

YINGYONG DAIDIANLIZIGUANGXUE YINLUN

唐天同 编著

西安交通大学出版社

# 应用带电粒子光学引论



# 应用带电粒子光学引论

唐天同 编著

西

## 内 容 简 介

带电粒子光学是研究电子和离子在电场和磁场中的运动，研究电子和离子束的产生及聚焦、成象、偏转和色散规律的一门科学。本书系统地阐述了这门学科的基本概念、基本理论、实用计算方法与实验方法及其最新进展，并介绍了应用上重要的各种电子与离子光学系统。主要内容计有：带电粒子运动的一般原理、旋转对称系统（圆透镜）、直轴多极系统、扫描偏转系统、电子和离子分析器、电子枪、计算机辅助设计计算方法和实验方法。

本书可用作物理电子技术、电子物理与器件、电子物理与离子束物理及光电子技术等专业师生的教学参考书，并可供从事电子束器件、光电子器件、电子显微镜、电子探针与电子谱分析、质谱与核谱分析、表面分析、电子与离子束曝光、电子束微电路检测、离子注入技术、电子束加工技术以及加速器与电磁同位素分离等领域的科研人员、仪器和装置的设计，制造与使用工程技术人员参考。

### 应用带电粒子光学引论

唐天同 编 著

责任编辑 曹晓梅

西安交通大学出版社出版  
(西安市咸宁路28号)

西安交通大学出版社印刷厂印装  
陕西省新华书店发行 各地新华书店经售

开本：850×1168 1/32 印张 15.75 字数 369 千字  
1986年12月第1版 1987年7月第1次印刷  
印数：1—2,200 册  
统一书号 13340·098 定价：2.90 元

## 序　　言

当代许多重大科学与技术的进展都离不开带电粒子束及其器件。例如，无线电技术若没有真空电子管的基础便不可能发展到如此高的水平；高速现象的研究离不开阴极射线示波器；电子显微镜使放大倍数达到数万倍甚至数百万倍，其分辨本领远远超过光学显微镜，使人们能以直觉的形式探测到分子甚至原子；粒子加速器以及各种粒子谱仪（ $\beta$  谱仪、质谱仪与速度分析仪）使探索基本粒子的性质并进行核物理的研究成为可能；阴极射线管（CRT）显示乃是当代人—机联系必不可少的装置；更不用说电视显象管已渗入到人们的生活领域了。此外，高速摄影技术，夜视技术的发展更需要光电成象器件——变象管和象增强器，雷达技术需要超高频真空器件——行波器、速调管和磁控管等。

我们还可以列举一些例子。可以说，带电粒子器件及仪器的发展已涉及到电子显微学、质谱学、表面物理、微电子学、生物医学、材料科学、核科学与粒子物理、计算机科学、等离子体物理、微细加工技术、光电成象技术、高速摄影技术与雷达技术等站在当代科学技术前沿的领域。在这些器件与仪器中，控制带电粒子在电场和磁场作用下，在真空中运动借以聚焦、成象、偏转以及形成粒子束等，乃是带电粒子束光学的基本问题。只有掌握带电粒子在电场和磁场中运动的规律才能够设计制造电子离子束器件与仪器，从而创造新的器件与仪器。

带电粒子光学（通常叫电子光学）的发展，最初是建立于带电粒子在电场和磁场中运动与光线在非均匀介质中传播有深刻的相似性上。这种相似性在很大程度上帮助和促进了带电粒子光学的发展，特别是电子显微镜的产生和发展。在带电粒子光学发展的历史进程中，我们可以清楚地看到，无论在研究方法或是名称

术语上，都留下了光线光学的痕迹。例如大家都知道的“透镜”、“焦距”、“程函”、“折射率”、“高斯成象”、“象差”等。

但是，带电粒子光学作为一门技术学科有其自身的特点，它绝不是光线光学的简单模仿和翻版。实际上，我们可以直接研究带电粒子在电场和磁场中的运动来表述由光线光学相似性所证明的电子和离子光学原理。而且，近代有许多电子离子光学器件和仪器与光线光学并无任何相似之处。例如，粒子加速器、某些 $\beta$ 谱仪和质谱仪等。如果就元器件的多样化来说，带电粒子光学远远超过了光线光学。

