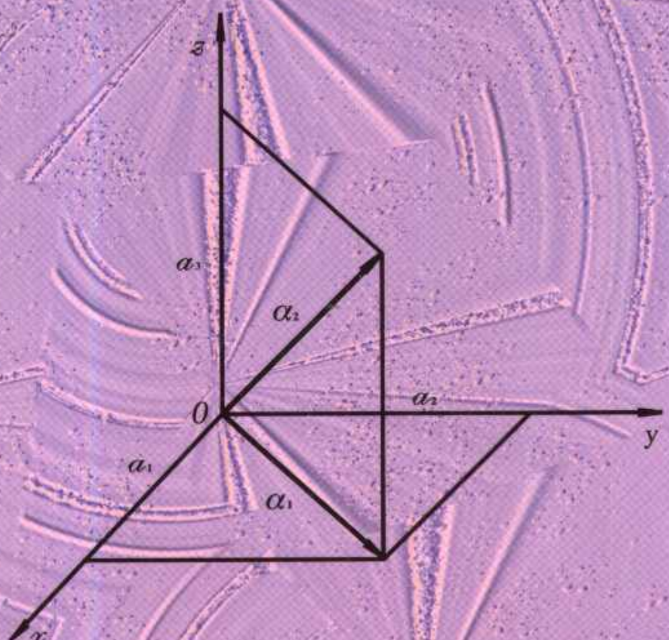
高/职/高/专/系/列/教/材

线性代数

● 刘昌喜 主编



华中科技大学出版社
HUAZHONG UNIVERSITY OF SCIENCE AND TECHNOLOGY PRESS
E-mail: hustpp@wuhan.cngb.com

图书在版编目(CIP)数据

线性代数/刘昌喜　主编
武汉:华中科技大学出版社, 2001年12月
ISBN 7-5609-2662-2

Ⅰ.线…
Ⅱ.刘…
Ⅲ.线性代数-高等学校:技术学校-教材
Ⅳ.O151.2

线性代数　　刘昌喜　主编

责任编辑:徐正达　　封面设计:刘　卉
责任校对:章　红　　责任监印:张正林

出版发行:华中科技大学出版社　　武昌喻家山　邮编:430074　电话:(027)87545012

录　排:武汉皇荣文化发展有限责任公司
印　刷:华中科技大学印刷厂

开本:787×1092　1/16　　印张:8　　字数:180 000
版次:2002年3月第1版　　印次:2002年3月第1次印刷　　印数:1—4 000
ISBN 7-5609-2662-2/O·251　　定价:10.00元

前 言

"线性代数"是工科及财经类高职、高专院校所开设的一门必选课.我们在本书的编写过程中,坚持以高职、高专教育专业人才培养目标和高职、高专教育基础课程教学的基本要求为指导思想,结合多年从事"线性代数"课程教学的经验和近几年在教学第一线所掌握的高职、高专学生的特点,力求使本书具有如下特点:

1. **结构新颖,内容完整**. 打破传统数学教材的编写方式,在涵盖课程基本内容的基础上,每章都按先提出要点,再分述,最后总结基本概念、基本理论、基本方法的方式进行编写.

2. **联系实际,注重引入**.在引入新问题之前,注重联系学生已具备的知识或生产实践中的实例及模型,使学生真正体会到数学是解决实际问题的一种有力武器.

3. **结合专业,突出特色**.第三章"线性方程组"是专门针对计算机、经济管理等专业的特点而编写的,可使学生进一步体会到:程序化的求解方法一旦借助计算机是很容易实现的. 经济学的投入产出模型也离不开线性方程组.

4. **淡化定理证明,重在方法提炼**. 结合高职、高专学生实际及培养目标,本书大部分定理没给出证明,但通过方法的总结,学生可更好地掌握其应用.

5. **深入浅出,人文启示**. 每章之后附有一段名言警句,使学生在学好科学知识的同时,如沐春风,也能受到一定的人文教育.

全书可用60学时授完,书中带"*"号的部分作为计算机专业或经济管理专业的选学内容,不作统一的教学要求.

