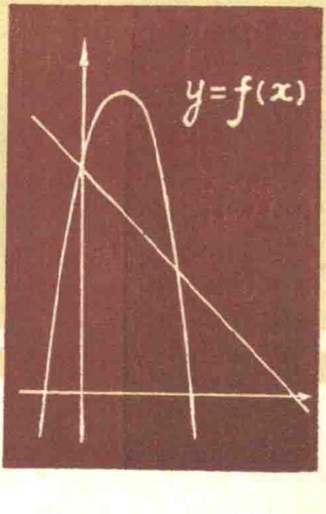
中学数学复习题简解

福建教育学院数学組編

SHUXUE



福建人民教育出版社

中学数学复习题简解

福建教育学院数学组编

福建人民教育出版社出版
福建省新华书店发行
福州印刷厂印刷
787×1092毫米32开本　7.75印张　170千字
1979年5月第一版
1979年5月第一次印刷
印数：1——205000

书号：7159·501　　定价：0.57元

说　　明

为使高中毕业班数学教师掌握中学数学各部份练习题，以减轻备课负担，提高复习课质量；并帮助中学生和知识青年，在复习中独立检查自己掌握数学基础知识的情况，我们参照教育部颁发的《1979年全国高等学校招生考试复习大纲（数学部分）》和《全日制十年制学校中学数学教学大纲(试行草案)》的要求，编写了《中学数学复习题简解》。中学数学基础知识的复习，可参考我们编写的《数学总复习纲要》。

本书各部分练习题的解答详略不一。为了节省篇幅，有些练习题仅仅提出解题（或证题）的思路和方向；有的解题步骤是不完整的；有的也未算出最后结果；有的仅提示答案。不言而喻，本书提供的解法并不都是最简的和最好的。这些解答，只供复习课选题和学生练习时参考。练习题中，凡标有“•”号的是难度较大的题目，供解题能力较好的学生选做。

由于时间紧和限于编者水平，本书还存在不少缺点和错误。希望使用本书的教师和同学及时提出意见，以便今后修改、补充。

一九七九年二月

目　　录

代 数 部 分

练 习 一

1．指出下列各数哪些是自然数、整数、有理数、无理数、实数？并按从小到大的顺序排列起来：

$0,\ -1,\ 7\frac{1}{3},\ 0.3,\ \sqrt{5},\ \pi,\ 4.52,\ 9,\ \sqrt[3]{-18}$．

2．不论a是什么实数，a^2永远是正值，对吗？

3．画一个数轴，并在上面标出绝对值不大于3的所有整数的各对应点．

4．求下列方程在（1）自然数范围内的解；（2）整数范围内的解；（3）有理数范围内的解：

（1） $x^2-4=0$； 〔2；2，−2；2，−2〕

（2） $2x^2-x-15=0$． 〔3；3；3，$-\frac{5}{2}$〕

5．在（1）自然数范围内；（2）整数范围内，哪些数能满足下列关系：

（1） $-2<x<3$； 〔1，2；−1，0，1，2〕

（2） $|x-2|=3$． 〔5；−1，5〕

6．写出绝对值不大于7，而又不小于5的所有整数。

〔−7，−6，−5，5，6，7〕

7．x为何值时，$\frac{|x|}{x}$的值是1？是−1？没有意义？

〔$x>0$，$x<0$，$x=0$〕

8．已知$|a|=2$，$|b|=5$，求$a+b$的值．

解 当$a=2$，$b=5$时，$a+b=7$；当$a=2$，$b=-5$

时，$a+b=-3$；

当$a=-2$，$b=-5$时，$a+b=-7$；当$a=-2$，$b=5$时，$a+b=3$。

9. 计算：

（1）$3\frac{1}{7}\times\left(3\frac{1}{7}-7\frac{1}{3}\right)\times\frac{7}{22}\div1\frac{1}{21}$；

〔-4〕

（2）$1\frac{3}{5}\div\left(-\frac{4}{5}\right)^2-\left[(5\sqrt{12}-12\sqrt{3})\div\sqrt{6}+\left|\frac{2}{3}-\sqrt{2}\right|\right]$；　〔$3\frac{1}{6}$〕

（3）$\left(-3\frac{1}{3}\right)+\left(-5\frac{1}{2}\right)\div1\frac{2}{9}-\left(-5\frac{1}{3}\right)\times\frac{9}{16}$；　〔$-4\frac{5}{6}$〕

