教学研究用书

高等数学教授法

刘溢名　于学贞　迟汉忠　编著

东北工学院出版社

教学研究用书

高等数学教授法

刘溢名　于学贞　迟汉忠　编著

东北工学院出版社

内 容 提 要

本书是作者数十年来从事高等数学教学经验的全面总结和专论.它结合高等数学的具体内容，系统地论述了如何教授以及应注意什么问题，尤其对于一些难教、难学的内容应如何处理和进行教学，提出了独到的见解和看法，论述深入浅出．其中某些内容的深度和广度介于高等数学和数学分析之间．本书适合于数学专业研究生、从事工科高等数学教学，尤其电大、夜大、函大、职大和自修大学的教师和学生做教学参考之用．

教学研究用书

高等数学教授法

刘谥名　于学贞　迟汉忠　编著

东北工学院出版社出版发行　东北工学院印刷厂印刷
（沈阳·南湖）　（辽新出许字 89084 号）

开本：787×1092 1/16　印张：27.875　字数：696 千字
1991 年 5 月第 1 版　1991 年 5 月第 1 次印刷
印数：1～2 000 册

责任编辑：崔华林　责任校对：马　岭
封面设计：唐敏智　版式设计：秦　力

ISBN 7-81006-271-9/O·17　定价：9.80 元

序

高等数学是工科大专院校的一门重要基础课，提高其教学质量是非常重要的。目前出版的高等数学教材，复习资料已经不是一本两本，但是探讨高等数学教学问题的书籍基本上还没见到，本书力图在这方面作一些工作。因此，本书不是一本教材，因为它没有按教学需要编排内容；它也不是一本复习资料，因为它没有选编大量的习题。本书仅仅是教学参考资料，力图探讨高等数学教学的一些问题。希望能为从事工科高等数学教学工作的同志们，特别是为在广播电视大学、夜大学、函数大学、职工大学和自修大学从事此项工作的同志们提供一本教学参考书。同时，也希望本书能成为正在学习高等数学课，而又有兴趣对一些内容深入一点去考虑的同学们的一本课外读物。

在我们多年从事工科高等数学教学工作的经历中，我们深深地感到应该有一本谈谈怎样教高等数学，或者是谈谈在教高等数学时，应该注意和考虑些什么问题的参考书；也应该有为同学们而编写的介于高等数学与数学分析之间的课外读物。虽然教学需要结合专业及学生的具体情况进行，也应当有各人自己的教学风格。但还是有共性的问题值得提出来讨论的。所以本书中谈到了我们对一些内容处理的看法。当然这仅仅是我们的看法，而不是定论。同时也收集了一些不同的处理方式，作为同志们的参考。所以在某种程度上说，本书又体现了资料性质的特点。

本书在深广度上超出了工科高等数学所涉及的内容，但又明显地低于数学分析的要求。书中，对一些内容的确很明确地提出怎样讲和注意一些什么问题的看法，但有时却又把讲法和应该注意的问题和看法，体现到具体内容中去了。所以它在一定的程度上说，有点象探讨高等数学的教学法，但又不完全如此。因此，也可以说它多少有一点象高等数学杂谈的性质。这样来讨论问题是希望它既要成为教师的教学参考书，又要成为学生的课外读物。如果通过本书能帮助同志们在教学中考虑和注意到更多的问题，能使同学们加深对高等数学的理解并扩大一些知识面，这就是我们最大的希冀。

东北工学院教务处赵仁洙、滕福仁两位处长对本书的出版所给予的支持和鼓励并提出宝贵的意见，我们在此表示由衷的感谢。本书的部分内容，曾和武汉冶金建筑专科学校数学教研室的同志们讨论过，并蒙他们提出许多宝贵的意见，在此也向他们表示诚挚谢意。东北工学院出版社在当前出版条件较为困难的情况下，支持这本书的出版，我们深深为之感动，并在此表示我们的感激之情。

由于水平所限，书中可能存在不少问题甚至错误，诚恳地希望同志们提出宝贵的意见和批评。

本书参考了一些高等数学的书籍及有关材料，在此一并表示感谢。

编　者

1990 年 12 月 20 日

目　　录

第四章 一元函数积分学

第五章 多元函数积分学

第六章 常数项级数

第七章 函数项级数

第八章 微分方程

附 录

第一章　函数与极限

第一节　函数概念

一、历史上的简单回顾

在历史上是从运动的研究引出函数概念的。Galilei Galileo (1564—1642) 在《两门新科学》一书中，几乎从头到尾都包含着函数概念。这本书是 Galileo 创立近代力学的代表性著作。当时他是用文字和比例的语言表达函数概念的，但不久关于自由落体的叙述，Galileo 就开始给出了表达式 $s=kt^2$。

