

研究生教学用书
教育部研究生工作办公室推荐

工程波动理论导论

(第二版)

*Introduction to Wave Motion
Theories in Engineering*

廖振鹏 著

科学出版社

内 容 简 介

本书论述有关工程波动问题的理论和研究方法,分上下篇。上篇以频域分析为主线讨论线性结构的动力学问题。上篇特色之一是运用波动理论统一地阐述结构动力反应的主要分析方法及各自适用范围;特色之二是力学模型为有限封闭系统和无限开放系统并行,连续和离散兼顾,从而将结构—介质动力相互作用思想系统地引入结构动力学。下篇以时域数值模拟为主线讨论结构动力反应和弹性波散射问题。重点论述模拟无限域的实用人工边界条件,并由此系统地阐述近场波动的数值模拟技术。这一技术不仅可用于处理土木工程、机械工程和地球物理等领域中涉及的固体动力学问题,特别是大型复杂系统的线性和非线性动力学问题及弹性波散射的近场难题,还对研究电磁学、声学等科技领域中的近场波动问题有参考价值。

本书可用于涉及工程中的波动和振动问题的理工科各专业研究生教学,并可供有关教师、科技人员和高年级大学生阅读和参考。

图书在版编目(CIP)数据

工程波动理论导论/廖振鹏著.—2版.—北京:科学出版社,2002.3

研究生教学用书

ISBN 7-03-010124-3

I. 工… II. 廖… III. 工程力学:波动力学—研究生—教材 IV. TB12

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2002)第 007298 号

科学出版社 出版

北京东黄城根北街16号

邮政编码:100717

<http://www.sciencep.com>

双青印刷厂 印刷

科学出版社发行 各地新华书店经销

*

2002年3月第 一 版 开本:720×1000 1/16

2002年3月第一次印刷 印张:19 1/4

印数:1—2 500 字数:354 000

定价:32.00 元

(如有印装质量问题,我社负责调换〈新欣〉)

第二版前言

《工程波动理论导论》第二版是在第一版（1996，科学出版社）的基础上全面修订的。修订动机如下：第一，进一步突出计算机数值模拟技术在求解固体内的波动和结构振动问题中的地位，因为应用这一技术有望切实地推进大型复杂系统正反动力学问题的解决；第二，在这一学科领域内加强本书在科学研究和工程应用之间的桥梁作用，使之既有益于读者理解基本概念和研究现状，以继续推进研究工作，又有助于工程师了解有实用价值的研究成果和掌握在实际应用中的关键性操作细节。为此，删繁就简突出重点，重新组织了全书，改写了大部分章节，力求表述清楚和准确，并增添了1996年以来在这一领域内的研究成果。作者用了近半年时间完成这一修订工作。如果这一努力有助于读者把握本书主题并节省阅读时间，作者将感到欣慰。

本书论述有关工程波动问题的理论和分析方法，分为上下两篇。上篇以频域分析为主线，从波动观点出发讨论线性结构的动力学问题。上篇的特色之一是运用波动理论统一阐述结构动力反应的主要分析方法及各自适用范围，替换了从结构整体振动概念出发以模态叠加法为主体的结构动力学常用表述体系；特色之二是力学模型为有限封闭系统和无限开放系统并行，连续和离散兼顾，从而将结构-介质动力相互作用思想系统地引入结构动力学。下篇以时域数值模拟为主线讨论结构的动力反应和弹性波散射问题，重点论述模拟无限域的人工边界条件，尤其是普适性强和计算效率高的人工边界条件，并在此基础上阐述近场波动的数值模拟技术。这一部分内容不仅为大型复杂结构的线性和非线性动力反应问题及弹性波散射的近场难题提供了切实可行的求解途径和进一步研究的起点，而且对研究电磁学和声学等科技领域中的近场波动问题也有参考价值。

