才的数学素质和知识水平的要求也会越来越高。为了适应这一发展趋势，我们编写了这套《财经类高等数学系列教材》。

《财经类高等数学系列教材》是根据“高等学校财经类专业核心课程教学大纲”编写的。这套教材吸收了《经济数学基础》教材的优点，并更加突出了基本概念、基本知识和基本技能训练的要求，进一步体现了高等数学作为一门基础理论课的功能，以加强对学生数学素质的培养；同时，对于教材的体系结构，也力求做到更为合理。

《财经类高等数学系列教材》包括：《微积分》、《线性代数》、《概率统计》、《线性规划》四个分册。全书由湖南财经学院院长郭青峰教授主编，李庆高、王明惠、杨冬莲和熊福生任副主编。

《线性代数》分册内容包括：行列式、矩阵、向量、线性方程组、向量空间、矩阵特征值、实二次型及投入产出分析等八章。熊福生担任主编并执笔编写第一、二、三、四章，胡宗义执笔编写第五、六、七、八章，米天林任主审。

本册是编者在认真总结教学经验和广泛吸取同类教材优点的基础上编写的。它的主要特点是：(一)结构合理。本书理顺了矩阵、向量及线性方程组之间的关系，使得这部分内容系统连贯，顺理成章。各章、节、目主题鲜明，层次清晰，有条不紊。对个别概念采取了与众不同的定义方式，使之更明了、贴切。除了极少数章节直接采用其他教材上的编写方式外，从总体上看，本书的编写方式是较为新颖的。(二)体系完整。本书几乎对所有的定理(性质)都给出了严格的证明，即使是那些超纲和过于繁琐的证明，也以打星号的形式给出(对读者可不作要求)，这样的作法是希望能使本教材逻辑推理严谨，表述系统完整。(三)具有经济

特色。本教材在比较全面、系统地介绍了线性经济模型中有关的线性代数基本知识的基础上，尽可能地与经济应用相结合，使其具有一定的经济色彩。（四）通俗易懂。本书采用循序渐进、深入浅出的叙述方式，对难度较大的定理、例题等都给出了较为详细、透彻的证明或解答过程，并尽力做到语言简洁、文笔流畅，使之成为一本好用易学的教材。（五）适用范围大。本书提供了一个较完整的知识体系，除了可供财经类各专业的本科生使用外，也可供专科生、自考生、考研生等使用。书中加星号的部分，对专科生和自考生可不做要求，本科生也可根据实际情况作出取舍。（六）习题丰富。为了使读者有较多的练习机会，用以巩固和提高所学知识，教材中选配了大量的、丰富多彩的习题，并附参考答案或提示。这些习题既有覆盖各个知识点的基本习题，也有一些难度较大的训练和提高读者数学思维能力的习题。读者可根据自己的实际情况做出取舍。在每一章习题后还附加了一些补充习题，这是专门给那些学有余力的读者和准备报考财经类各专业研究生的考生而配备的。

整套《财经类高等数学教材》的出版，得到了中国金融出版社和湖南财经学院教务处的大力支持，在此一并致以衷心感谢！

由于水平有限，本套教材中难免存在某些不足之处，欢迎读者和同行们批评指正。

《财经类高等数学系列教材》编写组

1996 年 5 月

目　　录

第一章 行列式

求解线性方程组是线性代数的主要内容之一，早在 18 世纪，为了寻求含有 n 个未知量和 n 个方程的线性方程组一般解的公式，人们就引进了行列式的概念。时至今日，行列式不仅在数学领域，而且在包括经济学在内的许多其他学科中都有着广泛的应用。

本章首先通过二阶、三阶行列式引入一般 n 阶行列式的概念，然后讨论行列式的基本性质和展开公式，以及利用性质和展开公式计算行列式。最后应用行列式来求解满足一定条件的线性方程组。

第一节 二阶和三阶行列式

人们认识客观事物，往往是从个别的特殊的事物开始，通过总结、归纳，把认识扩大到一般的普遍的事物上去。对行列式的产生与认识也不例外。为了弄清行列式这个概念究竟是怎样形成的，我们有必要先从初等代数中用消元法解二元和三元线性方程组的过程，回顾一下二阶和三阶行列式的产生。

一、二元线性方程组与二阶行列式

二元线性方程组的一般形式为

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2=b_1 \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2=b_2 \end{cases} \tag{1.1}$$