在 17 世纪引进的绝大部分函数，在函数概念还没有被充分认识以前，是作为曲线来研究的。例如，$\log x$，$\sin x$，a^x 等函数的研究就是这样。当时已开始用运动的观点，即把曲线看成是动点的轨迹，来引进旧的和新的函数。那时也已经认识到代数函数和超越函数的区别。例如，James Gregory (1638—1675) 在 1667 年就证明了圆的扇形面积不能表示成圆半径和弦的代数函数。Leibniz, G.W. (1646—1716) 也证明了 $\sin x$ 不可能是 x 的代数函数。

在 17 世纪中，函数概念的定义，以 James Gregory 所给出的最为明确。他定义函数是这样的一个量："它是从其它的一些量经过一系列的代数运算得到的，或者是经过任何其它可以想像到的运算得到的"。后一句话的意思，他解释为："除了代数运算外，必须再加上第六种运算，即趋于极限的运算"。但不久就可以看出他的定义窄了，因为函数的级数表示，很快就被广泛地使用了。

自从 Newton, I. (1642—1727) 于 1665 年开始微积分的工作以后，他一直是用流量 (Fluent) 一词表示变量间的关系。Leibniz, G.W. 在 1673 年用函数(Function)一词来表示任何一个随着曲线上的点的变动而变动的量。他引进常量，变量和参变量这些术语。John Bernoulli (1667—1748) 自 1697 年起就谈到一个按任何方式用变量和常量构成的量，到 1698 年他采用了 Leibniz 的"x 的函数"的说法。Leibniz, G.W. 在 1714 年开始用函数一词来表示依赖于一个变量的量。

在符号方面，John Bernoulli 利用 X 或 ξ 表示一般的 x 的函数。但到 1718 年他又改写为 ϕx。记号 $f(x)$ 是 Euler, L. (1707—1783)在 1734 年引进的。从此函数概念就成为微积分中的主要概念。

自 17 世纪引入并使用了函数概念及简单的代数函数和超越函数以后，Leibniz, G.W.; James Bernoulli; John Bernoulli; L'Hospital, G.F.A. 等人在处理单摆运动，固定两端的悬索的形状，曲线运动，斜驶线，曲线的渐屈线与渐开线，光在反射与折射中出现的焦散曲线，以及一条曲线在另一条曲线上滚动时的路径等问题时，已经不仅使用已知的函数，而且使初等函数达到相当复杂的形式。这些研究和微积分的一般工作的结果，初等函数被充分地认识了，并实际上已将它们发展成为今天所见到的样子。例如，对数函数在 17

世纪被当作求$\frac{1}{1+x}$的积分所得的函数，这时它就在新的基础上被引入了. Wallis, Newton, Leibniz, John Bernoulli 对指数函数的研究表明，对数函数是性质相对简单的指数函数的反函数. 1742 年 William Joues (1675—1749) 给出了这种样子的关于对数函数的系统介绍. Euler 定义这两个函数为

$$e^x=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{x}{n}\right)^n,\ \log x=\lim_{n\to\infty}n(x^{\frac{1}{n}}-1)$$

也就是在这个时期，三角函数的讨论也系统化了. Newton 和 Leibniz 给出了这些函数的级数展开式. 并且，已经得出了两角的和与差的三角函数 $\sin(x+y)$，$\sin(x-y)$的公式. Euler 在 1748 年已搞清楚了三角函数的周期性并且引入了角的弧度.

由于研究双曲线下的面积，双曲线函数的研究也就开始了. 当注意到圆弧下的面积由 $\int\sqrt{a^2-x^2}\,dx$ 给出， 双曲线下的面积由 $\int\sqrt{x^2-a^2}dx$ 给出，而二者的根号内只相差一个负号，并且圆弧下的面积可以用三角函数表示，而双曲线下的面积又与对数函数有关，故在三角函数与对数函数之间应该有一个含有虚数的关系. 最后， Lambert, J.H. 在 1768 年全面地研究了双曲线函数.