本书各篇、章相对独立，读者可选读有关内容。上篇反映了作者在这一学科领域内从事研究工作和研究生教学的心得，有助于拓广观察结构动力学问题的视野。这一部分内容既适合初学者阅读，亦可供熟悉此领域的读者参考。下篇反映了作者及其合作者研究近场波动问题的思路 and 主要结果。鉴于这一领域仍在发展之中，作者希望这一部分内容有助于读者了解这一学科前沿工作的现状，和认识计算机数值模拟技术对推进近场波动问题的理论研究和解决工程实际问题的重要性。掌握下篇内容的精神实质不仅需要钻研理论

部分,还必须作数值试验.建议初学者自己动手作数值试验或有选择地重复和检验书中提供的算例,这对于直观地掌握波动的基本概念和发展想像力至关重要.

书中公式和插图分章用阿拉伯数字编号.公式编号记于圆括号内.当在某章引用的公式越出该章时,在被引用公式的编号前示出该公式所在章的编号,并用圆点“.”将章编号和公式编号隔开.例如,在第二章引用第一章式(18)时,被引用的公式记为(1.18).参考文献分篇列出,其编号记于方括号内.除直接引用的文献外,在篇末列出的文献中还包括对该篇论题有参考价值并为作者所知的背景文献,供读者查阅.书中使用的记号基本统一.若同一记号在不同含义下使用,以使用处的定义为准.

本书修订工作得到许多朋友的支持与帮助.作者首先感谢下列同志认真审阅和校阅了书稿:哈尔滨工程大学戴遗山教授(全书六章)、哈尔滨工业大学何钟怡教授(上篇三章)、中国地震局工程力学研究所景立平研究员(下篇三章)、袁晓铭研究员(上篇三章)、丁海平副研究员(全书六章)、周正华副研究员(下篇三章)、侯兴民副研究员(上篇三章)和陈少林先生(上篇第三章和下篇第四章).他们的仔细阅读对减少本书错误和改进写作质量作出了宝贵的贡献.作者感谢王鹏女士细心地打印了全部书稿,以及侯兴民、丁海平和周正华三位副研究员在协助作者准备插图工作中所付出的劳动.作者感谢工程力学研究所和哈尔滨工程大学领导对这项工作的支持,特别是教育处的郑广芬女士和刘伟先生的大力支持.作者还要感谢科学出版社的支持.本书所反映的研究成果主要是作者及其合作者在地震科学联合基金和国家自然科学基金的资助下取得的.在本书即将发行之际,作者向所有对本书作出贡献的朋友和单位表示诚挚的感谢.

2001年4月

第一版序

本书以结构工程和地震工程作为应用背景，清晰而深入地介绍了工程波动理论。全书分为上、下两篇：上篇着重介绍波动的数学物理特征及结构的动力响应；下篇讨论了波源或散射源邻域内近场波动的数值模拟问题。

这是一本颇有特色的专著。首先，本书恰当地协调了物理概念明晰、数学处理严谨和工程实用性三个不同侧面，使之配置均衡、相辅相成。作者通过对数学上比较简单的一维问题的分析，生动地解释了波动现象的物理性质。对于涉及复杂数学概念或方法的问题，则在保持严谨性的基础上，力求阐明其物理内涵。另一方面，作者有着解决工程应用问题的丰富经验，使得本书在理论与实践结合方面基础坚实，脉络分明，不乏精彩的见解。其次，计算机时代的到来对于科学的发展和生产的影响如此巨大，以致今天还难以估计其影响的最终规模与深度。毋庸置疑，工程基础理论的发展也会因之带有深刻的时代痕迹。一本优秀的科学专著应当把这种趋势及前沿工作适当地介绍给读者。我们欣喜地看到本书在波动的数值仿真理论方面所作出的努力。众所周知，非均匀介质或介质具有非线性本构条件下的近场波动问题，求解难度非常之大，纯粹的解析方法往往难以奏效，但现实中不少问题又确属这种类型。本书的下篇广泛地研究了以计算机数值模拟技术为背景的时空离散理论。在下篇的三章中，显示了这一技术及其理论的丰富内容和解决现实问题的强大生命力。把连续函数的微分或积分方程离散为规格化的代数方程组，表面看来，这样作似乎把问题变得僵化而少变化，经典的数学方法好像缺少了用武之地。但是，本书告诉我们，时空网格内及其边界上的数学物理现象多姿多彩，变化多端；数学分析方法仍然重要，但需根据离散的特点，恰当地运用于所论问题。最后，波动理论是许多科学技术领域的基础，不同领域的波动问题又存在着大量共性。本书的工程背景虽然比较地集中于结构和地震方面，但是作者注意到了运用类比、外延的方法扩大视野，引向相邻领域，因此本书亦可供其他领域的读者参考，并有利于读者未来可能进行的跨领域工作。

