经济应用数学

刘书田　葛振三主编

学苑出版社

经济应用数学　　刘书田等主编

学苑出版社出版
（北京西四颁赏胡同四号）
新华书店全国发行
湖南广播电视大学印刷厂印刷
开本：850×1168　1/32　印张：11.5　字数：300千字
印数：1—3000
1990年7月第1版　　1990年7月第1次印刷

ISBN7-5077-0111-5/Z·67　定价：5.3元

前　言

本书是为成人高校广播电视大学经济管理学科的学生学习经济应用数学而编写的教材，也可作为财经类专科学校和职业大学的教材。本书内容包括：函数与极限，微积分学及其应用，矩阵与线性方程组及投入产出模型，线性规划初步及其应用。

本书重点突出，简明易懂，并着重方法的应用，只讲授高等数学的基本内容，着重概念的理解和掌握最基本的计算方法，较多地联系经济和管理的实际问题，突出了数学在经济领域的应用性。节末配有练习，章末配有习题，书末附有习题答案。

参加本书编写的有何有缘、曹树森、曹中书、马兴睦、杨永裘、赖宇庭、刘敦熙、刘明贤、文翠娥、葛振三、刘书田。

在编写过程中，我们参阅了国内外的有关教材；得到了湖南广播电视大学领导和教务处的支持，得到了学苑出版社责任编辑陈辉同志的帮助，在此一并致谢。

由于成书时间仓促及编者水平所限，错误和缺点在所难免，请读者批评指正。

编者

1990年6月

目　录

第一章　函数与极限

函数是微积分中最基本的重要概念之一，也是微积分研究的对象。我们从分析经济和日常生活中的变量出发，给出函数的一般定义；结合图形讲解一些简单函数的性质；从实例出发，介绍如何利用代数和几何知识建立经济学中几种常见的函数，为学好经济数学打下基础。

§1.1　函数

（一）函数概念

1. 函数定义

在数学中的量，大体可分两种：一种是它的值在问题的研究中是相对地始终保持不变的，通常称为常量；另一种是它的值可以变动，通常称为变量。例如，商店销售彩电，对于彩电的某个销售量，总有一个销售总收入与之对应，这时我们就说销售总收入是销售量的函数。一般地讲，对于变量x在其变化范围内所取的每一个值总有变量y的唯一确定的值与之对应，我们就说，y是x的函数。

例1　圆面积S与半径r之间的关系由公式

$$S=\pi r^2$$

给定。当r变化时，S遵循πr^2的规律而变化。当半径r取定某一正值时，圆的面积S也就对应一个确定的数值。

定义1.1　设有两个变量x和y变量x的变化范围为X（实数集），如果对于X中的每个x值，按照某一对应规律f都可唯一确定变量y相应的值，我们就称变量y是变量x的函数。记作

$$y=f(x)\qquad x\in X$$

其中x称为自变量，y称为因变量；自变量x的变化范围X称为函数

的定义域。

对于函数$y=f(x)$，当自变量x取定定义域中某一定值x_0时，因变量y的相应值称为当$x=x_0$时的函数值。记作

$f(x_0)$或$f(x)|_{x=x_0}$，$y|_{x=x_0}$当x取遍定义域中每个值时，所对应的函数值的全体称函数$y=f(x)$的值域。

例2 求函数 $f(x)=\arcsin\dfrac{x^2+1}{5}$的定义域。

解：要使函数有意义，必须

$$-1\leqslant\frac{x^2+1}{5}\leqslant1$$

解得$-2\leqslant x\leqslant2$，此即为$f(x)$的定义域。

例3 求$y=\sqrt{x-2}+\dfrac{1}{x-3}+\lg(5-x)$ 的定义域。

解：要使函数有意义，x必须同时满足

$$\begin{cases}x-2\geqslant0\\x-3\neq0\\5-x>0\end{cases}$$

解得$2\leqslant x<3$与$3<x<5$，所以y的定义域是$[2,3)\cup(3,5)$。

2.函数的表示法

定义域、值域和对应规则是函数概念的三要素，其中最主要的是对应规则。所谓函数关系就是对应规则，通常有三种表示法。

(1) 解析法，又叫公式法。就是将自变量与函数之间的关系用运算式子表示。如用$y=2+3x$，$S=\pi r^2$，$y=\ln(x^2-1)$，$y=\sin x$等表示。