本书由长期从事本课程教学与研究的教师编写.初稿由唐连发(第一章)、肖海军(第二、三章)、刘昌喜(第四、五章)编写,全书由刘昌喜、肖海军统稿,最后由刘昌喜定稿.

本书由刘昌喜担任主编,肖海军、唐连发担任副主编,安志鹏担任主审.

武汉职业技术学院为本书的编写提供了大力支持,在此表示衷心的感谢.

由于时间仓促,编者水平所限,书中难免存在不妥之处,希望广大读者批评指正.

编者

2001年10月

内容简介

本书是根据高职、高专教育专业人才培养目标和高职、高专教育基础课程教学基本要求，针对工科、财经类专业编写的一本“线性代数”教材.

全书内容包括行列式、矩阵、线性方程组、n维向量及n维向量空间、特征值问题与实二次型等五章. 每章之后从基本概念、基本理论、基本方法等方面进行总结；每节后有习题，每章后有综合练习题，书末有全部习题的答案.

本书力求结构新颖，重点突出，强调问题的引入和方法的归纳与总结，并充分体现不同专业的特色，同时，也注重培养学生运用知识解决实际问题的兴趣和能力. 每章后还摘录了一段名言警句，使学生在学习科学知识的同时，也能受到一定的人文启示.

本书特别适合作高职、高专的计算机、经济管理等专业“线性代数”课程的教材，也可供“专升本”学生及有关工程技术人员参考.

目　录

第一章　行　列　式

本章要点

- 行列式的定义
- 行列式的性质
- 行列式的计算方法
- 利用行列式解线性方程组的一种重要方法——克莱姆法则

第一节　行列式的定义

在线性代数的一些问题(如线性方程组、矩阵、矩阵的特征值、二次型等)中,经常要利用行列式做工具来进行计算.下面从未知量个数和方程个数相等的线性方程组的解法入手,引出行列式的概念.

一、二阶行列式

解二元线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2=b_1, \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2=b_2 \end{cases} \tag{1-1}$$

的一般步骤是:将方程组(1-1)的第一式和第二式分别乘以 a_{22}与($-a_{12}$),然后相加,消去 x_2,得

$$(a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21})x_1=b_1a_{22}-a_{12}b_2.$$

用类似的方法消去 x_1,得

$$(a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21})x_2=a_{11}b_2-b_1a_{21}.$$

当 $a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}\neq 0$ 时,就得到方程组(1-1)的解为

$$\begin{cases} x_1=\dfrac{b_1a_{22}-a_{12}b_2}{a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}}, \\ x_2=\dfrac{a_{11}b_2-b_1a_{21}}{a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}}. \end{cases} \tag{1-2}$$

式(1-2)尽管提供了方程组(1-1)解的公式,但很难记忆. 为了记住式(1-2),可从其表达式中发现一些规律.

式(1-2)中 x_1 和 x_2 表达式中的分母是相同的,都等于 $a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}$,而这个数又仅与式(1-1)中 x_1、x_2 的系数有关,而与常数项无关. 如果把这些系数按它们在原方程组中的位置写出,并在两旁各加一条竖直线,即用符号 $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$ 来表示 $a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}$这个数,便得出下列二阶行列式的定义.

定义 1　将 2×2 个数排成两行两列(横排的称为行,竖排的称为列),并在左、右两侧各加一竖线,得到的算式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}, \tag{1-3}$$

式(1-3)的左端称为**二阶行列式**，记为 D；右端称为二阶行列式的**展开式**. 其中 a_{ij} $(i=1,2;\ j=1,2)$称为行列式 D 的第 i 行、第 j 列的元素.

为了便于记忆式(1-3)，下面给出一种记法.

用 2×2 个元素排成一个方形表：

$$\begin{array}{cc} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{array}$$

先将左上角与右下角实线(主对角线)连接的两个元素的乘积项取“+”号，得 $a_{11}a_{22}$，再将右上角与左下角虚线(副对角线)连接的两个元素的乘积项取“－”号，得$-a_{12}a_{21}$，最后两项相加便得式(1-3)中的二阶行列式的展开式 $a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}$.