（4）$\left(-1\frac{2}{7}\right)\times\frac{5}{7}\div\left(-\frac{3}{4}\right)\times(-2.5)\div(-0.25)\times\frac{2}{5}\times2\frac{1}{3}\div\left(-\frac{5}{7}\right)$；　〔$-16$〕

10. 计算：

（1）$\{3x-[x-1-(2x+1)+3]-3\}+(x+1)$；　〔$5x-3$〕

（2）$3x-2\{1-3(2x-a-3)-5[a-(3x-2a)-4]\}$；　〔$24a-15x-60$〕

（3）$2x^2(-3y)+7xy(-y)-\left[\frac{1}{5}xy(-3x)+\frac{x}{3}\cdot2y^2\right]$.　〔$-5\frac{2}{5}x^2y-7\frac{2}{3}xy^2$〕

11. 已知$a=-2.25$，$b=\sqrt{3}$，求$5ab^2-\{2a^2b-[3ab^2-(4ab^2-2a^2b)]\}$的值.

解 $5ab^2-\{2a^2b-[3ab^2-(4ab^2-2a^2b)]\}$

$=5ab^2-ab^2=4ab^2$

$=4\times\left(-2\frac{1}{4}\right)\times(\sqrt{3})^2=-27.$

12. 计算：

（1）$\left(\frac{2}{3}x^2+\frac{1}{2}y^3\right)\left(\frac{1}{2}y^3-\frac{2}{3}x^2\right)$；

$\left[\frac{1}{4}y^6-\frac{4}{9}x^4\right]$

（2）$(x+y-z)^2+(x-y-z)(x+y-z)$；

$[2x^2+2z^2-4xz+2xy-2yz]$

（3）$(x^2+y^2)^2(x+y)^2(y-x)^2$；

解 原式$=[(x^2+y^2)(y^2-x^2)]^2=(y^4-x^4)^2$

$=x^8-2x^4y^4+y^8.$

（4）$(x-1)(x+1)(x^2+x+1)(x^2-x+1)$.

解 原式$=(x^3-1)(x^3+1)=x^6-1$.

13. 计算：

（1）$\left(\frac{3}{4}a^4b^7-0.5a^3b^8-\frac{1}{9}a^2b^6\right)\div\left(-\frac{1}{3}ab^3\right)^2$；

$\left[6\frac{3}{4}a^2b-4\frac{1}{2}ab^2-1\right]$

（2）$[(3x^n y^{m+1})^2\cdot(-x^n y^m)^3]^2$.

$[81x^{10n}y^{10m+4}]$

14. 在有理数范围内，把下列各多项式分解因式：

(1) $m^3 - 3n^2 + 3mn - m^2n$;

$$[(m-n)(m^2+3n)]$$

(2) $x^3 + ax^2 - x - a$; $[(x+a)(x+1)(x-1)]$

(3) $x^2 - 70y + 10xy - 49$;

$$[(x-7)(x+10y+7)]$$

(4) $7x - x^2 - 21y + 6xy - 9y^2$;

$$[(x-3y)(7-x+3y)]$$

(5) $x^2 - 4xy + 4y^2 - 4z^2$;

$$[(x-2y+2z)(x-2y-2z)]$$

(6) $ax^3 - 1 + x^3 - a$;

$$[(a+1)(x-1)(x^2+x+1)]$$

(7) $8x^3(a-b) - 2x^2y(b-a) - 10xy^2(a-b)$;

$$[2x(a-b)(4x+5y)(x-y)]$$

(8) $a^5 - a^3 - a^2 + 1$;

$$[(a+1)(a-1)^2(a^2+a+1)]$$

(9) $a^2 + b^2 - c^2 - d^2 - 2ab + 2cd$;

$$[(a-b+c-d)(a-b-c+d)]$$

(10) $(x+1)^2 - 9(x-1)^2$;

$$[-4(x-2)(2x-1)]$$

(11) $x^{n+5} + 9x^{n+3} - 162x^{n+1}$;

解 原式$=x^{n+1}(x^4+9x^2-162)=x^{n+1}(x^2-9)(x^2+18)$

$=x^{n+1}(x+3)(x-3)(x^2+18)$.