总之，这是一本优秀的工程波动理论和应用的专著，包含有很多作者多年来创造性的科研成果。我深信，本书在发展波动理论和拓广该理论在工程中的应用方面必将起重要的作用。

A handwritten signature in black ink, consisting of three characters: '王' (Wang), '震' (Zhen), and '远' (Yuan). The characters are written in a cursive, calligraphic style.

1995年5月

目 录

第二版前言

第一版序

上篇 波动理论基础与线性结构动力学

引言	(1)
第一章 波动的基本概念和频域分析	(2)
§ 1.1 运动微分方程	(2)
1.1.1 建立运动微分方程的要点	(2)
1.1.2 标准波动方程的建立	(3)
§ 1.2 标准波动方程的一般解及其物理意义	(5)
1.2.1 一般解和波动自变量	(5)
1.2.2 标准波动方程适用范围	(7)
§ 1.3 波阻抗和波动能量	(9)
1.3.1 一个简单的初边值问题	(10)
1.3.2 波阻抗	(12)
1.3.3 波动能量	(12)
§ 1.4 频域分析	(13)
1.4.1 简谐波	(14)
1.4.2 频域分析的基本知识	(15)
1.4.3 梁和弹性支承杆中的波动	(18)
1.4.4 波群与群速度	(22)
§ 1.5 介质的线性阻尼效应	(25)
1.5.1 一般线性体本构模型	(26)
1.5.2 频域本构方程和线性滞回阻尼	(30)
1.5.3 时域本构方程和线性滞回阻尼	(38)
§ 1.6 波的反射与透射	(44)
1.6.1 在分界面上的反射与透射	(44)
1.6.2 层间波幅系数的转换关系	(48)

§ 1.7 成层介质中的稳态波动	(49)
1.7.1 线弹性土层的稳态地震反应	(49)
1.7.2 线性滞回阻尼土层的稳态地震反应分析及其推广	(52)
§ 1.8 离散傅里叶变换及土层暂态地震反应	(53)
1.8.1 离散傅里叶变换和输入波动的分解	(54)
1.8.2 线性土层暂态地震反应	(56)
1.8.3 非线性土层暂态地震反应的等效线性化解法	(57)
§ 1.9 时域数值模拟与频域分析	(59)
1.9.1 问题的表述	(60)
1.9.2 时域数值模拟	(62)
1.9.3 时域数值模拟与频域分析结果的对比	(63)
第二章 连续线性结构的动力反应分析	(67)
§ 2.1 封闭线弹性系统动力反应的模态叠加解法和波动解法	(67)
2.1.1 封闭线弹性系统的固有振动	(68)
2.1.2 模态叠加解法	(73)
2.1.3 波动解法及其与模态叠加解法的对比	(77)
§ 2.2 开放线弹性系统动力反应的混合解法与波动解法	(81)
2.2.1 混合解法	(81)
2.2.2 波动解法及其与混合解法的对比	(84)
§ 2.3 金井清公式	(86)
2.3.1 基本公式	(87)
2.3.2 结构顶部和基底水平运动的关系	(91)
§ 2.4 伸臂结构水平地震反应的混合解法	(93)
2.4.1 基本公式	(94)
2.4.2 结构与地基动力相互作用的若干概念	(98)
§ 2.5 烟囱的竖向地震反应	(99)
2.5.1 行波分析	(99)
2.5.2 行波转换系数	(101)
2.5.3 结构竖向地震输入和辐射阻尼效应	(106)
第三章 离散线性结构的动力反应分析	(111)
§ 3.1 封闭线性系统	(111)
3.1.1 结构的固有振动	(111)
3.1.2 时域模态叠加法	(112)
3.1.3 频域模态叠加法	(114)