在此期间，John Bernoulli 已经将函数概念化. Euler 把函数定义为由一个变量与一些常量，通过任何方式形成的解析表达式. 他概括了多项式，幂级数，对数表达式与三角函数表达式. 他还定义了多元函数，随着就有了代数函数的概念. Euler 也引入了超越函数的概念，即三角函数，对数函数，指数函数，变量的无理数次幂以及某些用积分表达的函数. 区分显函数和隐函数，单值函数与多值函数也归功于 Euler.

关于连续函数， Euler 象 Leibniz 及 18 世纪的其它学者一样，把它作为由解析式规定的函数. 当时他们对连续函数的概念，实际上是我们现在所指的解析函数（除个别点）.

1748 年出版的 Euler 著的《无穷小分析引论》(L.Euler Intro ductio in Analysin Infinitorum) 可以说是第一部首先突出函数概念， 并把它作为该书第二卷内容的基础. 他曾断言任何函数都能展成幂级数，而事实上那时所研究的函数，所有用解析式表示的函数，的确都能展成幂级数.

在 18 世纪的后期，在弦振动问题中发生了关于函数概念的争论，从而促使 Euler 去推广他自己的关于什么是函数的概念. 然而在 18 世纪占统治地位的函数概念仍然是：函数是由一个解析式(有限的或无限的)所给出的. 例如，1797 年 Lagrange, J.L.(1736—1813) 在他的《解析函数论》 (Théorie des founctions analytiques) 一书中，把一元或多元函数定义为自变量在其中可以按任何形式出现并对计算有用的表达式. 在 1806 年出版的《函数计算教程》 (Lecons sur le calcul des founctions) 中，他定义函数为：函数代表着要得到未知量的值而对已知量必须要完成的那些不同的运算，未知量的值的本质只是计算的最终结果. 换句话说，函数是运算的一个组合. 虽然 Euler, Lagrange 等人在当时不得不重新考虑函数概念，但他们并没有得出任何广泛可采用的定义，也没有能解决怎样的函数可以用三角函数表示的问题. 但是当时由于数学在多方面的发展以及应用，迫使数学家接受了一个更广泛的概念.

在 Gauss, C.F. (1777—1855) 的早期著作中，函数是指一个封闭的（有限解析的）表达式. Lagrange 在他的《解析力学》一书中，用函数表示几乎是任何类型的对一个变

量或多个变量的关系. Lacroix (1765—1843) 在 1797 年曾经引入一个更广泛的概念，他说："每个变量，如果它的值依赖于一个或 n 个量，就称为后者（这个或这些量）的函数，不管人们知不知道用什么必要的运算，可以从后者得到前者."作为一个例子，他把一个 n 次方程的根作为该方程系数的函数.

Fourier, J.B.J. (1785—1855) 的工作更广泛地展现了函数究竟是什么的问题. 他一方面主张函数不必表示为任何解析表达式，但在另一方面，他在某种程度上又支持函数必须用一个解析表达式来表示的论点，即使这个表达式是一个 Fourier 级数. 不论怎样，Fourier 的工作动摇了 18 世纪函数无论怎样坏都应该是代数函数的推广这种看法.

1821 年 Cauchy, A.L. (1789—1867) 在他所著的《数学分析教程》(Cours d'analyse) 一书中，是从定义变量开始的. 他说："人们把依次取互不相同值的量叫变量". 至于函数概念，他定义为："当变量之间这样连系起来的时候，即给定这些变量中的一个值，就可以决定所有其它变量的值时，人们通常想象这些量是用其中的一个来表达的，这个变量取名为自变量，而由这个变量表示的其它的量叫做这个自变量的函数". Cauchy 也认为，无穷级数是规定函数的一种方法，而且对函数来说也不一定要有解析表达式.

Dirichlet, P.G.L. 在 1837 年的一篇《用正弦和余弦级数表示完全任意的函数》论文中，他给出了单值函数的定义，这个定义是现在最常用的，即如果对于给定区间上每一个 x 的值有唯一的一个 y 的值同它对应，那么 y 就叫做 x 的函数. 他又说，至于在整个区间上 y 依赖于 x 是否可以数学运算来表达，那是无关重要的. 他在 1828 年得出一个现在以他命名的 Dirichlet 函数，即

$$f(x)=\begin{cases} c, & \text{当 } x \text{ 为有理数时,} \\ d, & \text{当 } x \text{ 为无理数时.} \end{cases}$$

Hankel Hermann (1839—1873) 指出，至少在 19 世纪的上半世纪，在最好的教科书中，在讲到函数概念是什么的时候，是混乱的. 一些书按 Euler 的意义定义函数，另一些书则要求 y 随 x 依某一规律而变化，但又没有说清楚规律的定义是什么. 有的书则采用 Dirichlet 的定义，也有的书则不给出定义.