(12) $bc(b+c) + ca(c-a) - ab(a+b)$;

解 原式$=b^2c+bc^2+ac^2-a^2c-ab(a+b)$

$=c^2(a+b)-c(a^2-b^2)-ab(a+b)$

$=(a+b)[c^2-c(a-b)-ab]$

$=(a+b)[c(c-a)+b(c-a)]$

$$=(a+b)(c-a)(c+b).$$

(13) $6x-6y-9x^2+18xy-9y^2+3$;

$$[-3(x-y-1)(3x-3y+1)]$$

(14) $x^2-6xy+9y^2-5x+15y+6$;

$$[(x-3y-2)(x-3y-3)]$$

(15) $(x^2-2x)(x^2-2x-2)-3$;

解 原式$=(x^2-2x)^2-2(x^2-2x)-3$

$$=(x^2-2x-3)(x^2-2x+1)$$

$$=(x-1)^2(x-3)(x+1).$$

(16) $2x^2+5xy-3y^2-3x+5y-2$;

解 原式$=2x^2+(5y-3)x-(3y^2-5y+2)$.

$$\because\ x=\frac{-(5y-3)\pm\sqrt{(5y-3)^2+8(3y^2-5y+2)}}{4}$$

$$=\frac{(3-5y)\pm(7y-5)}{4},$$

$$x_1=\frac{y-1}{2},\qquad x_2=2-3y.$$

$$\therefore\quad 2x^2+5xy-3y^2-3x+5y-2$$

$$=2\left(x-\frac{y-1}{2}\right)(x+3y-2)$$

$$=(2x-y+1)(x+3y-2).$$

(17) x^4+x^2+1;

解 原式$=(x^2+1)^2-x^2=(x^2+x+1)(x^2-x+1)$.

(18) $(b-c)^3+(c-a)^3+(a-b)^3$.

解法1 原式$=(b^3-3b^2c+3bc^2-c^3)+(c^3-3c^2a$

$$+3ca^2-a^3)+(a^3-3a^2b+3ab^2-b^3)$$

$$=3[ab(b-a)+c^2(b-a)$$

$$+c(a+b)(a-b)]$$

$$= 3(a-b)(ac+bc-ab-c^2)$$
$$= 3(a-b)(b-c)(c-a).$$

解法 2 原式 $=(b-c)^3+(a-b)^3-[(b-c)+(a-b)]^3$
$$= -[3(b-c)^2(a-b)+3(b-c)(a-b)^2]$$
$$= 3(a-b)(b-c)(c-a).$$

15. 在实数范围内，把下列各多项式分解因式：

(1) $3x^2-9x+4\frac{1}{2}$；

$\left[\frac{3}{4}(2x-3+\sqrt{3})(2x-3-\sqrt{3})\right]$

(2) x^4-4x^2+3；

$[(x+1)(x-1)(x+\sqrt{3})(x-\sqrt{3})]$

(3) x^3+x^2-2x-2；

$[(x+1)(x+\sqrt{2})(x-\sqrt{2})]$

•(4) $(x^2-5x+4)(x^2+9x+18)+108$.

解 原式 $=(x-4)(x-1)(x+3)(x+6)+108$
$$=(x^2+2x-3)(x^2+2x-24)+108$$
$$=(x^2+2x)^2-27(x^2+2x)+180$$
$$=(x^2+2x-15)(x^2+2x-12)$$
$$=(x+5)(x-3)(x+1-\sqrt{13})(x+1+\sqrt{13}).$$

16. 当实数x为何值时，下列各分式有意义：

(1) $\frac{1}{|x|-1}$； $[x\neq\pm 1]$

(2) $\frac{3x-2}{x^2-2x+3}$； [x为任何实数]

(3) $\frac{1}{6x^2-5x-6}$；

解 令$6x^2-5x-6=0$，解得$x=\frac{3}{2}$或$x=-\frac{2}{3}$.

∴ 当$x\neq\frac{3}{2}$或$x\neq-\frac{2}{3}$时，原分式有意义.

(4) $\frac{\lg(x+1)}{x-5}$.

解 $\begin{cases} x+1>0, \\ x-5\neq 0. \end{cases}$ 得$x>5$或$-1<x<5$.