其中 $a_{11},a_{12},a_{21},a_{22},b_1,b_2$ 为常数，x_1,x_2 为未知量。

为了求解此方程组，可用加减消元法：用 a_{22}，$-a_{12}$分别乘(1.1)式的第一、第二等式两端得

$$\begin{cases} a_{11}a_{12}x_1+a_{12}a_{22}x_2=\quad b_1a_{22} \\ -a_{12}a_{21}x_1-a_{12}a_{22}x_2=-b_2a_{12} \end{cases}$$

将这两个等式两端相加消去 x_2，得到

$$(a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21})x_1=b_1a_{22}-b_2a_{12}$$

类似地，用$-a_{21}$，a_{11}分别乘(1.1)式的第一、第二等式两端后，再将两式相加消去 x_1，得到

$$(a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21})x_2=b_2a_{11}-b_1a_{21}$$

当 $a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}\neq 0$ 时，方程组(1.1)有唯一解

$$\begin{cases} x_1=\dfrac{b_1a_{22}-b_2a_{12}}{a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}} \\ x_2=\dfrac{b_2a_{11}-b_1a_{21}}{a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}} \end{cases} \tag{1.2}$$

为了便于记忆上述求解的一般公式，引进记号

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21} \tag{1.3}$$

并称它为二阶行列式。D 中的数字 $a_{11},a_{12},a_{21},a_{22}$ 都称为这个行列式的元素，把横排称为行，由上而下依次称为第一行，第二行；把竖排称为列，从左往右依次称为第一列，第二列。元素 $a_{ij}(i=1,2;j=1,2)$ 的第一个下标 i 表示它所在的行序号，称之为行标；第二个下标 j 表示它所在的列序号，称之为列标。D 中从左上角到右下角的连线称为主对角线；从右上角到左下角的连线称为次对角线。

从(1.3)式中不难看出二阶行列式的计算规则为：主对角线上元素的乘积减去次对角线上元素的乘积。如图1—1所示。这也叫做对角线规则。

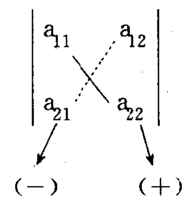


图1—1

有了二阶行列式的概念后，(1.2)式中的分子可以分别记为

$$D_1=\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix} \qquad D_2=\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}$$

于是方程组(1.1)在未知量的系数所构成的二阶行列式 $D\neq 0$ 时，方程组的解可以表示为

$$x_1=\frac{D_1}{D}=\frac{\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}},\qquad x_2=\frac{D_2}{D}=\frac{\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}} \tag{1.4}$$

用(1.4)式给出方程组(1.1)的求解公式，既简便又易于记忆。

例 1.1 解二元线性方程组

$$\begin{cases}2x_1+3x_2=13\\5x_1-4x_2=-2\end{cases}$$

解 因为

$$D=\begin{vmatrix}2 & 3\\5 & -4\end{vmatrix}=-8-15=-23\neq 0$$

$$D_1=\begin{vmatrix}13 & 3\\-2 & -4\end{vmatrix}=-46,\qquad D_2=\begin{vmatrix}2 & 13\\5 & -2\end{vmatrix}=-69$$

所以方程组的解为

$$x_1=\frac{D_1}{D}=\frac{-46}{-23}=2,\qquad x_2=\frac{D_2}{D}=\frac{-69}{-23}=3.$$

二、三元线性方程组与三阶行列式

三元线性方程组的一般形式为

$$\begin{cases}a_{11}x_1+a_{12}x_2+a_{13}x_3=b_1\\a_{21}x_1+a_{22}x_2+a_{23}x_3=b_2\\a_{31}x_1+a_{32}x_2+a_{33}x_3=b_3\end{cases}\tag{1.5}$$

其中 x_1,x_2,x_3 为未知量，a_{ij}和 $b_i(i,j=1,2,3,)$为常数。

为了求解此方程组，可仿照前面的方法，用 $a_{22}a_{33}-a_{23}a_{32}$，$a_{13}a_{32}-a_{12}a_{33}$，$a_{12}a_{23}-a_{13}a_{22}$分别乘(1.5)的第一、二、三个方程两端，然后将这三个方程两端加起来，就可消去 x_2,x_3 得

$$(a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}-a_{13}a_{22}a_{31}-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{11}a_{23}a_{32})x_1$$
$$=b_1a_{22}a_{33}+b_3a_{12}a_{23}+b_2a_{13}a_{32}-b_3a_{13}a_{22}-b_2a_{12}a_{33}-b_1a_{23}a_{32}\tag{1.6}$$

