高等数学

上册

后勤工程学院数学教研室 编

Gao

科学技术文献出版社重庆分社

高等学校大专班试用教材

高　等　数　学

上　册

后勤工程学院数学教研室编

科学技术文献出版社重庆分社

高等学校大专班试用教材

高等数学（上册）

责任编辑　栾季生

科学技术文献出版社重庆分社 重庆市市中区胜利路132号	出版
新华书店重庆发行所	发行
中国科学技术情报研究所重庆分所印刷厂	印刷

开本：787×1092毫米1/32	印张：14.5	字数：31万
1988年3月第1版		1988年3月第1次印刷
科技新书目：163—325		印数：7600

ISBN 7-5023-0166-6/N·11

统一书号：13176·189　　定价：3.50元

前　言

为了适应四个现代化的需要，许多高等院校开设了大专班，军队院校每年也招收许多基层干部，进入大专班深造。但是，适合大专班教学的高等数学教材却很少，为便于教学，我们编写了大专班《高等数学》（上、下册），它可作为工科院校、指挥和管理院校、职工业余大学的大专班高等数学的教材或教学参考书，也可作自学之用。

本书是参照全国工科院校高等数学教学的基本要求，结合大专班教学实际情况与成人教育的特点进行编写的。在内容选取上，力求贯彻少而精的原则。为了便于课堂教学，在讲解上注意作到通俗易懂，突出重点。本书有较多的例题，每节配有适当的习题。习题分为两组，第一组为基本题；第二组为有一定思考性与技巧性的提高题，这类题用 * 号示出。每章后面有小结，供学生复习归纳用。

本书分上、下两册，上册包括一元函数微积分、常微分方程；下册包括空间解析几何与向量代数、多元函数微分法、重积分、曲线积分与曲面积分以及级数等内容。

本书由后勤工程学院数学教研室编写，参加编写的有胡敏德、郭禄应、曾传森、陈松杰、阎大桂、江兆嘉等。胡敏德同志负责全书的审定工作。

编者　　一九八七年二月

目　录

第六章　定积分及其应用 ………… (258)

第七章　常微分方程 ………………(335)

第一章 函　　数

初等数学是研究常量的数学，而高等数学则以变量为研究对象，变量与变量之间的相互依赖关系就是函数关系。本章将讨论函数的一些概念，并对中学已经学过的函数知识进行较系统的复习和提高。

第一节　函数的概念

一、常量与变量

客观事物都处在不断的运动之中，在这些运动的过程中，总伴随着数量的变化。在某一变化过程中，可以取不同数值的量叫做变量；有的量始终保持不变，只取同一数值，这类量叫做常量。

常量与变量并不是绝对的，同一种量在某种条件下是常量，而在另一种条件下，就可能是变量。我们通常用字母a、b、c等表示常量，而用x、y、t等表示变量。变量的变化范围一般用区间来表示。

区间是指介于两个实数之间的全体实数，这两个实数叫做区间的端点，包含端点的区间叫做闭区间，不包含端点的区间叫做开区间，只包含一个端点的叫做半开（半闭）区间。

区间可以用不等式或括号来表示，如a、b 为二实数，$a<b$。我们把满足不等式$a\leqslant x\leqslant b$的实数x的全体叫做闭区间，

记为$[a, b]$；把满足不等式$a<x<b$的实数x的全体叫做开区间，记为(a, b)；满足不等式$a\leqslant x<b$，或$a<x\leqslant b$的实数x的全体叫做半开（或半闭）区间，记为$[a, b)$，或$(a, b]$。

区间在数轴上是指介于某两点之间的线段上点的全体，这两点叫做区间的端点，含两个端点叫闭区间，不含端点叫开区间，只含一个端点叫半开（半闭）区间，如图1-1所示。

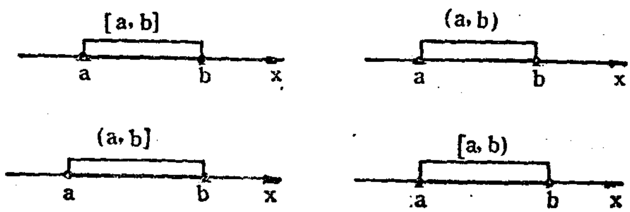

图 1-1

上述这些区间都称为有限区间，因为a、b均为有限实数。除此之外，还有一类区间叫做无穷区间，如全体实数（满足不等式$-\infty<x<+\infty$）所构成的区间，记为$(-\infty, +\infty)$。设a、b为二实数，满足不等式$a\leqslant x<+\infty$或$-\infty<x\leqslant b$的全体实数x所构成的区间都叫做无穷区间，在数轴上的表示如图1-2所示。

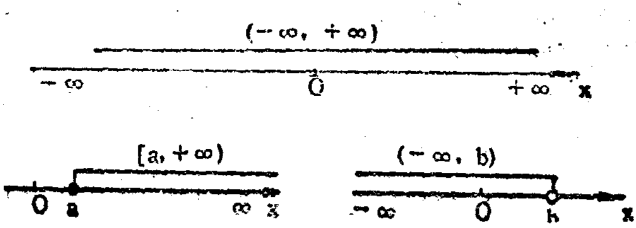

图 1-2

设a与δ是两个实数，且$\delta>0$，满足不等式$|x-a|<\delta$的

所有实数x的全体叫做点a的δ邻域，其中a叫做邻域的中心，δ叫做邻域的半径。

由绝对值的定义知，$|u|<\delta$等价于$-\delta<u<\delta$。令$u=x-a$，则有不等式$|x-a|<\delta$与不等式$a-\delta<x<a+\delta$和$-\delta<x-a<\delta$等价，所以说，点a的δ邻域就是开区间$(a-\delta, a+\delta)$，或者说是以a点为中心，长度为$\delta 2$的开区间，如图1-3所示。