17．先化简下列各式，再求它们的值：

(1) $\frac{b^2-1}{(1+ab)^2-(a+b)^2}$. 其中$a=-25$. $b=1025$;

解 原式$=\frac{b^2-1}{(1+ab+a+b)(1+ab-a-b)}$

$$=\frac{b^2-1}{(b^2-1)(a^2-1)}=\frac{1}{a^2-1}$$

$(\because\ b^2-1\neq 0)$.

∴ 原式$=\frac{1}{(-25)^2-1}=\frac{1}{624}$.

(2) $\frac{2}{a}\left(\frac{a+1}{a^3-1}-\frac{1}{a^2+a+1}-\frac{1}{1-a}\right)$

$+\frac{a^3+a^2+2a}{a^3-1}$. 其中$a=-0.8$.

解 原式$=\frac{2}{a}\left[\frac{a+1-(a-1)+2(a^2+a+1)}{a^3-1}\right]$

$$\times\frac{a^3-1}{a(a^2+a+2)}=\frac{4}{a^2}=\frac{4}{(-0.8)^2}=6.25.$$

18． 化简：

(1) $\frac{a}{a-b}-\frac{b}{a+b}-\frac{2ab}{b^2-a^2}$; $\left[\frac{a+b}{a-b}\right]$

(2) $\left(\dfrac{a}{a+b}-\dfrac{a^2}{a^2+2ab+b^2}\right)$

$\div\left(\dfrac{a}{a+b}-\dfrac{a^2}{a^2-b^2}\right)$； $\left[\dfrac{b-a}{a+b}\right]$

(3) $\dfrac{1}{(a-b)(a-c)}+\dfrac{1}{(b-a)(b-c)}$

$+\dfrac{1}{(c-a)(c-b)}$； $[\,0\,]$

(4) $a-a\div\left\{\dfrac{a^2-b^2}{a^3+b^3}\left[\left(a-\dfrac{a^2+b^2}{b}\right)\right.\right.$

$\left.\left.\div\left(\dfrac{1}{a}-\dfrac{1}{b}\right)\right]\right\}$； $[\,a-1\,]$

(5) $\dfrac{1}{x^2-4x+4}-\dfrac{x}{x^2-4}+\dfrac{1}{2x+4}$；

$\left[\dfrac{4-x}{2(x-2)^2}\right]$

(6) $\left(2a+\dfrac{1}{a}-3\right)\cdot\dfrac{2a}{(a-1)(2a-1)}$；

$[\,2\,]$

(7) $\left[\dfrac{x-1}{3x+(x-1)^2}-\dfrac{1-3x+x^2}{x^3-1}-\dfrac{1}{x-1}\right]$

$\div\dfrac{x^2+1}{1-x}$； $\left[\dfrac{1}{x^2+x+1}\right]$

(8) $\dfrac{(a^2-b^2)^3}{a^3+b^3}\div\dfrac{(b-a)^2}{a^2-ab+b^2}\times\dfrac{1}{(b-a)^3}$；

$\left[-\dfrac{(a+b)^2}{(a-b)^2}\right]$

(9) $\dfrac{x^2+2x+1}{x^3-x}\times\dfrac{x}{x+1}-\dfrac{1}{x-1}$； $[\,0\,]$

(10) $\dfrac{2a}{a-3b}-\dfrac{6ab-24b^2}{a^2-7ab+12b^2}$； $[\,2\,]$

(11) $\dfrac{a^{2n+1}-6a^{2n}+9a^{2n-1}}{a^{n+1}-4a^{n}+3a^{n-1}}$. $\left[\dfrac{a^{n}(a-3)}{a-1}\right]$

19．当X取何值时，下列各式有意义：

(1) $\sqrt{(x-8)^2}=x-8$；〔$x\geqslant 8$〕

(2) $\sqrt{x^2-1}=\sqrt{x-1}\cdot\sqrt{x+1}$；〔$x\geqslant 1$〕

(3) $\sqrt{\dfrac{x-2}{x-3}}=\dfrac{\sqrt{x-2}}{\sqrt{x-3}}$；〔$x>3$〕

(4) $\sqrt[3]{(1-x)^3}=1-x$.〔x为任何实数〕

20.化简：

(1) $\sqrt{(2x-3)^2}$；〔当 $x\geqslant\dfrac{3}{2}$时，$2x-3$；

当$x<\dfrac{3}{2}$时，$3-2x$〕

(2) $\sqrt{\left(\dfrac{x+2}{x-1}\right)^2}$；〔当$x>1$或$x\leqslant-2$时，

$\dfrac{x+2}{x-1}$；当$-2<x<1$时，$\dfrac{x+2}{1-x}$〕

*(3) $\sqrt{(1-a)^2}+\sqrt{(a-7)^2}$；

解 当$\begin{cases}1-a\geqslant 0,\\ a-7<0,\end{cases}$ 即$a\leqslant 1$时，原式$=1-a+7-a$