上述方法就是**二阶行列式的对角线法则.**

按照这个法则，即可把式(1-2)中 x_1 和 x_2 表达式的分子分别表示成

$$D_1=\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}=b_1a_{22}-a_{12}b_2,$$

$$D_2=\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}=a_{11}b_2-b_1a_{21}.$$

可以看出，D_1 和 D_2 是以 b_1、b_2 分别替换行列式 D 中第 1 列、第 2 列元素所得的两个二阶行列式.

于是式(1-2)可写成

$$x_1=\frac{D_1}{D};\quad x_2=\frac{D_2}{D}\quad (D\neq 0).$$

像这样利用二阶行列式来解二元线性方程组的方法称为二元线性方程组(1-1)的**克莱姆(Cramer)法则.**

二、三阶行列式

对于含三个未知量 x_1、x_2、x_3 的三个方程的线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+a_{13}x_3=b_1, \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+a_{23}x_3=b_2, \\ a_{31}x_1+a_{32}x_2+a_{33}x_3=b_3, \end{cases} \tag{1-4}$$

仍可以用消元法求解. 例如，把式(1-4)的第一、第二、第三个方程分别乘以 $a_{22}a_{33}-a_{23}a_{32}$、$a_{13}a_{32}-a_{12}a_{33}$、$a_{12}a_{23}-a_{13}a_{22}$，然后把结果再加起来，可知，$x_2$ 与 x_3 的系数等于零，而得到等式

$$\begin{aligned}&(a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}-a_{11}a_{23}a_{32}-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{13}a_{22}a_{31})x_1\\ &=b_1a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}b_3+a_{13}b_2a_{32}-b_1a_{23}a_{32}-a_{12}b_2a_{33}-a_{13}a_{22}b_3,\end{aligned}$$

所以，当

$$D=a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}-a_{11}a_{23}a_{32}-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{13}a_{22}a_{31}\neq 0$$

时，就得到

$$x_1=\frac{b_1a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}b_3+a_{13}b_2a_{32}-b_1a_{23}a_{32}-a_{12}b_2a_{33}-a_{13}a_{22}b_3}{a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}-a_{11}a_{23}a_{32}-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{13}a_{22}a_{31}}.$$

用类似的方法，可求得

$$x_2=\frac{a_{11}b_2a_{33}+b_1a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}b_3-a_{11}a_{23}b_3-b_1a_{21}a_{33}-a_{13}b_2a_{31}}{a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}-a_{11}a_{23}a_{32}-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{13}a_{22}a_{31}},$$

$$x_3=\frac{a_{11}a_{22}b_3+a_{12}b_2a_{31}+b_1a_{21}a_{32}-a_{11}b_2a_{32}-a_{12}a_{21}b_3-b_1a_{22}a_{31}}{a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}-a_{11}a_{23}a_{32}-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{13}a_{22}a_{31}},$$

则 x_1、x_2、x_3 为方程组(1-4)的唯一解.

从上述表达式中可以发现如下规律：

首先，x_1、x_2、x_3 的表达式中的分母都等于 D，而 x_i $(i=1,2,3)$的表达式的分子是 D 中 x_i 的系数分别用 b_1、b_2、b_3 去替换而成的. 于是，只要弄清了分母的结构，x_1、x_2、x_3 表达式的结构也就清楚了.

与二阶行列式一样，用

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

来表示三阶行列式 D，即

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}-a_{11}a_{23}a_{32}-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{13}a_{22}a_{31}$$

$$=a_{11}(a_{22}a_{33}-a_{23}a_{32})-a_{12}(a_{21}a_{33}-a_{23}a_{31})-a_{13}(a_{21}a_{32}-a_{22}a_{31}), \qquad (1\text{-}5)$$

由二阶行列式的展开式可知，式(1-5)三个括号中的式子分别为

$$\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}.$$

定义 2　将 3×3 个数排成 3 行 3 列，并在左右两侧各加一竖线，得到算式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}=a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}-a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}+a_{13}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}. \qquad (1\text{-}6)$$

式(1-6)的左端称为**三阶行列式**，右端称为三阶行列式**按第一行展开的展开式**.