3.1.4 直接解法	(115)
§ 3.2 开放线性系统	(116)
3.2.1 波源问题——动载直接作用于结构	(116)
3.2.2 散射问题——动载含无限域中的入射波	(118)
§ 3.3 结构地震反应分析	(120)
3.3.1 结构-刚性基础-弹性地基的动力相互作用	(120)
3.3.2 地基阻抗矩阵	(126)
3.3.3 结构-分离基础-弹性地基的动力相互作用	(131)
3.3.4 小结	(132)
参考文献	(134)

下篇 近场波动的数值模拟

引言	(136)
第四章 人工边界条件	(141)
§ 4.1 概述	(141)
4.1.1 全局人工边界条件	(142)
4.1.2 局部人工边界条件	(148)
§ 4.2 透射理论和多次透射公式	(156)
4.2.1 透射理论和基本公式的导出	(156)
4.2.2 MTF 的微分形式及其与 Clayton-Engquist ABC 的关系	(162)
4.2.3 人工边界的假反射	(163)
§ 4.3 多次透射公式和无穷远辐射条件	(168)
4.3.1 射向人工边界的波动——无穷远辐射条件的近场表达式	(168)
4.3.2 多次透射公式与无穷远辐射条件的近似等价性	(173)
4.3.3 近似等价性在近场波动数值模拟中的含意	(175)
§ 4.4 透射理论的推广	(177)
4.4.1 基于空间外推的推广	(177)
4.4.2 基于引入多个人工波速的推广	(178)
4.4.3 频域多向透射边界	(181)
附录	(187)
第五章 波动的有限元模拟	(190)
§ 5.1 模拟波动的有限元模型	(190)
5.1.1 一致质量有限元模型	(190)
5.1.2 集中质量有限元模型	(193)

§ 5.2 内节点运动方程的时步积分和数值稳定性	(200)
5.2.1 时步积分格式	(200)
5.2.2 积分格式的数值稳定性	(204)
§ 5.3 离散网格中的波动	(213)
5.3.1 一维离散网格中的波动	(213)
5.3.2 多维离散网格中的波动	(219)
5.3.3 集中质量有限元模型的合理性	(227)
第六章 近场波动数值模拟的实现	(232)
§ 6.1 解耦技术的实现	(232)
6.1.1 多次透射公式的数值实现	(233)
6.1.2 散射问题的输入技术	(236)
6.1.3 数值试验	(240)
§ 6.2 解耦技术的稳定实现	(253)
6.2.1 振荡失稳机理和消除措施	(253)
6.2.2 漂移失稳机理和消除措施	(261)
6.2.3 透射边界的稳定实现方案和数值试验	(263)
§ 6.3 线性结构-地基动力相互作用分析方法的改进	(270)
6.3.1 频域透射边界及其应用	(271)
6.3.2 时域-频域联合解法	(277)
参考文献	(286)

上篇 波动理论基础 与线性结构动力学

引 言

在动载作用下工程结构的反应是一种波动. 因为在动载作用处产生的振动不是立刻影响其他部位的, 振动的传播必需一定时间, 并必需经过一定通道. 因此, 结构动力反应分析在本质上是一个波动问题. 工程结构建筑在地表或地面下, 在地震和动力设备等动载作用下结构和地基之间存在能量的交换. 所以, 结构的动力反应分析不仅包括封闭系统中的波动问题, 而且还有由有限结构和无限地基构成的开放系统中的波动问题. 这类工程中的波动问题涉及常规的宏观运动, 即介质的特征尺寸和波长均远大于介质微观离散构造的线度, 同时这些波动涉及的速度远小于光速, 因此它们可以应用经典力学原理加以研究. 本篇从上述观点出发讨论线性结构的动力学问题.