$=8-2a$；

当$\begin{cases}1-a<0,\\ a-7\geqslant 0,\end{cases}$ 即$a\geqslant 7$ 时，原式$=a-1+a-7$

$=2a-8$；

当$\begin{cases}1-a<0,\\ a-7<0,\end{cases}$ 即$1<a<7$时，原式$=a-1+7$

$-a=6$。

(4) $\left|a+|a|\right|$.

解 当$a\geqslant 0$时，原式$=|a+a|=2a$；

当$a\leqslant 0$时，原式$=|a-a|=0$.

21. 如果$4x^2-4x-15\leqslant 0$，化简：

$\sqrt{4x^2+12x+9}+\sqrt{4x^2-20x+25}$.

解 ∵ $4x^2-4x-15\leqslant 0$的解是$-\frac{3}{2}\leqslant x\leqslant\frac{2}{5}$，

∴ $\sqrt{(2x+3)^2}+\sqrt{(2x-5)^2}$

$=(2x+3)-(2x-5)=8$.

22. 计算：

(1) $\sqrt{12}-\sqrt{48}-3\sqrt{3}$；　　〔$-5\sqrt{3}$〕

(2) $5\sqrt{\frac{1}{5}}+\frac{1}{2}\sqrt{20}-\frac{5}{4}\sqrt{\frac{4}{5}}+\sqrt{45}$；

〔$4\frac{1}{2}\sqrt{5}$〕

(3) $\frac{2}{3}\sqrt{27x^3}+6x\sqrt{\frac{x}{3}}-x^2\sqrt{\frac{3}{x}}$，〔$3x\sqrt{3x}$〕

(4) $(3\sqrt{2}-2\sqrt{3})(7\sqrt{2}+5\sqrt{3})$

$-(2\sqrt{3}+3\sqrt{2})^2$；　〔$-18-11\sqrt{6}$〕

(5) $\sqrt{45}-\frac{4}{\sqrt{2}}-\sqrt{80}-\sqrt{18}-\sqrt{7-\sqrt{40}}$，

解 原式$=3\sqrt{5}-2\sqrt{2}-4\sqrt{5}-3\sqrt{2}-$

$\sqrt{(\sqrt{2}-\sqrt{5})^2}$

$=-\sqrt{5}-5\sqrt{2}+(\sqrt{2}-\sqrt{5})$

$=-2\sqrt{5}-4\sqrt{2}$；

(6) $\sqrt{\frac{\sqrt{5}+\sqrt{2}}{\sqrt{5}-\sqrt{2}}}$.

解 原式$=\dfrac{\sqrt{5}+\sqrt{2}}{\sqrt{3}}=\dfrac{\sqrt{3}}{3}(\sqrt{5}+\sqrt{2})$

$$=\frac{1}{3}(\sqrt{15}+\sqrt{6}).$$

23．化简：

（1）$\left(\sqrt{a}+\dfrac{b-\sqrt{ab}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}\right)\div\left(\dfrac{a}{\sqrt{ab}+b}+\dfrac{b}{\sqrt{ab}-a}\right.$

$$\left.-\frac{a+b}{\sqrt{ab}}\right);$$

解 原式$=\dfrac{\sqrt{a}(\sqrt{a}+\sqrt{b})+b-\sqrt{ab}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}$

$$\div\frac{a(\sqrt{ab}-a)+b(\sqrt{ab}+b)-(a+b)(b-a)}{\sqrt{ab}(b-a)}$$

$$=\frac{a+b}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}\cdot\frac{\sqrt{ab}(b-a)}{a\sqrt{ab}+b\sqrt{ab}}$$

$$=\frac{b-a}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}=\sqrt{b}-\sqrt{a}.$$