到了 20 世纪才在前面研究的基础上，发展成为现在教科书采用的，用对应关系给出函数定义.

二、函数概念

工科高等数学基本上是以解析式表示的函数为主要的研究对象，因此关于函数概念在一般工科高等数学教材中，都是采用 Dirichlet 的定义. 但最近也有在高等数学中引入映射概念，用映射的观点来定义函数概念，使函数概念现代化.

(一) 映射概念的简单介绍

1. 映射 (Mapping)

映射是近代数学中非常重要的一个概念，它实质上是函数概念的推广.

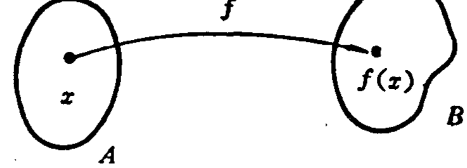

图 1.1

定义 1　设 A, B 是两个集合，如果通过一个确定的对应法则 f，对于 A 中的每一个元素 x，有集合 B 中的一个唯一的元素 y 与之对

应，那么就称这个法则 f 是 A 到 B 的一个映射(Mapping f from A to B)，记为

$$f: A \longrightarrow B$$

或

$$f: x \longmapsto y$$

y 叫做元素 x 在映射 f 下的象，记为 $f(x)$. 如图 1.1 所示。

如果对于每一个 $x \in A$，$f(x)$ 都已给出，那么映射 f 就完全给出了。

例 1 设 Z 是一切整数的集合，对于每一个整数 n，令 $f(n)=2n$ 与它对应，那么 f 是 Z 到 Z 的一个映射。

例 2 令 R 是一切实数的集合，B 是一切非负实数的集合，对于每一个 $x \in R$，令 $f(x)=x^2$ 与之对应，即

$$f: x \longmapsto x^2$$

则 f 为 R 到 B 的一个映射，即

$$f: R \longrightarrow B$$

例 3 设 $A=\{1, 2, 3, 4\}$，$B=\{1, 2, 3, 4, 5\}$ 及

$$f: 1 \longmapsto 2,\ 2 \longmapsto 3,\ 3 \longmapsto 4,\ 4 \longmapsto 1$$

则 f 是 A 到 B 的一个映射。

例 4 设 A 是一切非负实数集合，B 是一切实数集合，对于每一个 $x \in A$，令 $f(x)=\pm\sqrt{x}$ 与之对应，于是 f 不是 A 到 B 的映射，因为当 $x>0$ 时，$f(x)$ 不能由 x 唯一地确定。

例 5 令 $A=B$ 表示所有自然数的集合，$f: n \longmapsto n-1$，则 f 不是 A 到 B 的映射，因为 $f(1)=1-1=0 \bar{\in} B$。

例 6 设 A 是任意的一个集合，对于每一个 $x \in A$，令 $f(x)=x$ 与之对应，即 $f: x \longmapsto x$，则 f 是 A 到 A 的映射。这个映射称为集合 A 的恒等映射.

关于 A 到 B 的映射，应该注意以下几点：

① A 和 B 可以是相同的集合，也可以是不相同的集合；

② 对于 A 中的每一个元素 x，要有 B 中唯一的一个确定元素与之对应，不能有一个例外，如图 1.2 所示。

③ 一般地说，B 的元素不一定都是 A 中元素的象，如例 1。

④ A 中不相同的元素的象可能相同，如例 2、如图 1.3 所示.

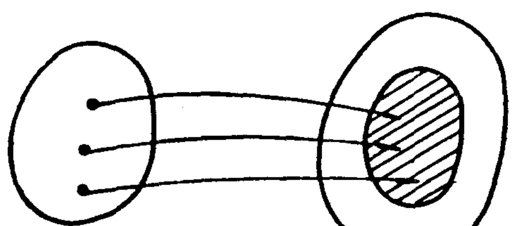

图 1.2

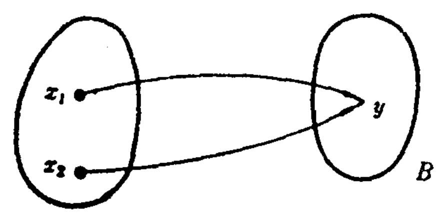

图 1.3

2. 映射的相等

设 $f: A \longrightarrow B$，$g: A \longrightarrow B$ 都是 A 到 B 的映射。如果对于每一个 $x \in A$，都有 $f(x)=g(x)$，那么就说映射 f 与 g 是相等的，记为 $f=g$。