全篇包括三章. 第一章讨论工程波动理论的基本概念和处理线性问题的频域分析方法. 这一章的内容是从波动观点了解线性结构动力学不可或缺的. 为了突出概念的物理内涵和分析方法的实质, 避免高维模型引入的繁复数学表述, 本章讨论将限于一维模型. 第二章针对简单线性结构, 采用传统的连续模型解析地阐明结构动力反应的主要方法、它们之间的联系和各自适用范围, 以及结构-地基动力相互作用的若干重要概念. 第三章针对复杂线性结构(包括有限封闭系统和无限开放系统), 采用离散模型讨论结构动力反应的实用分析方法.

第一章 波动的基本概念和频域分析

本章讨论波动理论的基本概念,它们对于了解全书的内容是不可或缺的.波动理论的出发点是连续介质的运动微分方程,本章首先论述依据经典力学原理建立这类方程的思路和主要环节,并通过一维标准波动方程的建立过程加以说明.然后,从这一最简单的波动方程出发介绍波动理论的基本概念,特别是通过波速将空间和时间坐标组合起来的波动自变量(wave motion argument)或行进特征(Forward characteristic),它是任何波动现象的本质特征,深刻地理解这一特征对学习波动理论至关重要.接着讨论建立在简谐波概念之上的频域分析的要点.这一分析方法是研究波动问题的有力手段,它贯穿全书对线性波动问题的讨论.本章将运用频域分析进一步阐明弹性波的频散、波在不同介质分界面上的反射和透射,以及传播介质的阻尼效应.

§ 1.1 运动微分方程

1.1.1 建立运动微分方程的要点

连续介质的运动微分方程根据经典力学建立,其要点如图 1.1 所示.

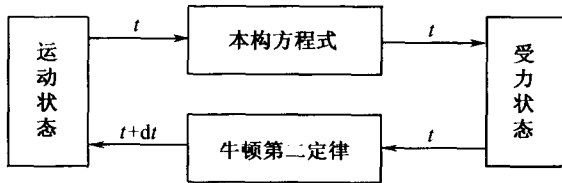


图 1.1 建立运动微分方程的要点

连续介质内任一点在任一时刻 t 的动力状态,包括它的运动状态和受力状态两个方面.前者一般用位移、速度、应变、应变速度等参数描述,后者则用应力、体积力等参数描述.动力状态的这两个方面是相互转化的,这一转化通过本构方程和牛顿第二定律实现.本构方程表示介质的内部结构和物理性质所规定的运动状态和受力状态的对应关系,一旦确定了某一时刻 t 的运动状态及其历史,则在 t 时刻的受力状态由本构方程决定.另一方面,一旦确定了