与二阶行列式类似，三阶行列式也有对角线法则，具体方法如下：

在组成三阶行列式的方形表的右侧依次添加表中的第一、二列构成一个矩形表：

$$\begin{array}{ccccc} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{31} & a_{32} \end{array}$$

将三条实线连接的三个元素的乘积项分别取“+”号，三条虚线连接的三个元素的乘积项分别取“−”号，然后六项相加便得

$$a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}-a_{13}a_{22}a_{31}-a_{11}a_{23}a_{32}-a_{12}a_{21}a_{33}.$$

这便是**三阶行列式的对角线法则**.

按照上述对角线法则展开的三阶行列式与式(1-6)右端的展开式的结果是相符的.

对角线法则仅适用于二、三阶行列式.

利用三阶行列式的对角线法则，方程组(1-4)的解 x_i $(i=1,2,3)$的表达式中，分子也可以用三阶行列式 $D_i(i=1,2,3)$来表示，其中 D_i 是将 D 中的 x_i 的系数 a_{1i},a_{2i},a_{3i}分别用常数项 b_1,b_2,b_3 替换而成的.

同理可得三元线性方程组(1-4)的克莱姆法则：

当方程组(1-4)的系数构成的行列式 $D\neq 0$ 时，有唯一解

$$x_1=\frac{D_1}{D},\quad x_2=\frac{D_2}{D},\quad x_3=\frac{D_3}{D}.$$

关于一般线性方程的克莱姆法则，将在本章第四节详细讨论.

例 1 计算下列行列式：

(1) $\begin{vmatrix} 3 & 5 \\ -2 & 4 \end{vmatrix}$； (2) $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix}$； (3) $\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$.

解 (1) 由二阶行列式的展开式或对角线法则，得

$$\begin{vmatrix} 3 & 5 \\ -2 & 4 \end{vmatrix}=3\times 4-5\times(-2)=22.$$

(2) 按三阶行列式的对角线法则计算，得

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix}=2\times 2\times 2+1\times 1\times 1+1\times 1\times 1-1\times 2\times 1-2\times 1\times 1-1\times 1\times 2=4.$$

(3) 分析 因为 $a_{12}=a_{13}=0$，所以按第一行展开进行计算较为简便，即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}=a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & 0 \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}a_{33}.$$

三、n 阶行列式的定义

由上可知，三阶行列式是利用二阶行列式来定义的. 依此类推，n 阶行列式可借助 $n-1$ 阶行列式定义.

定义 3 将 $n\times n$ 个数排列成 n 行 n 列，并在左、右两边各加一竖线，即

$$D_n=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

称 D_n 为 **n 阶行列式**，它代表一个由确定的运算关系所得到的数.

当 $n=1$ 时， $D_1=a_{11}$；

当 $n=2$ 时，

$$D_2=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21};$$

当 $n\geqslant 2$ 时，

$$D_n=a_{11}A_{11}+a_{12}A_{12}+\cdots+a_{1n}A_{1n}=\sum_{j=1}^{n}a_{1j}A_{1j}. \tag{1-7}$$

D_n 中，a_{ij}表示第 i 行第 j 列的元素，$A_{ij}=(-1)^{i+j}M_{ij}$称为元素 a_{ij}的**代数余子式**，M_{ij}为由 D_n 划去第 i 行和第 j 列后余下的元素构成的 $n-1$ 阶行列式

$$M_{ij}=\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1j-1} & a_{1j+1} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i-1,1} & \cdots & a_{i-1,j-1} & a_{i-1\,j+1} & \cdots & a_{i-1n} \\ a_{i+1\,1} & \cdots & a_{i+1\,j-1} & a_{i+1\,j+1} & \cdots & a_{i+1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nj-1} & a_{nj+1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

称为元素 a_{ij}的**余子式**.

例 2 已知

$$D_4=\begin{vmatrix} 4 & 3 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & 5 & 3 \\ 2 & 4 & 6 & 7 \\ -3 & 0 & 1 & 0 \end{vmatrix},$$

写出元素 a_{34}的余子式和代数余子式.