（2）$\left(\dfrac{2}{\sqrt{a}-\sqrt{b}}-\dfrac{2\sqrt{a}}{a\sqrt{a}+b\sqrt{b}}\cdot\dfrac{a-\sqrt{ab}+b}{\sqrt{a}-\sqrt{b}}\right)$

$$\div 4\sqrt{ab}.$$

解 原式$=\left[\dfrac{2}{\sqrt{a}-\sqrt{b}}\right.$

$$\left.-\frac{2\sqrt{a}(a-\sqrt{ab}+b)}{(\sqrt{a}+\sqrt{b})(a-\sqrt{ab}+b)(\sqrt{a}-\sqrt{b})}\right]$$

$$\div 4\sqrt{ab}.$$

$$=\frac{2(\sqrt{a}+\sqrt{b})-2\sqrt{a}}{a-b}\div 4\sqrt{ab}$$

$$=\frac{\sqrt{a}}{2a(a-b)}.$$

24. 已知$x=\sqrt{5}-\sqrt{3}$，求下式的值：

$$\frac{2+\frac{1}{x-1}-\frac{1}{x+1}}{x+\frac{x}{x^2-1}}.$$

解 原式$=\dfrac{2(x^2-1)+(x+1)-(x-1)}{x^2}$

$$=\frac{2}{x}=\frac{2}{\sqrt{5}-\sqrt{3}}=\sqrt{5}+\sqrt{3}.$$

*25. 已知 $x=\dfrac{2ab}{b^2+1}$，其中$a>0$，$b>0$，试证下式当$b\geqslant1$时的值是b；当$b<1$时的值是$\dfrac{1}{b}$。

$$\frac{\sqrt{a+x}+\sqrt{a-x}}{\sqrt{a+x}-\sqrt{a-x}}.$$

证明 有理化分母，并化简，得

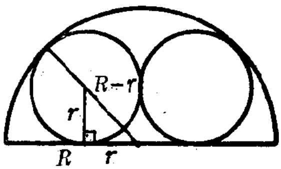
$$原式=\frac{b^2+1+|b^2-1|}{2b}.$$

当 $b\geqslant1$时，原式$=\dfrac{b^2+1+b^2-1}{2b}=b$；

当 $b<1$时，原式$=\dfrac{b^2+1-b^2+1}{2b}=\dfrac{1}{b}$.

*26. 从半径为R的半圆内截取两个最大的等圆时，所余下部分的面积是多少？

解 设所截取的两个最大等圆的半径为r，（如右图）依题意，所余下部分的面积$S=\dfrac{\pi R^2}{2}-2\pi r^2$.



而 $(R-r)^2=2r^2$，　$r^2+2Rr-R^2=0$，

$$r=(\sqrt{2}-1)R.$$

$\therefore\quad S=\dfrac{\pi R^2}{2}-2\pi[(\sqrt{2}-1)R]^2$

$=\dfrac{8\sqrt{2}-11}{2}\pi R^2.$

27．已知$\dfrac{x}{18}=\dfrac{y}{-5}=\dfrac{z}{3}$.

（1） 求证：$x=-3y+z$;

（2） 求 $\dfrac{x+y+z}{z}$的值;

（3） 且$y+z=4$，求 x、y、z的值.

解 设 $\dfrac{x}{18}=\dfrac{y}{-5}=\dfrac{z}{3}=k$,

则 $x=18k$, $y=-5k$, $z=3k$.

（1） $\because$ 右边$=-3\times(-5k)+3k=18k=$左边,

$\therefore$ 原式成立;

（2） $\dfrac{x+y+z}{z}=\dfrac{18k-5k+3k}{3k}=\dfrac{16}{3}$;

（3） $\because$ $-5k+3k=4$, $k=-2$,

$\therefore$ $x=18k=-36$, $y=-5k=10$, $z=3k=-6$.

*28．若 $\dfrac{y+z}{x}=\dfrac{z+x}{y}=\dfrac{x+y}{z}=k$,

求证：$k=2$或$=-1$.

证明 $\because$ $y+z=kx$, $z+x=ky$, $x+y=kz$,

$\therefore$ 当$x+y+z\neq 0$时,

$2(x+y+z)=k(x+y+z)$, $k=2$;

当 $x+y+z=0$，即 $y+z=-x$, $z+x=-y$,

$x+y=-z$时, $k=-1$.

*29．若 $\dfrac{x}{y+z}=a$, $\dfrac{y}{z+x}=b$, $\dfrac{z}{x+y}=c$,