t 时刻的受力状态,则在邻近时刻 $t + dt$ 的运动状态则由牛顿第二定律确定. 于是依据 $t + dt$ 时刻的运动状态又可按照本构方程确定 $t + dt$ 时刻的受力状态,反映动力状态时空变化规律的运动微分方程就是上述运动和受力两种状态相互转化的数学表达.事实上,这一相互转化关系使连续介质内任一微分体积元在 $t + dt$ 时刻的动力状态完全取决于它在 t 时刻的动力状态及其历史.因此,若已知某一时刻的动力状态及其历史,则以此时刻为起点,便可以确定下一个以至连续不断一个个时刻的状态,从而规定了连续介质运动变化的规律性.综上所述,运动微分方程的建立在于综合以下四个环节:运动状态的规定、受力状态的规定、本构方程的建立和应用牛顿第二定律.前面三个环节合起来就是所谓力学模型.建立力学模型时需要注意以下两点:第一,这三个环节的特殊性.除去关于受力状态的规定受到作用力等于反作用力的一般性约束、运动状态受到某种可微分性约束以及本构关系受到若干一般原理的约束之外,这三个环节中的每一个均具有极强的特殊性.因此,建立特定问题的力学模型需要具体情况具体分析,这是建立合理的运动微分方程的关键所在.第二,本构方程是这三个环节的核心,一般需要在观测试验的基础上建立.最后一个环节具有普遍性,学习者应熟练掌握和灵活应用各种表达牛顿第二定律或与其等价的原理的数学方法.因此,为了建立适用于特定条件下特定问题的运动微分方程,首先要研究前面三个环节的特殊性,抓住关键,建立有针对性的、既能模拟实际情况又简便实用的力学模型,然后用牛顿第二定律列出运动微分方程.上述研究纲要既具有原则性又具有灵活性.牛顿第二定律和其他三个环节中的一般原理构成了建立运动微分方程的刚性骨架,即必须遵守的原则;而力学模型的特殊性则构成环绕这一骨架的柔性层,使这一具有伸缩性的研究纲要能够以极大的灵活性适应各种特殊的运动规律,并将实际工程力学问题“翻译”为数学问题.这一纲要对于建立连续模型或离散模型、线性模型或非线性模型、固体或流体以及微分元或有限体系的运动微分方程都适用.如果考虑介质所处物理状态(如温度、电磁场等)与运动状态、受力状态和本构关系的相互影响,上述思想也是建立更广泛的应用物理运动微分方程的基础.这一纲要将体现于书中各个主要部分,下面先以一个简单例子予以说明.

1.1.2 标准波动方程的建立

我们考虑均匀剪切变形直杆的横向运动.所谓剪切变形直杆是指杆的横截面仅在与杆轴垂直的方向上平移,同时在平移过程中截面形状和大小保持不变(图 1.2).因此,杆的运动状态完全由直杆轴线横向位移 u 描述,

$$u = u(x, t) \quad (1)$$

式中,空间坐标 x 固定在未变形状态的杆轴上, t 为时间坐标. 剪切变形直杆的运动学参数可以由式(1)导出,例如剪应变 γ 由下式定义(见图 1.2):

$$\gamma = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta u}{\Delta x} = \frac{\partial u}{\partial x} \quad (2)$$

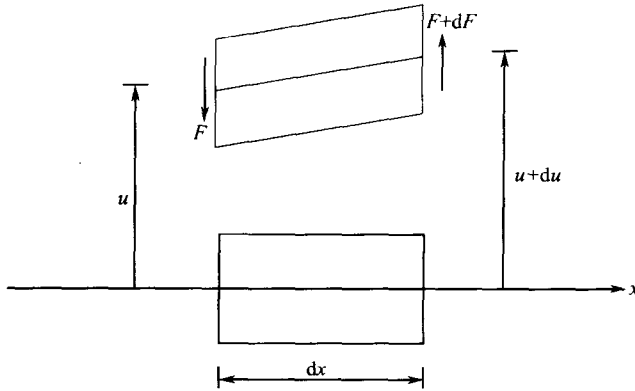


图 1.2 匀直剪切杆的横向运动

由于直杆只有剪切变形,它的受力状态可以用作用于横截面上的剪力 F 描述(图 1.2),它也是一维空间坐标 x 和时间 t 的函数,

$$F = F(x, t) \quad (3)$$

对于弹性剪切变形杆,本构方程可用剪力 F 和剪应变 γ 的对应关系表示,

$$F = C(\gamma) \quad (4)$$

把式(4)右端按泰勒(Taylor)级数展开,并保留到一阶小量 γ ,则

$$F = K\gamma \quad (5)$$

这是应力与应变成正比的线性本构方程,是胡克(Hooke)定律的一维表达式.式中弹性系数 K 具有力的量纲,称为直杆的剪切刚度.式(5)在小应变的条件下成立,

$$|\gamma| \ll 1 \quad (6)$$

将牛顿第二定律应用于上述匀直剪切变形杆力学模型,对于微分元 dx (图 1.2),得到

$$F + \frac{\partial F}{\partial x} dx - F = m dx \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \quad (7)$$