带电粒子光学，作为一门以基础科学（经典力学、电动力学和光学）为理论核心而与生产实践密切联系的专门学科，有近五十年的发展历史。近代科学技术的突飞猛进，特别是高速度、大容量电子计算机的出现，推动着带电粒子光学向前发展，无论是基础理论、研究途径或是设计方法上都有巨大的飞跃。就带电粒子光学所包含的内容来说，也是多种多样：出现了与电子显微镜相联系的电子显微学，与摄象管、显象管相联系的电视中的电子光学，与变象管、象增强器联系的宽束电子光学，与微波器件相联系的强流电子光学，考虑电子波动性的波动电子光学，与高能加速器、回旋管联系的相对论电子光学和束流传输理论，与行波管相联系的超高频电子光学，与质谱仪、能谱仪相联系的离子束光学等等。所有这些，表明带电粒子光学还是处在不断深化，不断发展之中，其前景是十分广阔的。

唐天同同志在这本书中就几何带电粒子光学问题作了较完整的介绍，诸如带电粒子光学的基本原理、电子束器件与电子离子光学装置与仪器的设计、计算机辅助设计与实验研究等。除了叙述带电粒子运动的一般原理、旋转对称场，圆电子透镜与电子透镜的象差等内容外，还包括多极场系统、偏转系统与高亮度电子枪等，特别是对于能量与质量分析器以及带电粒子光学系统的计算机辅助设计都有深入的阐述。

我深深地感到，本书的内容与叙述上有其自己的特色。特别是书中的取材，不少选自七十年代至八十年代的文献，资料翔实，内容丰富。作者在书中力求使自己叙述的内容尽可能反映当代带电粒子光学的水平，适应当前实际的需要，这是难能可贵的。作者对于本门学科的发展比较敏锐，思路较活跃，书中有不少地方是他个人的体会与见解。

唐天同同志在这本书中所表述和掌握的理论观点，数学表达和设计方法，我还不能说每一点都阐释得很准确，很完美。诚然，对于一门发展中的学科，这种要求是过份的。我感到，如何将文献中各种学派的表述，去芜存精，提炼到自己的体系之中，使全书表达更完整、更确切，深入浅出，看来将是作者更进一步的任务。这个要求或许太高了，但我衷心希望作者不要就此止步。

西安交通大学出版社总编室要我审阅这本书并为之作序，这是一件令人愉快的事，也是一次很好的学习机会。我东拉西扯写了以上这些，词不达意，仅供参考。我认为这本书是一本值得读一读的好书。特向物理电子技术，电子工程，电子物理，电子束器件、电子束与离子束装置、微电子工艺技术，加速器与实验核物理、电子显微学与微分析技术和电光学等有关专业的大学生、研究生，教师、科学工作者和工程技术人员推荐。

是为序。

周立伟

1985年9月23日于

北京西郊北京工业学院

## 绪 论

带电粒子光学(电子离子光学)是电子物理学的一个重要组成部分。带电粒子光学主要研究自由电子和离子的运动，电子束和离子束的形成、性质和应用电子束及离子束的各种科学仪器、装置和器件的原理。由于电子和离子束的可控制性能，带电粒子光学在多种现代技术中得到了广泛的应用，是对现代技术发展起着非常重大作用的物理学科之一。

带电粒子光学发展的前期主要研究的对象是自由电子束的聚焦性质。虽然带电粒子光学的主要物理原理(电磁场理论及电磁场中带电粒子的运动规律)早已确立，但电子光学的建立是在以下两方面推动下进行的：一是二十年代量子理论的建立，揭示了微粒和波动两种运动形态的深刻联系和相似性；二是实验物理和工艺技术的进展，包括自由电子—阴极射线的发现和获得，真空技术的应用和工艺的改进。从1926年布许对旋转对称磁场中电子运动的研究开始，对于旋转对称电磁场中电子运动的规律和圆透镜的性质(包括三级象差理论以及扇形磁场分析器的理论)进行了大量的研究，并得到了蓬勃发展，它标志着电子光学作为技术物理的一个分支学科的建立。与此同时，仪器和工艺技术也有了相当进展，分别研制成了电子显微镜和质谱仪。第一台电子显微镜出现于1932—1933年，而且这种早期电子显微镜的分辨率很快超过了光学显微镜，它意味着电子透镜的电子光学理论原理的实现。1935年双聚焦质谱仪的出现，宣告了带电粒子分析器的理论原理的实现和实用质谱分析仪器的出现。电子束管或阴极射线管，包括示波管、显象管和摄象管是早期电子光学的另一主要应用方面。