例 7 如 $f: R \longrightarrow R$，$x \longmapsto |x|$，$g: R \longrightarrow R$，$x \longmapsto \sqrt{x^2}$，则 $f=g$，

3．映射的象

设 f：$A\longrightarrow B$ 是 A 到 B 的一个映射，对于 $x\in A$，x 的象 $f(x)\in B$．一切这样的象作成 B 的一个子集合，记为 $f(A)$：

$$f(A)=\{f(x)\mid x\in A\}$$

叫做 A 在 f 之下的象，或叫映射 f 的象．

映射 f 的象 $f(A)$ 可能是 B 的真子集，即 $f(A)\subset B$，但也可能等于B．对于后一种情况，有下面定义：

4．满射概念(Surjective mapping from A onto B)

定义 2　设 f 是 A 到 B 的一个映射，如果 $f(A)=B$，那么就称 f 是 A 到 B 上的一个映射，这时也叫做一个满射．

根据这个定义，f：$A\longrightarrow B$ 是满射的充要件条，即对于 B 中的每一个元素 y，都有 A 中的元素 x 存在，使 $f(x)=y$．但也要注意到这里并没有要求当 $x_1\neq x_2$ 时，必须有

$$f(x_1)\neq f(x_2).$$

5．单射概念(One to one)

定义 3　设 $f:A\longrightarrow B$ 是一个映射，如果对于 A 中任意两个元素 x_1 和 x_2，只要 $x_1\neq x_2$，就有 $f(x_1)\neq f(x_2)$，那么就称 f 是 A 到 B 的一个单射．

要注意单射并不要求满射，B 中可能有的元素并不作为 A 中元素的象．

6．双射概念(Bijective mapping)

定义 4　如果映射 f：$A\longrightarrow B$ 既是单射又是满射，即若 $x_1\neq x_2$，则有 $f(x_1)\neq f(x_2)$，而且对于每一个 $y\in B$，存在 $x\in A$，使 $f(x)=y$，则称 f 为 A 到 B 上的双射．

双射 f 又称为 A 到 B 上的 1—1 映射．

7．映射的合成

设 f：$A\longrightarrow B$ 是 A 到 B 的映射，而 g：$B\longrightarrow C$ 是 B 到 C 的映射，那么对于每一个 $x\in A$，$f(x)\in B$，因而 $g(f(x))$ 是 C 中的一个元素．因此，对于每个 $x\in A$，就有 C 中唯一确定的元素 $g(f(x))$ 与之对应．这样就得到一个 A 到 C 的映射．这个映射是由 f：$A\longrightarrow B$ 和 g：$B\longrightarrow C$ 所决定的，叫做 f 与 g 的合成，记为 $g\circ f$．于是我们有

$g\circ f$：$A\longrightarrow C$；$g\circ f(x)$，对于一切 $x\in A$．

f 与 g 的合成一般可由图 1.4 来示意．

$$\begin{tikzcd} A \arrow[rr, "f\circ g"] \arrow[dr, "f"'] & & C \\ & B \arrow[ur, "g"'] & \end{tikzcd}$$

图 1.4

映射的合成实质上是复合函数概念的推广．

例 8　设

$$f:\ R\longrightarrow R;\ x\longmapsto x^2$$
$$g:\ R\longrightarrow R;\ x\longmapsto \sin x$$

则有

$$g\circ f:\ R\longrightarrow R;\ x\longmapsto \sin(x^2)$$
$$f\circ g:\ R\longrightarrow R;\ x\longmapsto \sin^2 x$$

例 9　设{1，2，3}及

$$f:\ A\longrightarrow A;\ 1\longmapsto 2,\ 2\longmapsto 3,\ 3\longmapsto 1$$
$$g:\ A\longrightarrow A;\ 1\longmapsto 3,\ 2\longmapsto 1,\ 3\longmapsto 2$$

则有 $$g\circ f:\ A\longrightarrow A;\ 1\longmapsto 1,\ 2\longmapsto 2,\ 3\longmapsto 3$$
$$f\circ g:\ A\longrightarrow A;\ 1\longmapsto 1,\ 2\longmapsto 2,\ 3\longmapsto 3$$

设给定映射

$$f:\ A\longrightarrow B;\ g:\ B\longrightarrow C;\ h:\ C\longrightarrow D$$

那么合成映射 $h\circ(g\circ f)$和$(h\circ g)\circ f$ 都是A到D的映射，而且有

$$h\circ(g\circ f)=(h\circ g)\circ f$$

即满足结合律.