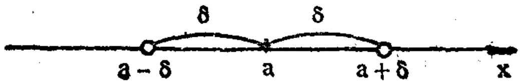

图 1-3

二、函数的概念

客观事物的变化都是相互联系而又相互制约的，反映到数量关系上就是变量与变量之间的相互依赖关系。

例1 圆的面积A与半径R之间的相互依赖关系由公式$A=\pi R^2$确定。当半径R变化时，圆的面积A也随之而变化。当半径取定某一正数时，圆的面积A有相应的一个确定的数值与之对应。

例2 初速为零的自由落体运动中，路程s和时间t是两个变量。当时间t变化时，路程s也随之而变化，它们之间的关系由公式

$$s=\frac{1}{2}gt^2$$

确定，其中g是重力加速度。假定物体着地的时刻$t=T$，那末当时间t在闭区间$[0, T]$任取定一个数值时，路程s有相应的一个数值与之对应。

上面的两个例子说明了变量与变量之间的相依关系，这种相依关系就是函数关系。

1.定义

设x、y是两个变量，当变量x在其变化范围内任意取定某一个值时，按照一定的规律，变量y总有一个确定的值和它对应，则称变量y为变量x的函数，记作

$$y=f(x).$$

其中变量x叫做自变量，变量y叫做因变量。当自变量x取某一个数值x_0时，函数y有确定的值与之对应，那么称函数y在x_0有定义。使得函数有定义的实数x的全体称作函数的定义域。因此，定义域与对应规律是确定函数两个不可缺少的要素。如果两个函数具有相同的定义域和对应规律，我们就说这两个函数相等（或者相同）。

全体函数值所构成的集合，称作函数$y=f(x)$的值域。

2.函数的记号

由函数的定义知，变量y是变量x的函数，记为$y=f(x)$。这里记号f表示变量y与变量x的对应法则，$f(x)$可以表示x的任何函数。在同一个问题中，有时要讨论几个不同的函数，为了避免混淆起见，可以用不同的函数记号，如$y=F(x)$、$y=\varphi(x)$等。

当自变量取某一数值x_0时，函数$y=f(x)$有一确定的数值与它对应，此值叫做函数在点x_0处的函数值，记作

$$f(x_0)\text{或}y|_{x=x_0}$$

例3 求函数$f(x)=x^2-3x+5$在$x=2$、$x=x_0+h$、$x=x_0+1$各点处的函数值。

解 $f(2)=2^2-3\cdot2+5=4-6+5=3$;

$f(x_0+h)=(x_0+h)^2-3(x_0+h)+5$

$$=x_0^2+2x_0h+h^2-3x_0-3h+5$$
$$=x_0^2+(2h-3)x_0+(h^2-3h+5);$$
$$f(x_0+1)=(x_0+1)^2-3(x_0+1)+5$$
$$=x_0^2+2x_0+1-3x_0-3+5$$
$$=x_0^2-x_0+3.$$

例4 已知函数$\varphi(t)=\frac{1-t}{1+t}$,求$\varphi(-t)$、$\varphi(t)+1$、$\varphi(\frac{1}{t})$,

解 $\because \varphi(t)=\frac{1-t}{1+t}$,

$$\therefore \varphi(-t)=\frac{1-(-t)}{1+(-t)}=\frac{1+t}{1-t},$$

$$\varphi(t)+1=\frac{1-t}{1+t}+1$$

$$=\frac{1-t+1+t}{1+t}=\frac{2}{1+t};$$

$$\varphi(\frac{1}{t})=\frac{1-\frac{1}{t}}{1+\frac{1}{t}}=\frac{\frac{t-1}{t}}{\frac{t+1}{t}}=\frac{t-1}{t+1}.$$

3.函数的定义域及其求法

函数的定义域是指自变量x的取值范围，或者说使函数有定义的自变量x可能取值的范围。如何确定一个函数的定义域呢?

(1) 实际问题中，可以根据问题本身的实际意义来确定。

如圆面积A和半径R的函数关系为

$$A=\pi R^2,$$

则定义域为$0 \leqslant R < +\infty$，因为圆的半径不能取负值．

（2）根据函数本身的数学表达式来确定（即使表达式有意义的自变量可能取的一切实数值）．

例5　求函数$y=\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$的定义域．

解　在实数范围内来讨论问题．由于负数不能开平方，所以根式$\sqrt{1-x^2}$中的$(1-x^2)$不能为负值，即$1-x^2 \geqslant 0$；要使算式有意义，分式的分母不能为零，即$1-x^2 \neq 0$，所以$1-x^2$必须且只能大于零，于是有$x^2<1$，即$|x|<1$，故函数的定义域为$-1<x<1$，即$(-1, 1)$．

例6　求函数$y=\lg(x^2-4)$的定义域．

解　$\because (x^2-4) \leqslant 0$时，对数无意义．

$\therefore (x^2-4)>0$，即$x^2>4$，或$|x|>2$．

于是得到函数$y=\lg(x^2-4)$的定义域为$(-\infty, -2)$，$(2, +\infty)$．

4.函数的表示方法

表示函数的方法通常有如下三种：

（1）用列表的方法来表示自变量与因变量之间的对应规律，这种表示函数的方法叫做表格法。

（2）用坐标平面上的曲线（函数$y=f(x)$的图形）来表示变量y与变量x之间的对应关系，这种表示函数的方法叫做函数的图示法。

（3）最常用的表示方法是用数学式子来表示自变量与因变量之间的对应关系，这种表示函数的方法叫做公式法，如

$$y=x+\sqrt{1-x^2}, \quad \varphi(x)=\frac{x-1}{x+1}$$

都是用一个数学式子来表示自变量与因变量之间的函数关