在第二次世界大战以后，以上关于电子透镜和透射电子显微镜，扇形磁场分析器与质谱仪以及电子偏转系统和电子束器件的理论和工艺技术得到了进一步的发展。在电子光学理论和数值计

算方法、真空工艺技术以及机械及电子学技术进展的共同促进下，透射电子显微镜已近于达到理论分辨本领，商用电镜分辨率已达数埃，科学工作者们长期以来的梦想——观察单个原子已在电镜上实现了。电子束管在电视摄象与显象管，宽频带与高分辨率示波管和显示管以及夜视与红外象管的理论与研制技术均发展到相当完善的程度。现代的高频宽带示波管，可以在 1000—2000MC 的频带宽度工作；高分辨的摄象与显示电子束管，达到了一幅画面几千行的高分辨率。尤其是彩色显象管，在解决了复杂的大偏角特殊偏转问题后，成为应用电子器件的既广泛而又产值最大的产品之一。

除了以上传统的电子光学理论及应用方面外，还出现了不少理论研究和技术应用的新领域。

在电子显微学方面，除了透射电子显微镜(TEM)外，在扫描象研究的基础上，五十年代出现了扫描电子显微镜(SEM)。扫描电镜比透射电镜方便之处是可以用于非薄膜的整块样品的研究及表面形貌的研究。随着高亮度的电子源特别是场发射电子源研究的进展，六十年代出现的扫描透射电镜(STEM)用于薄样品的研究具有比一般 SEM 高的分辨率，并早于 TEM 实现了单个原子象的观察。在有关高分辨象和晶体的电子显微学的研究中，发展了以动态电子衍射理论为基础的晶体电子显微学，电子与样品相互作用的理论以及以电子波动学说为基础的电子显微图象的形成理论，电子象的信号处理理论和技术也得到了发展。为了进一步提高分辨率，对于校正电子光学的象差也进行了大量的研究。电子显微学与电子衍射技术及微分技术相结合，形成了全面研究样品的微观形貌，晶体结构，化学组成以及其他物理化学性能的精密仪器，渗透到材料科学，生物科学，半导体和微电子学等多种现代科学技术领域中。早在三十年代末期出现的场电子及场离子显微镜经过不断改进和发展，成为观察单个原子及其晶格点阵和研究表面性质的重要手段之一。最近出现的扫描隧道显微镜，可能使原子及亚原子的观测成为可能。

由于离子与固体表面作用区别于电子作用的独特优异性能，近年来扫描离子显微镜也在大力研究发展之中。

带电粒子光学另一个重要应用方面是在分析仪器和分析技术中。这些分析仪器应用带电粒子光学原理分析带电粒子的能量及质量，从而分析样品的化学元素组成及其他物理化学性能。前面提到的质谱仪，包括利用偏转聚焦磁场和电场的双聚焦质谱仪和四极场质谱计，可用于分析气态、液态和固态的几乎所有样品的元素组成，灵敏度和分辨率均达到相当高的水平，在各种科学技术及工农业生产中得到了广泛的应用。从五十年代开始，对于细聚焦电子束轰击样品的特征 $X$ 射线的研究导致了电子探针显微分析技术的出现，为冶金、材料、地质及生物等科学技术领域提供了极高灵敏度的元素分析手段。由于扫描电子显微镜本身提供了细聚焦电子束，故现代扫描电子显微镜发展成了分析微观形貌、表面形态和 $X$ 射线元素分析的综合分析显微镜。从七十年代开始，在对电子与薄样品作用的非弹性散射的研究中，发现了透射电子的能量损失谱能反映出样品（特别是低原子序物质）的元素组成和其他很多重要物理化学性能。电子显微象加上电子衍射图形、特征 $X$ 射线和电子能量损失谱，使分析电子显微技术成了微观分析研究的强有力的工具。