事实上，令 $u=g\circ f$，$v=h\circ g$，那么对于任意的 $x\in A$，就有

$$h\circ u(x)=h\circ(u(x))=h(g(f(x)))$$
$$v\circ f(x)=v(f(x))=h(g(f(x)))$$

所以 $$h\circ u=v\circ f,\ 即\ h\circ(g\circ f)=(h\circ g)\circ f$$

下面我们记集合A的恒等映射为 j_A，B的恒等映射为 j_B，则有

$$f\circ j_A=f,\ j_B\circ f=f$$

定理 令 f：$A\longrightarrow B$是由集合A到B的一个射映，那么下面的两个条件是等价的.

① f 是A到B的满单射，即1—1映射；

② 存在B到A的一个映射 g，使得

$$g\circ f=j_A,\ f\circ g=j_B$$

再者，当条件②成立时，g 是由 f 唯一确定的.

证 由①到②的证明

因为f是A到B的满射，所以对于B中的每一个元素 y，有 $x\in A$，使 $f(x)=y$。又因为f是单射，所以这个 x 是由 y 唯一确定的. 我们规定 g：$y\longmapsto x$，如果 $f(x)=y$，则 g 是B到A的一个映射.

设 $x\in A$ 而且 $f(x)=y$，则有

$$g\circ f(x)=g(f(x))=g(y)=x$$

所以有 $g\circ f=j_A$.

设 $y\in B$ 而且 $f(x)=y$，则 $g(y)=x$，于是

$$f\circ g(y)=f(g(y))=f(x)=y$$

故有 $f\circ g=j_B$.

这就证明了②成立.

再证 由②到①.

设$y\in B$，令 $g(y)=x\in A$。由于 $f\circ g=j_B$，所以

$$f(x)=f(g(y))=j_B(y)=y$$

因此映射f是满射.

设 x_1，$x_2\in A$ 而且 $f(x_1)=f(x_2)$，则由于 $g\circ f=j_A$，就有

$$x_1=j_A(x_1)=g\circ f(x_1)=g\circ f(x_2)=j_A(x_2)=x_2$$

这证明了f是单射. 因此f是A到B的一个1—1映射.

最后设②成立，再令 g：$B\longrightarrow A$，h：$B\longrightarrow A$ 都具有性质

$$g\circ f=h\circ f=j_A;\ f\circ g=f\circ h=j_B$$

$$g=g\circ j_B=g\circ(f\circ h)=(g\circ f)\circ h=j_A\circ h=h$$

所以 g 是由 f 唯一确定的。

有了这个定理以后，我们就可以给出逆映射的定义。

8. 逆映射(Inverse mapping)

定义 5 设 f 是 A 到 B 的映射，如果存在一个 B 到 A 的映射 g：$B\longrightarrow A$，使 $g\circ f=j_A$，$f\circ g=j_B$，则 g：$B\longrightarrow A$ 叫做 f 的逆映射。

由前面的定理可知，一个映射不一定有逆映射。然而如果映射 f：$A\longrightarrow B$ 有逆映射的话，则逆映射是唯一确定的。以后把 f 的逆映射记为 f^{-1}。我们有

$$f^{-1}\circ f=j_A,\quad f\circ f^{-1}=j_B$$

显然，如果 f：$A\longrightarrow B$ 有逆映射 g：$B\longrightarrow A$，那么 f 也是 g 的逆映射，即

$$(f^{-1})^{-1}=f$$

例 10 设 A 是一切非负实数所组成的集合，$B=\{x\in R\,|\,0\leqslant x<1\}$ 及

$$f:\ A\longrightarrow B;\ x\longmapsto\frac{x}{1+x}$$

于是 f 是 A 到 B 的一个映射。下面证明 f 是 A 到 B 的一个 1—1 映射。设 $y\in B$，取 $x=\dfrac{y}{1-y}$，则因 $y<1$，所以 $1-y\neq0$，并且 $x\geqslant0$，故 $x\in A$。