式中 m 为直杆单位长度的质量.将本构关系式(5)代入式(7)并利用式(2)可以得到

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad (8)$$

式中

$$c = \sqrt{K/m} \quad (9)$$

方程(8)即为一维标准波动方程. 参数 c 是描述波动的重要参数, 称为波速, 其物理意义在下节讨论. 一维标准波动方程(8)及其赖以建立的力学模型很简单, 但很有用. 因为, 在一定条件下, 这个简单模型抓住了问题的关键. 例如, 研究在水平地震地面运动作用下多层框架房屋的整体地震反应时有时可采用这一力学模型. 虽然水平地震动引起的框架房屋的变形很复杂: 不仅有楼层间的错动, 而且楼层的横梁和楼板要变形, 立柱也会发生纵向变形. 然而, 在许多情况下, 层间柱子的抗剪刚度远小于其纵向刚度, 而楼板及横梁变形对结构整体变形的影响不大, 因此框架房屋的整体变形主要受层间错动控制. 由于作用在房屋上的水平地震力主要取决于整体运动, 因此就估计作用在多层框架房屋上的水平地震力而言, 剪切变形杆常为合理的力学模型. 对某些类型多层框架房屋自振周期的实测结果表明, 实测整体自振频率非常接近于这一理论模型的推测值. 因此, 这个简单模型就估计房屋在水平方向承受的地震惯性力而言有时是很有用的.

§ 1.2 标准波动方程的一般解及其物理意义

1.2.1 一般解和波动自变量

方程(8)的一般解可以用初等方法求出. 作变量代换

$$\begin{aligned} \xi &= x - ct \\ \eta &= x + ct \end{aligned} \quad (10)$$

用链式微分法则容易证明

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} &= \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} + 2 \frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} + \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} \\ \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} &= c^2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} - 2 \frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} + \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} \right) \end{aligned}$$

将这些表达式代入式(8)得

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} = 0 \quad (11)$$

上式的一般积分为

$$u(x, t) = f(x - ct) + g(x + ct) \quad (12)$$

一般解(12)中 f 和 g 是两个任意函数. 文献中称式(12)为波动方程的达朗贝尔(D'Alembert)解. 函数 f 和 g 的特定形式需要由边界条件和初始条件确定, 这将在 § 1.3 用一个简单例子说明. 函数 f 和 g 的自变量 $x - ct$ 和 $x + ct$ 是空间坐标 x 和时间坐标 t 的特殊组合, 称为波动自变量或波的行进特征. 虽然在这里波动自变量是从简单的一维标准波动方程引出的, 但它表示了任何波动现象的本质特征: 波动以有限速度 c 传播. 利用标准波动方程一般解式(12)可以对波动的本质特征作清晰的说明. 首先考虑式(12)中的第一项, 设 $u(x, t) = f(x - ct)$. 图 1.3 示出相对于静止坐标轴 x 在两个不同时刻 $t=0$ 和 $t=t_1$ 时的波形, 即位移 u 相对空间坐标 x 变化的图形. 设想一位观察者以均匀速度 c 沿着 x 轴正方向移动, 假定在观察者身上固定一条与静止轴 x 指向相同的坐标轴 x' , 且 x' 轴的原点固定于观察者. 设观察者正好在 $t=0$ 时刻到达静止坐标轴 x 的原点 $x=0$, 此时观察者看到的波形就是 u 随坐标 x' 的变化 $f(x')$. 这是因为, 在 $t=0$ 时刻, x' 轴与 x 轴原点重合, $x' = x$. 在 $t=t_1$ 时刻, 观察者移动了距离 ct_1 , 静止轴上任一点的坐标在观察者看来为 $x' = x - ct_1$, 因此观察者看到的波形仍是 $f(x')$, 即观察者在不同时刻看到的波形是不变的. 换言之, 固定的波形 $f(x')$ 随着观察者以相同速度 c 向着 x 轴正方向移动. 用类似方法可以看出, $g(x + ct)$ 表示沿着负 x 轴方向以速度 c 传播的波动. 由此可见, 波动方程(8)中的常数 c 表示波形传播速度.