七十年代以后，由于多种现代科学技术（如半导体、催化、腐蚀、薄膜的研究）中要求研究固态或薄膜与液态、气态或真空的界面上的物理—化学过程，随着表面物理与表面化学的发展，利用带电粒子光学原理研制了多种表面分析仪器。利用这些仪器可确知表面几个甚至单个原子层厚度范围内的元素组成以及原子吸附情况、化学键和电子的状态等等。这些仪器的基本原理是使带电粒子与固体表面相互作用，分析相互作用后产生的次级带电粒子的能量、质量等，从而确定其表面等组成元素，例如低能电子衍射仪(LEED)，俄歇电子谱仪(AES)，光电子谱仪(XPS—— $X$ 射线光电子谱仪和UPS——紫外线光电子谱仪)和二次离子质谱仪

(SIMS)。这些仪器的产生大大推动了表面科学与现代技术的发展，同时也促进了带电粒子分析器及带电粒子传输系统的研究。

带电粒子光学的另一重要应用方面是微电路工程。注入离子束可大大提高半导体微电路的质量。与此有关的离子的产生及纯化、离子束的聚焦和传输等离子光学问题的解决，对带电粒子光学的应用起了很大的推动作用。当微电路进入超大规模集成电路阶段，电路线条宽度达到微米及亚微米级时，电子束及离子束曝光制造掩模板及直接制造电路的技术，以及检查芯片及掩模板故障的技术成了微电子学技术进一步发展的关键。由于这些设备要求电子束离子束聚焦和偏转达到亚微米级的极高精度，又要求有较大电子离子束流，这就大大促进了高度精密的聚焦一偏转系统的理论计算、优化设计及关于电子离子束内库仑相互作用的研究。

带电粒子光学的发展长期与核科学及高能物理相联系。各种带电粒子的加速器、同位素分离器和核粒子谱仪都要用到带电粒子光学的基本原理。近年来发展的高能(强相对论)带电粒子光学，对于自由电子激光，同步辐射 $X$ 光源，电子束引爆可控核聚变及离子集体加速器等新兴重要技术领域具有重大意义。除了考虑相对论效应，交变电磁场作用等特征外。在这类问题里带电粒子束中粒子相互作用也是必须考虑的主要因素之一。

带电粒子相互间的库仑相互作用起主导作用的带电粒子光学问题称为强流电子离子光学或空间电荷光学。强流电子光学的发展是与微波电子管(速讯管、行波管等)的研制紧密联系的。微波器是功率转换器件，要利用大电流的电子束工作。微波管应用在雷达、电子对抗和微波通讯等许多方面。

应用强流电子束工作的又一领域是电子束工艺学，包括利用电子束焊接、熔炼金属、利用电子束作微细机械加工，利用电子束产生 $X$ 射线，利用离子束注入使材料改性等。作为新兴技术的一个方向，其应用潜力还将不断地得到发挥。

上述对带电粒子光学的发展和应用领域的简要回顾，说明了

这门学科与相当多领域的新兴科学技术有着密切的关系。可以预  
料，在今后，带电粒子光学将在现代科学技术发展中起更大的作  
用。

作为一本工程应用性的带电粒子光学书籍，本书介绍了理解、  
研制设计各种电子和离子光学器件、仪器和装置所必需的带电粒  
子光学的基本原理、概念和各种主要带电粒子光学部件的分析方  
法、计算方法和实验方法。略去了一些繁琐的数学推演，使具  
有一般大学物理、数学分析，数学物理方法和电磁场理论基础的  
读者尤其应用科学工作者能够扼要地掌握现代带电粒子光学的基  
本内容和研究方法。本书没有介绍这门学科内较为专门的一些内  
容，包括基于波动电子光学的电子显微镜图象的形成理论和信号  
处理、强流电子离子光学以及带电粒子束的传输理论。

本书简要介绍了：带电粒子运动的基本规律，带电粒子光学的  
几种主要系统或部件——旋转对称系统（圆透镜），直轴多极  
场系统，扫描偏转系统，聚焦偏转系统（分析器）及电子枪发射  
系统。对于这些系统分别研究了其电、磁场的性质，聚焦成象、  
偏转和色散等一阶光学性质和象差。在论述这些问题时，统一地  
使用了多极场分析的概念，并特别注意问题的物理概念，介绍了  
近年来新发展的渐近象差和离散空间电荷的象差效应。对于应用  
特别广的磁透镜和扇形磁场偏转分析器，还介绍了工程计算方  
法。在介绍电子枪发射系统时，特别注意介绍了近年来发展的尖  
端场发射阴极电子枪的基本原理和研究方法。