解 因为第三行第四列元素 $a_{34}=7$，故划去它所在的行和列的所有元素后的三阶行列式

$$M_{34}=\begin{vmatrix} 4 & 3 & 1 \\ 0 & -1 & 5 \\ -3 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

为元素 7 的余子式.

a_{34}的代数余子式 $$A_{34}=(-1)^{3+4}M_{34}$$

即 $$A_{34}=-\begin{vmatrix} 4 & 3 & 1 \\ 0 & -1 & 5 \\ -3 & 0 & 1 \end{vmatrix}.$$

例 3 计算四阶行列式 $D_4=\begin{vmatrix} 3 & 0 & -2 & 0 \\ -4 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & 5 & 7 & 0 \\ -3 & 0 & 2 & 4 \end{vmatrix}$.

解 由定义，将行列式按第一行展开，即

$$\begin{aligned} D_4 &=(-1)^{1+1}\times 3\begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 5 & 7 & 0 \\ 0 & 2 & 4 \end{vmatrix}+(-1)^{1+3}\times(-2)\begin{vmatrix} -4 & 1 & 2 \\ 1 & 5 & 0 \\ -3 & 0 & 4 \end{vmatrix} \\ &=3\times(28+20)-2\times(-40+30-4) \\ &=144+28=172. \end{aligned}$$

习 题 1-1

1. 计算下列行列式：

(1) $\begin{vmatrix} 3 & 6 \\ 5 & 4 \end{vmatrix}$； (2) $\begin{vmatrix} \cos^2\alpha & \sin^2\alpha \\ \sin^2\alpha & \cos^2\alpha \end{vmatrix}$；

(3) $\begin{vmatrix} 4 & 2 & 3 \\ 7 & 3 & 0 \\ 3 & 0 & 0 \end{vmatrix}$； (4) $\begin{vmatrix} 0 & x & y \\ -x & 0 & z \\ -y & -z & 0 \end{vmatrix}$.

2. 写出下面行列式中元素 a_{23}的余子式和代数余子式：

$$\begin{vmatrix} 3 & 1 & 2 & 7 \\ 0 & 8 & -5 & 4 \\ 9 & -3 & 6 & -1 \\ 2 & 3 & 0 & 1 \end{vmatrix}.$$

3. 由定义计算下列行列式：

(1) $\begin{vmatrix} 4 & -4 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & -1 \\ -7 & 5 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 1 \end{vmatrix}$； (2) $\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 10 & 0 & 0 \\ 4 & 11 & 0 & 12 & 0 \\ 9 & 8 & 7 & 6 & 5 \end{vmatrix}$.

4. 利用三阶行列式解三元一次方程组

$$\begin{cases} 2x_1-x_2+3x_3=3, \\ 3x_1+x_2-5x_3=0, \\ 4x_1-x_2+\ x_3=3. \end{cases}$$

5. 解方程 $\begin{vmatrix} x^2 & 4 & -9 \\ x & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}=0$.

第二节 行列式的性质

二阶、三阶行列式可用对角线法则或按定义直接计算，但当 n 较大时，再从行列式的定义出发求行列式的值就比较麻烦了．于是，有必要先研究行列式的性质，然后利用这些性质来简化行列式的计算．

将行列式 D 的行、列互换后，得到的新行列式称为 D 的**转置行列式**，记为 D^{T}(或 D')．如

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}, \quad 则 \quad D^{\mathrm{T}}=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{n2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

性质 1° 行列式与它的转置行列式相等，即 $D=D^{\mathrm{T}}$.

如对于二阶行列式，有

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21},$$

对于 n 阶行列式，该性质可用数学归纳法证明(证明从略)．

由性质 1°可知行列式的行与列有同等功效．也就是说，当行列式具有关于行的某种性质时，其列也具有相应的性质；反之亦然．

例 1 计算

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ 0 & 0 & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

解 根据性质 1°和行列式的定义，n 阶行列式也可以按第一列展开，即

$$D=a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ 0 & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

对右边的$(n-1)$阶行列式继续按第一列展开，最后得

$$D=a_{11}a_{22}\begin{vmatrix} a_{33} & a_{34} & \cdots & a_{3n} \\ 0 & a_{44} & \cdots & a_{4n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=\cdots=a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}.$$

像这种主对角线下(上)方的元素全为零的行列式，称为**上(下)三角形行列式**. 上(下)三角形行列式的值等于主对角线元素的乘积.