若变量之间的对应规则不能用统一的一个公式表示出来，则可以在函数定义域的不同部分内用两个或两个以上的数学表达式来描述，这类函数称为分段函数。例如

$$y=|x|=\begin{cases}x, & x\geqslant0\\-x, & x<0\end{cases}$$

$$y=\begin{cases}x+1, & x<0\\ 0, & x=0\\ x-1, & x>0\end{cases}$$

都是定义在实数R上的分段函数，如图1.1和图1.2所示。

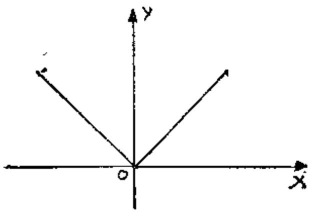


图1.1

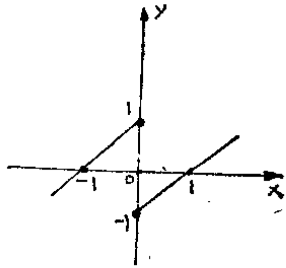


图1.2

注意：分段函数是用两个或两个以上公式合起来表示一个函数，而不是表示几个函数，在实际应用中常常用到这种表示形式。

有些函数的因变量y可用自变量x的一个数学表达式直接表示出来，如$y=x^2$，$y=\sqrt{r^2-x^2}$，$y=\log_a(3x+1)$等，而有些函数的因变量y与自变量x的函数关系用一个方程$F(x、y)=0$来表示的，如$Ax+By+C=0$，$x^2+y^2-r^2=0$等。用前一种形式表示的函数称为显函数，用后一种形式表示的函数称为隐函数。

解析法便于对函数作理论研究，定量分析和运算。但是，有些变量之间的关系，不能用公式或解析式来表示，只能用图象的方法来表示。

(2) 图象法　利用几何图形表示自变量与函数之间的对应关系。设已知函数$y=f(x)$，若在直角坐标系下，以x的值为横坐标，就确定了f坐标平面上的一个点(x, y)。当x变化时，y随之变化，点(x, y)在平面上相应地变动，动点$(x、y)$的轨迹一般是一条曲线，这条曲线称为函数$y=f(x)$的图形。

例4　某天气温T与时间t是两个变量.某天中气温自动记录仪

记录了这两者的关系如图1.3。

据图，可以求出对应于0——24小时内每一时候t_0的温度T_0。从t

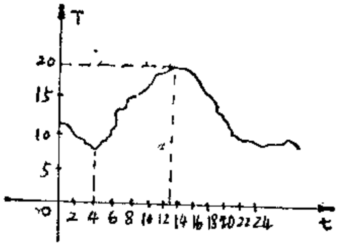


图1.3

定出T的规则是，当t取某值t_0时，在横轴上取t_0点，过此点作平行于T轴的直线交曲线于P点，量出P点的纵坐标T_0，这就是变量T应取的对应值。

图象法的优点在于鲜明直观，便于对函数作定性分析。所以，今后我们经常把函数的公式表示同图形表示结合起来去研究函数。

(3) 表格法　是用表格表示自变量与函数之间的对应关系。例如，我们经常用的对数表，三角函数表、平方根表等，都是用表格法表示函数。这种方法在实际工作中应用很广，无论是自然科学或社会科学中，在研究的初始阶段，量与量之间的函数关系常常不可能用解析式来表示，而需要将实验、观测、调整或计算得到的数据整理成表格，以反映变量之间的函数关系。

例5　为了预测市场，调查了某工厂1—9月份某种产品销售量分别为100，105，110，115，111，120件。列表如下：

月　份　t	1	2	3	4	5	6
销 售 量　q	100	105	110	115	111	120

据上表格，当t取定1—6的整数中的任一个时，q都有一个确定的数与之对应。

3.函数的简单性质

(1) 函数的奇偶性

定义1.2 给定函数$y=f(x)$

①如果自变量x任取一对相反的数值时，函数的值也相反，即

$$f(-x)=-f(x)$$

则称$y=f(x)$为奇函数。如$y=x^3$，$y=\sin x$，$y=x|x|$在$(-\infty,\infty)$上都是奇函数。奇函数的图象是关于原点对称的。