带电粒子光学问题的计算机辅助设计方法在带电粒子光学的  
应用方面具有重要的意义，是计算机辅助设计方法应用取得巨大  
成功的领域之一，并在近年来获得巨大的进展。本书以较大篇幅  
概括了这个领域的主要方法和最新进展。实验研究技术对研究工  
作中仍有相当作用，特别象电子枪发射系统这样的理论和计算方  
法尚不完善的系统的研制更有赖于实验研究技术。因而本书最后  
一章中简要介绍了一些常用实验研究方法的原理。

# 目 录

## 序言

## 绪论

### 第一章 带电粒子运动的一般原理

第一节	牛顿型运动方程.....	( 1 )
第二节	拉格朗日方程.....	( 6 )
第三节	最小作用原理.....	( 10 )
第四节	折射率与轨迹方程.....	( 18 )
第五节	带电粒子运动的波动性质.....	( 24 )

### 第二章 旋转对称系统

第一节	旋转对称电场.....	( 29 )
第二节	旋转对称磁场.....	( 37 )
第三节	旋转对称场中带电粒子的运动.....	( 43 )
第四节	旁轴轨迹方程.....	( 51 )
第五节	圆电子离子透镜.....	( 58 )
第六节	圆透镜的基点和基本关系式.....	( 64 )
第七节	圆透镜基点的计算.....	( 72 )
第八节	静电透镜.....	( 76 )
第九节	短磁透镜(包括复合透镜).....	( 87 )
第十节	长磁透镜.....	( 92 )

### 第三章 旋转对称系统的象差

第一节	几何象差.....	( 96 )
-----	-----------	--------

第二节	几何象差的图象.....	( 106 )
第三节	色差.....	( 115 )
第四节	渐近基点和渐近象差.....	( 120 )
第五节	空间电荷效应.....	( 128 )
第六节	其它成象误差.....	( 135 )

## 第四章 磁透镜

第一节	磁透镜的磁场.....	( 140 )
第二节	磁透镜性质的解析计算.....	( 145 )
第三节	磁透镜的工程计算.....	( 153 )
第四节	复合聚光镜—物镜.....	( 162 )

## 第五章 直轴多极场系统

第一节	直轴多极场.....	( 165 )
第二节	四极透镜.....	( 171 )
第三节	多极场系统的象差.....	( 182 )
第四节	圆透镜的轴上象散及其校正.....	( 191 )

## 第六章 扫描偏转系统

第一节	偏转二极场.....	( 197 )
第二节	电和磁偏转器.....	( 200 )
第三节	高斯偏转性质.....	( 209 )
第四节	几何象差.....	( 218 )
第五节	色差.....	( 231 )
第六节	扫描探针系统.....	( 234 )

## 第七章 聚焦偏转系统 ( 能量和质量分析器 )

第一节	均匀磁场分析器.....	( 240 )
-----	--------------	---------

第二节	曲轴磁聚焦偏转分析器的理论	( 251 )
第三节	均匀磁场分析器的工程计算	( 261 )
第四节	圆柱形电容偏转分析器	( 269 )
第五节	球形电容偏转分析器	( 276 )
第六节	筒镜分析器(圆柱形电容反射镜分析器)	( 281 )
第七节	交叉场分析器(维恩分析器)	( 286 )

## 第八章 高亮度电子枪

第一节	概述	( 292 )
第二节	平面和球面阴极模型	( 302 )
第三节	热发射枪的亮度	( 309 )
第四节	球—锥面模型	( 312 )
第五节	场发射枪的能量分散与亮度	( 320 )
第六节	场发射枪的加速和聚焦透镜	( 324 )

## 第九章 带电粒子光学中的计算机 辅助设计计算方法

第一节	拟解析法求解电场和磁场	( 332 )
第二节	有限差分法	( 345 )
第三节	有限元素法	( 357 )
第四节	偏转场和多极场的计算	( 378 )
第五节	表面电荷法	( 386 )
第六节	计算磁场的积分方程和边界元方法	( 400 )
第七节	旁轴轨迹的计算	( 411 )
第八节	一般轨迹的计算	( 422 )
第九节	电子离子光学参量的计算	( 432 )

## 第十章 带电粒子光学的实验研究方法

第一节 用电流场模拟静电场.....	( 441 )
第二节 磁场的测量.....	( 447 )
第三节 高斯光学参量的实验研究.....	( 454 )
第四节 象差和象差系数的测量.....	( 459 )
第五节 电子枪交叉截面尺寸和亮度的测量.....	( 467 )
第六节 电子离子束能量分布的测量.....	( 474 )