性质 2° 互换行列式的两行(列)，行列式的值改变符号.

可以验证，对于二阶行列式，有

$$\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{11} & a_{12} \end{vmatrix}=-\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}.$$

对于 n 阶行列式可以用数学归纳法证明(证明从略).

例 2 设 $D=\begin{vmatrix} 4 & -7 & 1 \\ 3 & 5 & 2 \\ -2 & 6 & 0 \end{vmatrix}=8$，计算 $D_1=\begin{vmatrix} -2 & 6 & 0 \\ 3 & 5 & 2 \\ 4 & -7 & 1 \end{vmatrix}$.

解 我们观察到行列式 D_1 是行列式 D 的第一行与第三行互换而成的. 由性质 2°得

$$D_1=-D=-8.$$

由性质 2°可得到如下推论：

推论 如果行列式的两行(列)对应元素相等，则行列式的值为零.

证 设行列式 D 的第 i 行与第 s 行$(i\neq s)$对应元素相等，将第 i 行和第 s 行互换，仍得行列式 D，又由性质 2°知，

$$D=-D, \quad 即 \quad D=0.$$

性质 3° n 阶行列式等于任意一行(列)所有元素与其对应的代数余子式乘积之和，即

$$\begin{aligned} D_n &= a_{i1}A_{i1}+a_{i2}A_{i2}+\cdots+a_{in}A_{in}, \\ &= a_{1j}A_{1j}+a_{2j}A_{2j}+\cdots+a_{nj}A_{nj} \quad (i,j=1,2,\cdots,n). \end{aligned}$$

性质 3°(证明从略)说明了行列式可以按任一行(列)展开.

例 3 计算行列式

$$D=\begin{vmatrix} -1 & 0 & 3 & 5 \\ 3 & 0 & 1 & 0 \\ 4 & 2 & 7 & 6 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \end{vmatrix}.$$

解 注意到行列式第二列有三个元素为零，利用性质 3°，按第二列展开，得

$$D=2\times(-1)^{3+2}\begin{vmatrix} -1 & 3 & 5 \\ 3 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \end{vmatrix},$$

再将上式右边的三阶行列式，按第三列展开，得

$$D=-2\times 5\times(-1)^{1+3}\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix}=-10\times(-4)=40.$$

性质 4° n 阶行列式中任一行(列)的元素与另一行(列)相应元素的代数余子式乘积之和等于零，即

$$a_{k1}A_{i1}+a_{k2}A_{i2}+\cdots+a_{kn}A_{in}=0 \quad (k\neq i;k,i=1,2,\cdots,n),$$
$$a_{1s}A_{1j}+a_{2s}A_{2j}+\cdots+a_{ns}A_{nj}=0 \quad (s\neq j;s,j=1,2,\cdots,n).$$

证 在 n 阶行列式

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{k1} & a_{k2} & \cdots & a_{kn} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}\begin{matrix} \\ \\ (\text{第 } i \text{ 行}) \\ \\ (\text{第 } k \text{ 行}) \\ \\ \\ \end{matrix}$$

中，将第 i 行换成第 k 行的元素，得到另一个行列式

$$D_0=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{k1} & a_{k2} & \cdots & a_{kn} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{k1} & a_{k2} & \cdots & a_{kn} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}\begin{matrix} \\ \\ (\text{第 } i \text{ 行}) \\ \\ (\text{第 } k \text{ 行}) \\ \\ \\ \end{matrix}$$

显然，D_0 的第 i 行的代数余子式与 D 的第 i 行代数余子式完全一样，将 D_0 按第 i 行展开，得

$$D_0=a_{k1}A_{i1}+a_{k2}A_{i2}+\cdots+a_{kn}A_{in},$$

而 D_0 中有两行元素相同，所以 $D_0=0$. 于是有

$$a_{k1}A_{i1}+a_{k2}A_{i2}+\cdots+a_{kn}A_{in}=0 \quad (k\neq i;k,i=1,2,\cdots,n).$$