同前面一样，为了便于记忆和方便应用，引进记号

$$D=\begin{vmatrix}a_{11} & a_{12} & a_{13}\\a_{21} & a_{22} & a_{23}\\a_{31} & a_{32} & a_{33}\end{vmatrix}=\begin{matrix}a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}\\-a_{13}a_{22}a_{31}-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{11}a_{23}a_{32}\end{matrix}\tag{1.7}$$

并称它为三阶行列式。D 中其它概念与二阶行列式一样。

从(1.7)式可以看出：三阶行列式共有六项的代数和，每一项为不同行不同列的三个元素乘积，其中三项带正号，三项带负号。其计算规则如图 1—2 所示，这也叫做对角线规则。

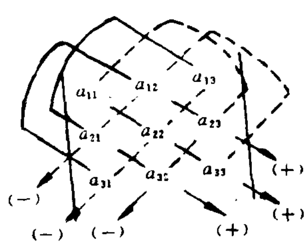


图 1—2

例 1.2 计算三阶行列式

$$D=\begin{vmatrix} 2 & 1 & 2 \\ -4 & 3 & 1 \\ 2 & 3 & 5 \end{vmatrix}$$

解 $D=2\times3\times5+1\times1\times2+2\times(-4)\times3-2\times3\times5-1\times(-4)\times5-2\times1\times3=30+2-24-12+20-6=10.$

有了三阶行列式的概念后，(1.6)式的左端 x_1 的系数和右端可分别记为

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix},\qquad D_1=\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

于是方程组(1.5)式在 $D\neq0$ 时，由(1.6)式得

$$x_1=\frac{D_1}{D}$$

如果记

$$D_2=\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix},\qquad D_3=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix}$$

用完全类似的方法，可以得到

$$x_2=\frac{D_2}{D},\qquad x_3=\frac{D_3}{D}$$

不难看出，行列式 D 就是方程组(1.5)中各未知量的系数按原来的相对位置构成的三阶行列式，并称其为方程组(1.5)的系数行列式。把 D 的第一列元素换成常数项 b_1,b_2,b_3 所得的行列式为 D_1，把 D 的第二列元素换成 b_1,b_2,b_3 得到的行列式为 D_2，把 D 的第三列元素换成 b_1,b_2,b_3 得到的行列式为 D_3。于是，当 $D\neq0$ 时，方程组(1.5)有唯一解

$$x_1=\frac{D_1}{D},\quad x_2=\frac{D_2}{D},\quad x_3=\frac{D_3}{D} \tag{1.8}$$

例 1.3 解线性方程组

$$\begin{cases}3x_1 - x_2 + x_3 = 26\\2x_1 - 4x_2 - x_3 = 9\\x_1 + 2x_2 + x_3 = 16\end{cases}$$

解 因为

$$D=\begin{vmatrix}3 & -1 & 1\\2 & -4 & -1\\1 & 2 & 1\end{vmatrix}=5\neq 0 \qquad D_1=\begin{vmatrix}26 & -1 & 1\\9 & -4 & -1\\16 & 2 & 1\end{vmatrix}=55$$

$$D_2=\begin{vmatrix}3 & 26 & 1\\2 & 9 & -1\\1 & 16 & 1\end{vmatrix}=20 \qquad D_3=\begin{vmatrix}3 & -1 & 26\\2 & -4 & 9\\1 & 2 & 16\end{vmatrix}=-15$$

所以方程组的解为

$$x_1=\frac{55}{5}=11,\quad x_2=\frac{20}{5}=4,\quad x_3=\frac{-15}{5}=-3$$

对照求解二元线性方程组的公式(1.4)，可以发现公式(1.8)与公式(1.4)有类似的形式。

第二节　n 阶行列式

一、二阶和三阶行列式的推广问题

在引进了二阶和三阶行列式的概念之后，自然会想到，在求解 n 个未知量 n 个方程所组成的线性方程组时，是否也可以引进 n 阶行列式来表达其求解公式呢?即是否可将二阶、三阶行列式的意义推广到 n 阶行列式上呢? 从前面的推导可知，在两个未知量中消去一个比较容易，而在三个未知量中消去两个就显得复杂多了。至于一般地，在 n 个未知量中消去 $n-1$ 个，从理论上讲是可能的，但要具体实施，实际操作，其复杂程度是难以想像的。因此，定义 n 阶行列式也就不是那么简单的事情了。