我们有

$$f(x)=\frac{x}{1+x}=\frac{\dfrac{y}{1-y}}{1+\dfrac{y}{1-y}}=y$$

所以 f 是满射。

再设 x_1，$x_2\in A$ 而且 $f(x_1)=f(x_2)$，那么就有

$$\frac{x_1}{1+x_1}=\frac{x_2}{1+x_2}$$

故有 $x_1=x_2$，所以 f 是单射。

于是由前面定理，f 有逆映射，可以验证

$$f^{-1}:\ B\longrightarrow A;\ x\longmapsto\frac{x}{1+x}$$

（二）对从映射的观点来讲授函数概念的看法

从上面关于映射的简单介绍可以看出，映射和与它有关的概念，都是在函数、复合函数、反函数等比较直观的、朴素的概念基础上建立的。因此，在工科高等数学的教学中，如果要求学生从映射的观点来理解这些概念，学生需要有一定的数学修养，特别是代数方面的修养，也需要有一定的时间，而这些一般来说是不具备的，因此是会有困难的。但在采用 Dirichlet 定义函数的方法基础上，适当地引入一些映射的思想和一些记号还是可行的。

例如，在讲函数概念时，除讲一般的函数图形表示方法外，可以引入突出对应关系的函数图形表示法。

对于一元实变量的实值函数，通常是用图 1.5 来直观地表示，即对于给定的实数 x ($x\in R$，R 为实数集)，函数 f 确定另一个实数值 $f(x)$。它的图形由全部那些在实平面上具有

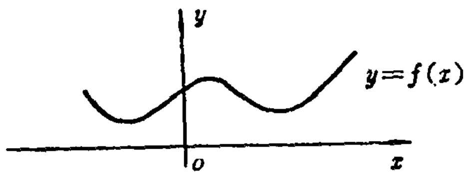

图 1.5

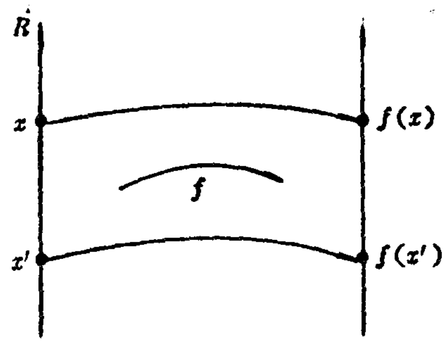

图 1.6

坐标为(x,y)，且 $y=f(x)$ 的点组成，即为上图所示的曲线。用集合论的写法，可表为

$$\text{graph}(f)=\{(x,y)\in R\times R \mid y=f(x)\}$$

下面引进一种突出对应关系的表示方法，如图 1.6 所示。这种表示方法体现了映射的特点，f 为从 R 到 R 的映射，即函数，而 $f(x)$ 为 x 在映射 f 之下的象，也就是在函数 f 之下 x 的函数值。

二元实变量的实值函数的图形，一般是把它看成地形图，即把(x_1, x_2)看成是实平面上的点的坐标，$f(x_1, x_2)$ 则沿着铅直的方向度量。它就是通常用空间曲面来表示的方法，或用如下记法

$$\text{graph}(f)=\{((x_1, x_2),y)\in R^2\times R=R^3 \mid y=f(x_1, x_2)\}$$

为了突出对应关系，体现映射的特点，也可以采用下面的方法来刻画函数 f，即如图 1.7 所示。这时 f 为 R^2 到 R 的映射，也就是从 R^2 到 R 的函数.