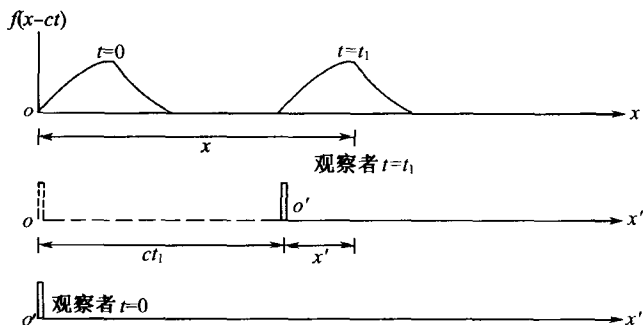


图 1.3 波形以速度 c 传播示意图

波速也可以理解为振动的传播速度. 考虑在固定点 $x = x_1$ 上质点的运动

$$u(x_1, t) = f(x_1 - ct)$$

在另一固定点 $x = x_2 (x_2 > x_1)$ 上质点的运动可以写成

$$u(x_2, t) = f(x_2 - ct)$$

$$= f\left[x_1 - c\left(t - \frac{x_2 - x_1}{c}\right)\right]$$

上式表示在点 x_2 和点 x_1 处 u 随时间的变化规律完全相同, 仅在时间上滞后 $(x_2 - x_1)/c$, 即波穿过点 x_2 和 x_1 这段距离需用的时间. 任何一点的振动要传到另一点都需要一定的时间, 这是波动现象所具有的本质特征. 这一特征就是通过波动自变量来反映的. 只要一个物理量可以表示成波动自变量的函数, 那么该量的振动和波形就以波速 c 传播. 波动自变量是波动本质特征的数学表达, 是掌握波动理论至关重要的基本概念. 由于波动自变量仅用于规定时间和空间坐标之间的关系, 波动自变量也可以写成其他形式: $\frac{x}{c} \pm t, t \pm \frac{x}{c}$, 等.

例如, 一维标准波动方程的一般解式(12)可以写成 $u(x, t) = f\left(t - \frac{x}{c}\right) + g\left(t + \frac{x}{c}\right)$.

1.2.2 标准波动方程适用范围

虽然式(8)是从匀直杆的剪切横向运动导出的, 它也适用于一系列物理性质极为不同的波动问题. 作为一个例子, 我们考虑图 1.4 所示的正截锥形弹性杆的纵向运动. 作为一级近似, 杆的纵向运动可以用杆的横截面沿杆轴平行移动描述, 且截面在平移过程中不变形. 也就是说用截面纵向位移 $u_x = u_x(x)$,

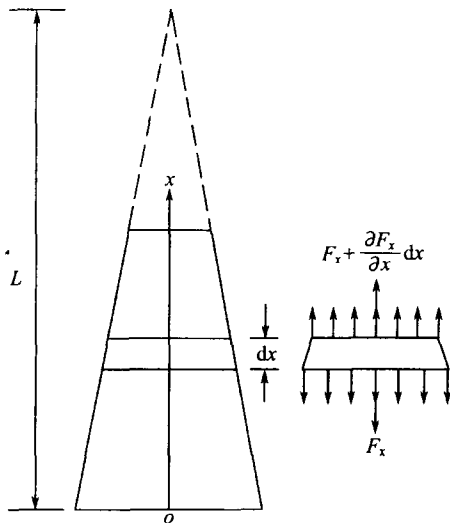


图 1.4 正截锥形杆的纵向运动模型