虽然，二阶和三阶行列式的计算规则都遵循对角线规则，但这一规则能不能推广到四阶和四阶以上各阶行列式上呢? 如果四阶行列式：

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix}$$

的计算规则也为对角线规则，则它的值为

$$\begin{aligned} &a_{11}a_{22}a_{33}a_{44}+a_{12}a_{23}a_{34}a_{41}+a_{14}a_{21}a_{32}a_{43}+a_{13}a_{24}a_{31}a_{42} \\ &-a_{14}a_{23}a_{32}a_{41}-a_{11}a_{24}a_{33}a_{42}-a_{12}a_{21}a_{34}a_{43}-a_{13}a_{22}a_{31}a_{44} \end{aligned} \tag{1.9}$$

这种定义存在着一些问题：首先，由(1.3)和(1.7)式定义的二阶、三阶行列式能够分别给出方程组(1.1)和(1.5)的求解公式(1.4)和(1.8)，但由(1.9)式定义的四阶行列式，不能像它们那样给出四元线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+a_{13}x_3+a_{14}x_4=b_1 \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+a_{23}x_3+a_{24}x_4=b_2 \\ a_{31}x_1+a_{32}x_2+a_{33}x_3+a_{34}x_4=b_3 \\ a_{41}x_1+a_{42}x_2+a_{43}x_3+a_{44}x_4=b_4 \end{cases}$$

的求解公式(见习题一,4)。其次，在(1.3)和(1.7)式右端代数和的各项中包括了行列式中所有不同行不同列元素的乘积，但(1.9)中并没有包含行列式中的所有不同行不同列元素的乘积。如 $a_{14}a_{22}a_{33}a_{41}$，$a_{11}a_{23}a_{32}a_{44}$等就不在(1.9)式的代数和中。因此，不能简单地用二阶和三阶行列式的对角线规则，规定其它各阶行列式的计算规则。

二、n 级排列

为了进一步分析二阶和三阶行列式的共同特点和内在计算规则，把二阶和三阶行列式的概念推广到 n 阶行列式上，需要弄清有关 n 级排列的概念及其性质。

定义 1.1 把自然数 $1,2,\cdots,n$ 按照一定的顺序排成一个数组，称为一个 n 级排列，简称为排列，并把这个排列记为 $i_1i_2\cdots i_n$。

特别地，排列 $123\cdots n$ 称为 n 级自然序排列。

例 1.4 由自然数 1,2,3 可组成3! = 6 个不同的三级排列，它们是:123;132;213;231;312;321。

一般地，自然数 $1,2,\cdots,n$ 可组成 $n!$ 个不同的 n 级排列。即 n 级排

列的总数为$n!$个。

定义 1.2 在一个n级排列$i_1i_2\cdots i_n$中，如果较大的数i_s排在较小的数i_t的前面，即$i_s>i_t(t>s)$时，称这一对数i_s与i_t构成一个逆序。一个排列中逆序的总数，称为它的逆序数，并记为$\tau(i_1i_2\cdots i_n)$。

例 1.5 在5级排列45213中，构成逆序的数对有42,41,43,52,51,53,21。即$\tau(45213)=7$。

例 1.6 在n级自然序排列$123\cdots n$中，由于任何一个数对都不构成逆序，因此$\tau(123\cdots n)=0$。

例 1.7 求$\tau(n(n-1)(n-2)\cdots 321)$

解 因为排列$n(n-1)(n-2)\cdots 321$中任何数对都构成逆序，其中n与后面$n-1$个数构成$n-1$个逆序，$n-1$与后面$n-2$个数构成$n-2$个逆序，…，3与后面2个数构成2个逆序，2与后面的1构成1个逆序。所以$\tau(n(n-1)(n-2)\cdots 321)=(n-1)+(n-2)+\cdots+2+1=n(n-1)/2$。

定义 1.3 如果排列$i_1i_2\cdots i_n$的逆序数为偶数，则称它为偶排列；如果该排列的逆序数为奇数，则称它为奇排列。

逆序数为零的排列（如例1.6），也称为偶排列。

如例1.5中的排列45213是一个奇排列，例1.4中的排列123,231,312是偶排列；132,213,321是奇排列。

定义 1.4 在一个排列$i_1\cdots i_s\cdots i_t\cdots i_n$中，如果将其中某两个数$i_s$和$i_t$互换位置，其余各数位置不变，而得到另一个排列$i_1\cdots i_t\cdots i_s\cdots i_n$，这样的变换称为一个对换，记为$(i_s,i_t)$。