综合性质 3°和性质 4°，有

$$a_{k1}A_{i1}+a_{k2}A_{i2}+\cdots+a_{kn}A_{in}=\begin{cases} D & (i=k;i,k=1,2,\cdots,n), \\ 0 & (i\neq k;i,k=1,2,\cdots,n); \end{cases} \tag{1-8}$$

$$a_{1s}A_{1j}+a_{2s}A_{2j}+\cdots+a_{ns}A_{nj}=\begin{cases}D & (s=j;s,j=1,2,\cdots,n),\\ 0 & (s\neq j;s,j=1,2,\cdots,n).\end{cases}$$

性质 5° 用一个数 k 去乘行列式的某一行(列)中所有元素,就等于用数 k 去乘这个行列式.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ ka_{i1} & ka_{i2} & \cdots & ka_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=k\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

性质 5°还可以表述为:行列式某一行(列)的公因式可以提到行列式符号外面.

由性质 2°的推论及性质 5°很容易推得如下结论:

推论 行列式中如果有两行(列)对应元素成比例,则这个行列式的值等于零.

性质 6° 如果行列式中某一行(列)的各元素都是两项之和,则这个行列式可分解为除了这一行(列)以外,其余的元素与原行列式的对应元素相同的两个行列式的和,即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i1}+c_{i1} & a_{i2}+c_{i2} & \cdots & a_{in}+c_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ c_{i1} & c_{i2} & \cdots & c_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

证 将上述三个行列式按第 i 行展开,且它们的第 i 行代数余子式都是相同的,于是有

$$\begin{aligned}\text{左边}&=(a_{i1}+c_{i1})A_{i1}+(a_{i2}+c_{i2})A_{i2}+\cdots+(a_{in}+c_{in})A_{in}\\&=(a_{i1}A_{i1}+a_{i2}A_{i2}+\cdots+a_{in}A_{in})+(c_{i1}A_{i1}+c_{i2}A_{i2}+\cdots+c_{in}A_{in})\\&=\text{右边}.\end{aligned}$$

例 4 计算 $D=\begin{vmatrix} 2 & -1 & 5 & 7 \\ 0 & 1 & -3 & 8 \\ 4 & -2 & 12 & 17 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{vmatrix}$.

解 利用性质 6°,将行列式 D 分解成两个行列式的和,即

$$D=\begin{vmatrix} 2 & -1 & 5 & 7 \\ 0 & 1 & -3 & 8 \\ 4+0 & -2+0 & 10+2 & 14+3 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 2 & -1 & 5 & 7 \\ 0 & 1 & -3 & 8 \\ 4 & -2 & 10 & 14 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} 2 & -1 & 5 & 7 \\ 0 & 1 & -3 & 8 \\ 0 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{vmatrix}$$

$$=0+(-1)\begin{vmatrix} 2 & -1 & 7 & 5 \\ 0 & 1 & 8 & -3 \\ 0 & 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{vmatrix}=6.$$

性质 7° 将行列式的某一行(列)的各元素同乘以一个数 k 后,再加到另一行(列)对应元素上,行列式的值不变,即

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{s1} & a_{s2} & \cdots & a_{sn} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{s1}+ka_{i1} & a_{s2}+ka_{i2} & \cdots & a_{s2}+ka_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

该性质由性质 6°和性质 5°推得.

性质 7°在行列式的计算中起着重要的作用,适当选择 k,运用该性质,可使行列式的一些元素化为零. 尤其是计算数字行列式时,利用这一性质,可把行列式化为上(下)三角形行列式. 这时行列式的值就等于主对角线上元素的乘积.

今后,在行列式的计算过程中,为简明起见,约定下列三种记号分别表示常见的行列式的三种变形:

"$r_i \leftrightarrow r_j$" 表示交换第 i 行、第 j 行元素的位置;

"kr_i" 表示将第 i 行各元素乘以非零常数 k;

"r_i+kr_j" 表示将第 j 行各元素乘以 k 后加到第 i 行对应元素上.