## 附 录

1. 基本物理常数.....	( 479 )
2. 几种常用的单位换算和数值.....	( 480 )
3. 考虑相对论效应后，电子的速度、等效电位、 波长和质量的变化.....	( 482 )

## 参考书籍

# 第一章 带电粒子运动的一般原理

带电粒子光学的主要研究对象是带电粒子的运动规律。因而，除了应用光线光学的一些原理和方法之外，一个直接而直观的方法是利用力学中的质点系动力学原理，分析计算粒子运动的轨迹。

在大多数带电粒子光学问题里，带电粒子束电流密度较小而可以忽略它们间的相互电磁作用。这样，问题便简化为单个带电粒子运动的质点动力学问题。除了熟知的牛顿方程外，本章还介绍曲线坐标系问题里应用起来的更方便的拉格朗日方程方法，以及高速运动时的相对论动力学。很多高加速电压（高能）带电粒子光学仪器及装置都必须考虑相对论效应。

力学的变分原理是一种高度概括而简洁的表达形式。本章简要介绍了哈密顿原理和最小作用原理，从而揭示了带电粒子质点动力学和光线光学的类似性。这就为带电粒子光学问题的光线光学处理方法打下了基础。

经典动力学应用的另一个限制是粒子的波动性。当然，大多数带电粒子光学问题中带电粒子是在自由空间及大尺度的外电磁场中运动，因而不必应用量子力学，而只需要考虑衍射现象对粒子运动轨迹的影响。本章介绍了应用最多的圆孔衍射问题；这一结论可用于计算带电粒子光学仪器的极限分辨率。

## 第一节 牛顿型运动方程

带有电荷  $e$ ，以运动速度  $v$  在场向量为电场强度  $E$ ，磁感应强度  $B$  的电磁场中运动的粒子，受到洛伦兹力的作用。洛伦兹力

可表述为

$$\mathbf{F} = e\mathbf{E} + e\mathbf{v} \times \mathbf{B} \quad (1-1)$$

显然(1-1)式中洛伦兹力 $\mathbf{F}$ 可视为电力 $e\mathbf{E}$ 与磁力 $e\mathbf{v} \times \mathbf{B}$ 两部分。电力与电场强度 $\mathbf{E}$ 方向相同或相反，而磁力与粒子的运动方向相垂直、因而磁力不能作功，仅电场力使粒子加速或减速。 $e$ 为电荷，对于电子及负离子， $e$ 为负值。

在洛伦兹力作用下，粒子的动量 $\mathbf{p}$ 将按牛顿方程变化

$$\frac{d\mathbf{p}}{dt} = e\mathbf{E} + e\mathbf{v} \times \mathbf{B} \quad (1-2)$$

若离子运动速度比光子小得多，则其质量可以认为是恒定的（用静止质量 $m_0$ 表示），而动量 $\mathbf{p} = m_0\mathbf{v}$ 。由此，牛顿方程可写为

$$m_0 \frac{d\mathbf{v}}{dt} = e\mathbf{E} + e\mathbf{v} \times \mathbf{B} \quad (1-3)$$

在粒子以高速运动的场合，即必须考虑相对论效应时，不能不考虑到粒子质量随着其速度而变化。这时，粒子的动量按相对论为

$$\mathbf{p} = \frac{m_0\mathbf{v}}{\sqrt{1-\beta^2}}$$

式中 $\beta = \frac{v}{c}$ ， $c$ 为真空中光速。

(1-2)式转化为

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{m_0\mathbf{v}}{\sqrt{1-\beta^2}} \right) = e\mathbf{E} + e\mathbf{v} \times \mathbf{B} \quad (1-4)$$

由(1-3)及(1-4)式，磁力均与粒子速度 $\mathbf{v}$ 相垂直而不作功，故粒子的能量变化显然仅由电场决定。用速度 $\mathbf{v}$ 对(1-4)式两端进行数量积，可得

$$\mathbf{v} \cdot \frac{d}{dt} \left( \frac{m_0\mathbf{v}}{\sqrt{1-\beta^2}} \right) = e\mathbf{E} \cdot \mathbf{v}$$

而

• 8 •