例如 $45213\xrightarrow{(5,1)}41253$。

例 1.8 将排列12345变换成排列42153。

解 $12345\xrightarrow{(1,4)}42315\xrightarrow{(3,1)}42135\xrightarrow{(3,5)}42153$。

一般地，任何一个n级排列$i_1i_2\cdots i_n$都可由自然序排列$123\cdots n$经过若干次对换而得到。

关于排列的奇偶性，有下面几条基本性质。

性质 1 任意一个排列经过一次对换后，改变其奇偶性。

证明 首先证明对换相邻两数的情形，设某一 n 级排列为 $\cdots ij\cdots$，经过对换 (i,j) 得到另一个排列 $\cdots ji\cdots$。在这两个排列中，除 i,j 以外的其他任意两个数的顺序均未改变；i,j 以外的任意一个数与 i 或 j 的顺序也未改变。因此，新排列比原排列或增加了一个逆序（当 $i<j$ 时），或减少了一个逆序（当 $i>j$ 时）。总之，原排列与新排列的奇偶性相反。

对于一般情形，设对换的两个数 i,j 之间还有 s 个数 $k_1,k_2,\cdots,k_s$。即原排列为 $\cdots ik_1k_2\cdots k_sj\cdots$，经过对换 (i,j) 得新排列 $\cdots jk_1k_2\cdots k_si\cdots$。新排列可以看成是原排列中数 i 依次与 $k_1,k_2,\cdots,k_s,j$ 作 $s+1$ 次相邻数的对换，先化为 $\cdots k_1k_2\cdots k_sji\cdots$。再将数 j 依次与 $k_s,\cdots,k_2,k_1$ 作 s 次相邻数的对换而得到的。也就是说原排列共经过 $(2s+1)$ 次相邻数的对换就得到新排列，即它的奇偶性改变了 $(2s+1)$ 次。因此，对换 (i,j) 一定改变原排列的奇偶性。

性质 2 当 $n\geqslant 2$ 时，在 $n!$ 个 n 级排列中，奇排列、偶排列各为 $\frac{n!}{2}$ 个，即各占一半。

证明 设共有 p 个不同的 n 级偶排列，共有 q 个不同的 n 级奇排列，则 $p+q=n!$。

对于每个 n 级排列都对换 $(1,2)$，则由性质 1，每个偶排列都变成了奇排列，显然，不同的 n 级偶排列变成了不同的 n 级奇排列，由于偶排列共有 p 个，于是就得到 p 个不同的 n 级奇排列，但因不同的 n 级奇排列共有 q 个，所以 $p\leqslant q$，同理可证 $q\leqslant p$，因此，$p=q=\frac{n!}{2}$。

性质 3 对于任何两个 n 级排列，如果进行相同位置的对换，则它们各自逆序数之和的奇偶性不变，即如果

$$\begin{matrix} i_1\cdots i_s\cdots i_t\cdots i_n \\ j_1\cdots j_s\cdots j_t\cdots j_n \end{matrix} \xrightarrow[(j_s,j_t)]{(i_s,i_t)} \begin{matrix} i_1\cdots i_t\cdots i_s\cdots i_n \\ j_1\cdots j_t\cdots j_s\cdots j_n \end{matrix}$$

则 $$(-1)^{\tau(i_1\cdots i_s\cdots i_t\cdots i_n)+\tau(j_1\cdots j_s\cdots j_t\cdots j_n)}=(-1)^{\tau(i_1\cdots i_t\cdots i_s\cdots i_n)+\tau(j_1\cdots j_t\cdots j_s\cdots j_n)} \tag{1.10}$$

证明 由性质 1 的证明有

$$\tau(i_1\cdots i_s\cdots i_t\cdots i_n)=\tau(i_1\cdots i_t\cdots i_s\cdots i_n)+2k+1$$

$$\tau(j_1\cdots j_s\cdots j_t\cdots j_n)=\tau(j_1\cdots j_t\cdots j_s\cdots j_n)+2l+1$$