②如果自变量x任取一对相反的数值时，函数的值不变，即

$$f(-x)=f(x)$$

则称函数$y=f(x)$为偶函数。如$y=x^2$，$y=\cos x$,$y=|x|$在$(-\infty,\infty)$上都是偶函数。偶函数的图象是关于y轴对称的。

例6 判断函数①$f(x)=x^3+x$，②$f(x)=x\sin x+|x|$的奇偶性。

解：①因为$f(-x)=(-x)^3+(-x)=-x^3-x=-f(x)$

所以$f(x)=x^3+x$为奇函数。

②因为$f(-x)=(-x)\sin(-x)+|-x|=x\sin x+|x|$

$=f(x)$

所以$f(x)=x\sin x+|x|$为偶函数。

例7 判断函数$f(x)=x^3+1$的奇偶性。

解：因为$f(-x)=(-x)^3+1=-x^3+1$，$f(-x)$既不等于$-f(x)$，又不等于$f(x)$，所以$f(x)=x^3+1$是非奇非偶函数。

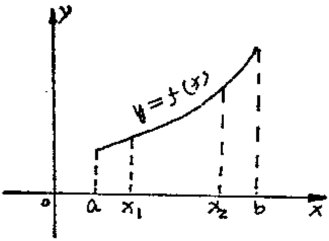
(2) 函数的单调增减性

定义1.3 给定函数$y=f(x)$，如果函数$f(x)$在区间(a,b)内任意两点x_1和x_2，当$x_1<x_2$时，有$f(x_1)<f(x_2)$，则称函数在区间(a,b)内是单调增加的；当$x_1<x_2$时，有$f(x_1)>f(x_2)$，则称函在区间(a,b)内是单调减少的。

单调增函数和单调减函数统称为单调函数。

单调增函数的图形是沿x轴的正向上升的，如图1.4所示。单

调减少函数的图形是沿x轴的正向下降的，如图1.5所示。



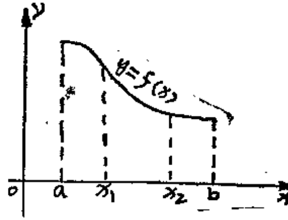


图1.4　　　　图1.5

例8　讨论函数$y=2|x-3|-4$的单调性。

解：当$x\geqslant3$时，　$|x-3|=x-3$

$$y=2x-10$$

当$x<3$时，　$|x-3|=-(x-3)$

$$y=-2x+2$$

$$\text{故有}y=2|x-3|-4=\begin{cases}2x-10, & x\geqslant3\\ -x+2, & x<3\end{cases}$$

函数$y=2|x-3|-4$的定义域是$(-\infty, \infty)$，函数在$(-\infty, 3)$内是单调减少的；而在$[3, \infty)$内是单调增加的。如图1.6所

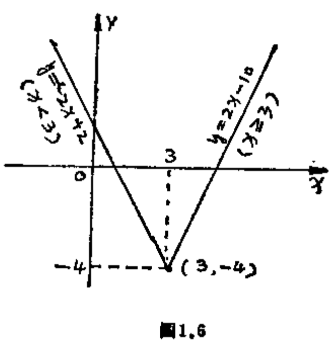


图1.6

示。

例9 判断$y=2x^2+1$的单调性。

解：对于任意x_1，x_2有

$$f(x_1)-f(x_2)=(2x_1^2+1)-(2x_2^2+1)=2(y_1^2-x_2^2)$$

在（$-\infty$，0）内，若$x_1<x_2$，则$f(x_1)-f(x_2)>0$，$f(x_1)>f(x_2)$。故$y=2x^2+1$是单调减少的。

在（0，∞）内，若$x_1<x_2$，则有$f(x_1)-f(x_2)<0$，$f(x_1)<f(x_2)$。故$y=2x^2+1$是单调增加的。

所以，在（$-\infty$，$+\infty$）内$y=2x^2+1$是非单调函数。

（3）函数的有界性

有时要了解函数值是否能在某一个范围内变化。例如，函数$y=\sin x$，当自变量x取任一实数时，因变量y的值永远满足$-1\leqslant y\leqslant 1$，即$|\sin x|\leqslant 1$。从图1.7可以看出曲线$y=\sin x$在$y=-1$与$y=1$这两条平行于x轴的直线之间变化，这样的函数称为有界函数。