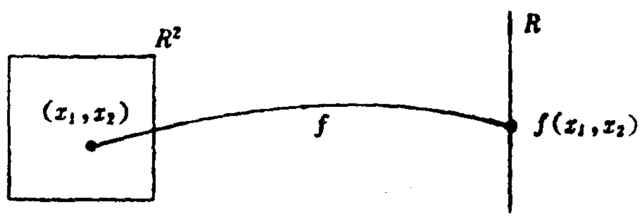

图1.7

上面所谈的表示法，对于一元函数的复合函数是方便的，从图 1.8 看出，f 作为 x 的函

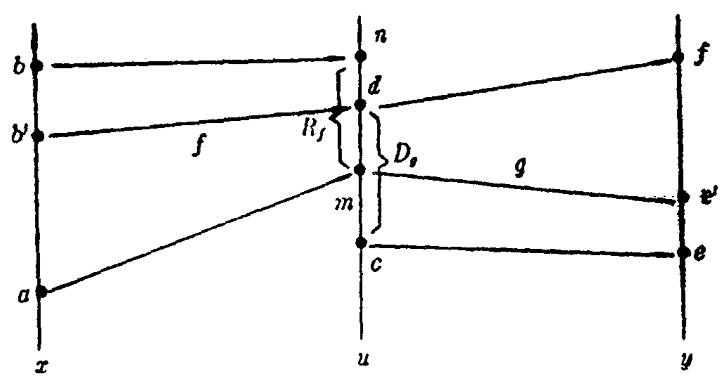

图 1.8

数，它的定义域为$[a, b]$；g 作为 u 的函数，它的定义域为$[c, d]$，但 $g\circ f$ 作为 x 的函数，其定义域不是$[a,b]$，而是$[a,b']$。用集合论的记法，上述复合函数 $g\circ f$ 的定义域为 $f^{-1}(R_f\cap D_g)$，这里 R_f 是 f 作为 x 的函数时的值域，D_g 是 g 作为 u 的函数时的定义域，$R_f\cap D_g$ 为 R_f 与 D_g 的交集。

又如，图 1.9 所示的函数 f 和 g 就不能构成复合函数。因为此时 $R_f \cap D_g = \phi$（空集）.

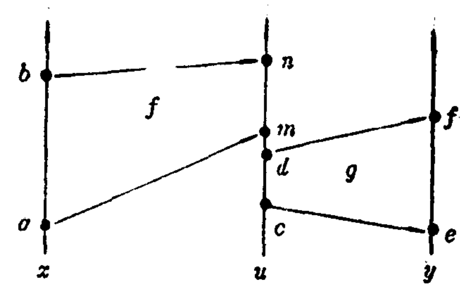

图 1.9

三、应注意的几个问题

（一）要注意函数的自变量变化范围和对应关系

例如，$y = 2x + 1$，$u = 2v + 1$ 实际上是相同的函数. 又例如，$y = \frac{x^2 - 1}{x + 1}$ 与 $y = x - 1$，不是相同的函数；当 $x = -1$ 时，$y = \frac{x^2 - 1}{x + 1}$ 没有定义，而 $y = x - 1$ 则取值 -2. 另一方面，如前已提到的 Dirichlet 函数，虽然没有具体的解析表达式来计算它，但却有一个非常确定的对应关系，所以是函数关系.

（二）要注意函数的定义域

我们知道，如果定义域不相同，即使函数关系相同，也不是相同的函数. 因此，讨论函数时就要同时考虑函数关系和定义域. 对于函数的定义域的确定，需明确指出，有些函数的定义域不是由函数关系决定的，而是由实际问题确定的. 特别要注意复合函数的定义域问题. 例如，$y = \arcsin u$，$u = x^2 + 2$，看起来似乎 y 是 x 的复合函数，但实际上 y 并不是 x 的复合函数.

（三）要加强把复合函数分解为基本初等函数的练习

因为复合函数是需要通过计算，通过练习才能理解和掌握的. 如果在这里打好基础，那么在讲复合函数微分法时，困难就会少得多.

（四）要注意"函数的某些特性"的提法

在一些高等数学教材中，有这样的一个标题，这种提法不确切. 因为有界性，周期性，偶函数，奇函数等性质，并不是所有函数的特性，而是有些函数具有这样或那样的特性. 故上述提法应为：具有某些特性的函数.

（五）对于周期函数要特别指出：并不是所有的周期函数，都有最小正周期.

例如，Dirichlet 函数

$$f(x) = \begin{cases} c, & \text{当 } x \text{ 为有理数时}, \\ d, & \text{当 } x \text{ 为无理数时}, \end{cases}$$

是周期函数. 因为对于任何的正有理数 T，当 x 为有理数时，$x + T$ 也是有理数，故有 $f(x + T) = f(x) = c$；当 x 为无理数时，$x + T$ 也是无理数，故有 $f(x + T) = f(x) = d$. 已知最小的正有理数是不存在的，故它没有最小正周期. 如果周期函数有最小正周期，通常把这个最小正周期叫做该周期函数的周期.

第二节　极限概念

一、极限概念教学的简单回顾

解放前，国内大多数大学工学院的初等微积分都是直接采用国外教材，或者是采用国外教材的中译本. 对极限概念的讲法，一般都是采用比较直观的方法，很少强调 ε-δ 或 ε-N