其中 k,l 为整数。因此，

$$\tau(i_1\cdots i_s\cdots i_t\cdots i_n)+\tau(j_1\cdots j_s\cdots j_t\cdots j_n)$$
$$=\tau(i_1\cdots i_t\cdots i_s\cdots i_n)+\tau(j_1\cdots j_t\cdots j_s\cdots j_n)+2h$$

其中 $h=k+l+1$ 为整数。于是(1.10)式成立。

三、n 阶行列式的定义

有了前面的准备工作，下面就可以给 n 阶行列式下定义并可规定计算规则。为此，先来仔细分析一下二阶、三阶行列式的共同特点和内在计算规则，从三阶行列式

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}=\begin{array}{l} a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32} \\ -a_{13}a_{22}a_{31}-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{11}a_{23}a_{32} \end{array}$$

的结构可以看到：(1)三阶行列式是所有位于不同行不同列的三个元素乘积的代数和；(2)每一项都可以写成形式 $a_{1j_1}a_{2j_2}a_{3j_3}$。即它的行标成自然序排列，其列标构成一个三级排列 $j_1j_2j_3$；(3)当 $j_1j_2j_3$ 为偶排列时，项 $a_{1j_1}a_{2j_2}a_{3j_3}$ 前取正号，当 $j_1j_2j_3$ 为奇排列时，项 $a_{1j_1}a_{2j_2}a_{3j_3}$ 前取负号。即项 $a_{1j_1}a_{2j_2}a_{3j_3}$ 前的符号是 $(-1)^{\tau(j_1j_2j_3)}$；(4)这些项的个数，恰好是所有不同的三级排列的个数 $3!=6$ 个。其中取正号有 $\frac{3!}{2}=3$ 个，取负号有 $\frac{3!}{2}=3$ 个。因此，三阶行列式也可以表为

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}=\sum_{(j_1j_2j_3)}(-1)^{\tau(j_1j_2j_3)}a_{1j_1}a_{2j_2}a_{3j_3}$$

其中“$\sum\limits_{(j_1j_2j_3)}$”表示 $(j_1j_2j_3)$ 取遍所有的三级排列时，对形如 $(-1)^{\tau(j_1j_2j_3)}a_{1j_1}a_{2j_2}a_{3j_3}$ 的项求和。

对于二阶行列式也有同样的规律。因此，二阶行列式也可以表示为

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}=\sum_{(j_1j_2)}(-1)^{\tau(j_1j_2)}a_{1j_1}a_{2j_2}$$

根据这些内在规律，很自然地把二阶、三阶行列式的概念推广到 n 阶行列式。

定义 1.5 由 n^2 个数 $a_{ij}(i=1,2,\cdots,n;j=1,2,\cdots,n)$ 排列成的记

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

称为 n 阶行列式，其中横排为行；竖排为列。a_{ij}称为第 i 行第 j 列上的元素。从左上到右下的对角线称为主对角线；从右上到左下的对角线称为次对角线。此记号表示所有可能取自不同行不同列的 n 个元素乘积的代数和。各项的符号为：当该项各元素的行标（第一下标）依自然顺序排列时，对应的列标（第二下标）排列若是偶排列则取正号，若是奇排列则取负号。即 n 阶行列式可表示为

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=\sum_{(j_1j_2\cdots j_n)}(-1)^{\tau(j_1j_2\cdots j_n)}a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n} \qquad (1.11)$$

其中 $\sum\limits_{(j_1j_2\cdots j_n)}$ 表示 $(j_1j_2\cdots j_n)$ 取遍所有的 n 级排列时，对形如 $(-1)^{\tau(j_1j_2\cdots j_n)}a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n}$ 的项求和。

因 n 个数构成的 n 级排列共有 $n!$ 个，所以(1.11)式中的项数共有 $n!$ 个。并且取正号与取负号的项各为$\frac{n!}{2}$个。

特别地，当 $n=2$，$n=3$ 时，就是前述的二阶、三阶行列式。而一阶行列式就是$|a_{11}|=a_{11}$。为了方便起见，有时把 n 阶行列式 (1.11) 简记为$|a_{ij}|_{n\times n}$。

在本章的第五节将得到，用(1.11)式定义的行列式，对于满足一定条件的具有更多未知量的线性方程组，也有类似于(1.4)和(1.8)式的求解公式。因此，由(1.11)式定义的 n 阶行列式，既是二阶、三阶行列式内在计算规则的自然推广，又保持了二阶、三阶行列式所具有的实际意义。

例 1.9 五阶行列式