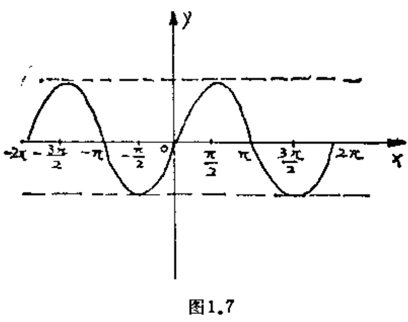


图1.7

定义1.4 设函数$y=f(x)$在区间（a，b）内有定义，如果存在一个正数M，对于所有的$x\in$（a，b），恒有$|f(x)|\leqslant M$，则称函数$f(x)$在（a，b）内是有界函数；否则，称$f(x)$在（a，b）内是无界的。

例如：函数$y=\dfrac{1}{x}$在区间（0，1）内是无界的，因为当x接近

零时，$\frac{1}{x}$无限增大，即不存在一个能使$\left|\frac{1}{x}\right| \leqslant M$成立的正数$M$；而在区间（1，2）内，函数$y=\frac{1}{x}$就是有界的了。因为存在这样一个正数$M=1$，能使$\left|\frac{1}{x}\right| \leqslant 1$成立。

（4）函数的周期性

定义1.5 对于函数$y=f(x)$，如果存在正的常数a，使$f(x)=f(x \pm a)$恒成立，则称此函数为周期函数。满足这个等式的最小正数a（如果存在的话），称为函数的周期。

例如：函数$y=\sin x$和$y=\cos x$都是周期函数，周期为2π。函数$y=\operatorname{tg} x$和$y=\operatorname{ctg} x$也是周期函数，周期为π。

例10 求函数$y=\sin\frac{x}{2}$的周期

解：设a为周期，使得$f(x+a)=f(x)$

即$\sin\left(\frac{x+a}{2}\right)=\sin\frac{x}{2}$

因为$\sin\left(2\pi+\frac{x}{2}\right)=\sin\frac{x}{2}$

所以$\sin\left(\frac{x+a}{2}\right)=\sin\left(2\pi+\frac{x}{2}\right)$

故有$\frac{x+a}{2}=2\pi+\frac{x}{2}$

$\frac{a}{2}=2\pi$，$a=4\pi$

因而$y=\sin\frac{x}{2}$的周期为4π。

一般地，函数$y=A\sin(\omega t+\psi)(\omega>0)$是以$\frac{2\pi}{\omega}$为周期的周期函数。

4.几个有关的函数概念

(1) 多元函数

在实际中，被研究的问题往往会涉及到多方面的因素。从数量关系来看，这就是一个变量依赖于多个变量的情况，这种函数称为多元函数。例如直圆柱的侧面积S，底半径R和高H之间的关系式

$$S=2\pi RH \qquad (R>0,\ H>0)$$

其中R、H是两个独立的自变量。当它们分别取得一定值时，S的对应值也随之确定。所以，S是自变量R、H的函数。它是一个二元函数。

在经济问题中，如某企业的产出量是投入资金和劳力的函数；某种商品的需求量是价格、以及每个人的收入的函数等，这些都是多元函数。

定义1.6 设有变量x，y和z，变量x、y的变化范围为数对集D。如果对于D中每一对数值$(x,\ y)$，按照某一对应规律f都可唯一确定变量z相应的值，则称z是变量x、y的二元函数。记作

$$z=f(x,\ y),\ (x,\ y)\in D$$

其中，x、y称为自变量，z称为因变量；自变量x、y的变化范围D，称为函数的定义域。

类似地，我们还可以定义三元函数、四元函数等。一般说，自变量多于一个的函数统称为多元函数。

例11 求函数$z=\sqrt{1-x^2-y^2}$和$z=\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2-y^2}}$的定义域。

解：对于$z=\sqrt{1-x^2-y^2}$，其定义域为$x^2+y^2\leqslant 1$，它是圆周$x^2+y^2=1$之上及其内部的点，即整个的单位圆。而对$z=\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2-y^2}}$，其定义域则是$x^2+y^2<1$，它是不包括边界的单位圆。