如果是列变换,则将上述记号中的 r 相应地换作 c.

例 5 计算 $D=\begin{vmatrix} -1 & 3 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 & 0 \\ -1 & 2 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & 3 & 5 \end{vmatrix}$.

解 $$D\xlongequal[\substack{r_3+(-1)r_1 \\ r_4+r_1}]{r_2+r_1}\begin{vmatrix} -1 & 3 & 1 & 2 \\ 0 & 4 & 3 & 2 \\ 0 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 4 & 4 & 7 \end{vmatrix}\xlongequal{r_2\leftrightarrow r_3}-\begin{vmatrix} -1 & 3 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 4 & 3 & 2 \\ 0 & 4 & 4 & 7 \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal{\substack{r_3+4r_2 \\ r_4+4r_2}}-\begin{vmatrix} -1 & 3 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 11 \end{vmatrix}=-(-1)^3\times 11=11.$$

习 题 1-2

1. 计算下列行列式:

(1) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 5 \end{vmatrix}$;　(2) $\begin{vmatrix} 6 & 42 & 27 \\ 8 & -28 & 36 \\ 20 & 35 & 135 \end{vmatrix}$;

(3) $\begin{vmatrix} -ab & ac & ae \\ bd & -cd & de \\ bf & cf & -ef \end{vmatrix}$;　(4) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \end{vmatrix}$.

2. 利用行列式性质证明下列等式:

(1) $\begin{vmatrix} a^2 & ab & b^2 \\ 2a & a+b & 2b \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}=(a-b)^3$； (2) $\begin{vmatrix} c & a & d & b \\ a & c & d & b \\ a & c & b & d \\ c & a & b & d \end{vmatrix}=0$；

(3) $\begin{vmatrix} a_1+ka_2 & a_2+ma_3 & a_3 \\ b_1+kb_2 & b_2+mb_3 & b_3 \\ c_1+kc_2 & c_2+mc_3 & c_3 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$.

3. 证明行列式性质 5°.

4. 已知行列式

$$D=\begin{vmatrix} 5 & 2 & -4 \\ -2 & 3 & 7 \\ 8 & 6 & -9 \end{vmatrix},$$

验证 D 的第一行元素与第三行相应元素的代数余子式乘积之和为零.

第三节 行列式的计算

二阶、三阶行列式可以用“对角线法则”进行计算. 而 n 阶行列式的计算方法则比较灵活，技巧性强，计算也较为复杂. 但还是可以根据行列式元素的不同特征，总结出一些方法. 这些方法主要有：利用行列式可按任意行(列)展开，利用行列式的性质化简行列式，利用递推公式和“镶边法”计算行列式等.

例 1 计算 $D=\begin{vmatrix} -2 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 2 \\ 1 & 3 & 4 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \end{vmatrix}$.

分析 注意到 D 中第四行零元素有两个，可考虑按第四行展开，但在按第四行展开前，可先化简行列式.

解

$$D\xlongequal{c_4+c_2}\begin{vmatrix} -2 & 1 & 3 & 2 \\ 1 & 0 & -1 & 2 \\ 1 & 3 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{vmatrix}=(-1)^{4+2}\begin{vmatrix} -2 & 3 & 2 \\ 1 & -1 & 2 \\ 1 & 4 & 1 \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal[r_3+(-1)r_2]{r_1+2r_2}\begin{vmatrix} 0 & 1 & 6 \\ 1 & -1 & 2 \\ 0 & 5 & -1 \end{vmatrix}=(-1)^{2+1}\begin{vmatrix} 1 & 6 \\ 5 & -1 \end{vmatrix}=31.$$

例 2 计算 n 阶行列式

$$D_n=\begin{vmatrix} a & b & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & a & b & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a & b \\ b & 0 & 0 & \cdots & 0 & a \end{vmatrix}.$$

解 这个行列式每行(列)所含零元素都为 $(n-2)$ 个，而选择按第一列(或第 n 行)展开最简捷.