(2) 复合函数

设有函数

$$y = \ln\cos x$$

这里，y是x的函数，为确定y值，对给定的自变量x，首先计算$\cos x$；若令$u=\cos x$，再以已求得的u值计算$\ln u$，便得到y值：$y=\ln u$。

如果把$y=\ln u$理解成y是u的函数，把$u=\cos x$理解成u是x的函数，那么$y=\ln\cos x$就是由$y=\ln u$和$u=\cos x$这两个函数复合在一起构成的。按这种理解，对$y=\ln\cos x$而言，对每一个x，是经过u作媒介而有y的一个值与之对应。这样的函数称为复合函数。

定义1.7 已知两个函数：y是u的函数$y=f(u)$，又u是x的函数$u=\varphi(x)$，则函数$y=f[\varphi(x)]$就是由这两个函数复合而成称为复合函数。通常称f为外层函数，φ为内层函数，u为中间变量。

例12 设$y=f(u)=\sqrt{u}$，$u\in[0, +\infty)$，而$u=\varphi(x)=1-x^2$，$x\in(-\infty, +\infty)$，则对$y=f[\varphi(x)]=\sqrt{1-x^2}$因$1-x^2\geqslant 0$时，才有意义，所以，它是一个定义在$[-1, 1]$上的复合函数。

例13 讨论复合函数$y=f[\varphi(x)]$的定义域，已知$f(u)=\lg u$，$\varphi(x)=\sin x$。

解：因为$u>0$，即$\sin x>0$，所以函数的定义域为$(2n\pi, (2n+1)\pi)$，$(n=0, \pm 1, \pm 2, \cdots)$。

利用复合函数的概念，可以将一个较复杂的函数分解成几个较简单函数复合而成的形式。

例14 指出函数$y=e^{\sqrt{x^2+1}}$是怎样复合而成的？

解：由复合函数的概念$y=e^{\sqrt{x^2+1}}$可视为$y=e^u$，而$u=\sqrt{v}$，$v=x^2+1$，故函数$y=e^{\sqrt{x^2+1}}$由三个函数复合而成，这里的u、v是中间变量。

(3) 反函数

设某商品销售总收入为R，销售量为Q，已知该商品的单价为P。

如果给定了销售量Q，则可以通过关系$R=PQ$确定销售总收入R，这种由销售量确定销售总收入的关系称为销售总收入是销售量的函数。反过来，如果给定了销售总收入R，则可由关系$Q=\frac{R}{P}$确定销售量Q，这种由销售总收入确定销售量的关系称为销售量是销售总收入的函数。我们称后一函数$\left(Q=\frac{R}{P}\right)$是前一函数（$R=PQ$）的反函数，或者说它们互为反函数。

定义1.8 已知函数

$$y=f(x),\quad x\in X$$

其值域是Y。若对每一个$y\in Y$，X中只有一个x值，使得$f(x)=y$，则这时x也是y的函数，这个函数称为函数$y=f(x)$的反函数。记作

$$x=f^{-1}(y),\quad y\in Y$$

这时，称$y=f(x)$为直接函数。

习惯上，用x表示自变量，用y表示因变量。因此，函数$y=f(x)$的反函数常写成

$$y=f^{-1}(x),$$

其实，$y=f(x)$与$y=f^{-1}(x)$互为反函数。

容易知道，在同一直角坐标系下：

函数$y=f(x)$与$x=f^{-1}(y)$的图形相同；而函数$y=f(x)$与$y=f^{-1}(x)$的图形关于直线$y=x$对称。见图1.8。

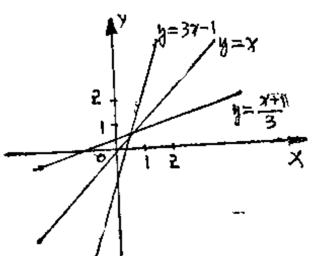


图1.8

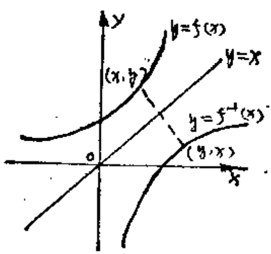


图1.9