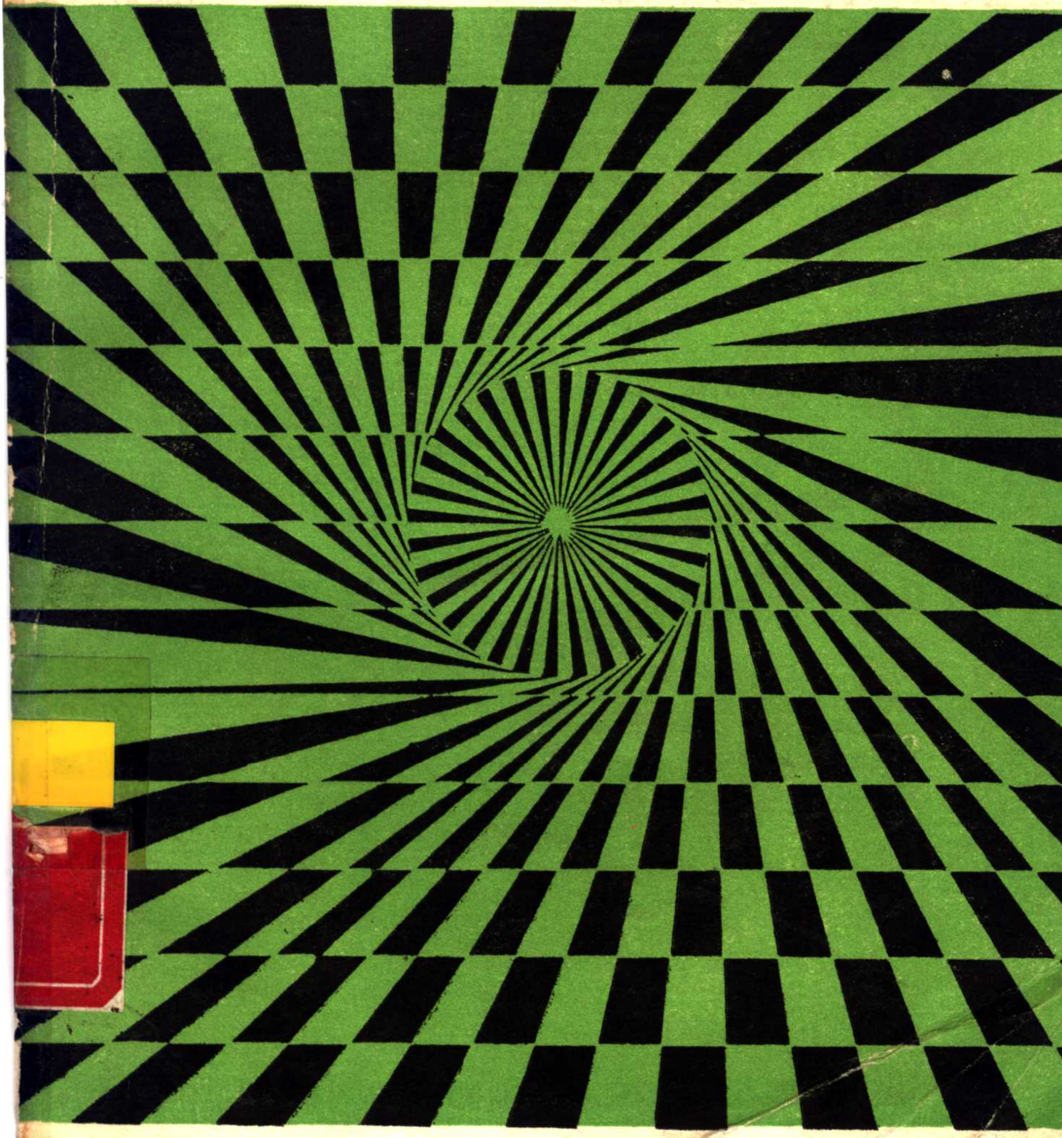
逐次逼近法

潘林森　王飞　编译



四川科学技术出版社

逐次逼近法

潘林森 王飞 编译

四川科学技术出版社

1989年·成都

责任编辑：杨佛章
封面设计：文章
技术设计：穆易
责任校对：侯矾楠

逐次逼近法

潘林森　王飞编译

四川科学技术出版社出版发行
（成都盐道街三号）
新华书店重庆发行所经销
四川省安岳县印刷厂印刷
ISBN 7-5364-1350-5/O·36

1989年8月第一版　　开本 787×1092 1/32
1989年8月第一次印刷　　字数 93千
印数 1—5000册　　印张 4.25
科目：198—305　　定价：1.35元

编译者序

本书主要介绍电子计算机解各类方程的方法。全书以逐次逼近为中心，系统地论述了高次方程、无理方程、线性方程组、非线性方程组等应用问题的计算机解法，对每种方法都列出了具体求解公式，并作了直观的几何解释，最后还简单讨论了方法的收敛性。

本书的特点是主题突出、选材精当，与计算机解题联系紧密，着重方法的实用性，完全避开了用高等数学知识进行繁琐复杂的理论推导，而从初等数学出发，形象直观地对各种方法展开讨论。全书以通俗的文字，从生活中实际例子出发，由浅入深地逐步把用计算机解题的各种方法呈现给读者。因此，具有一般中学数学基础知识的人都能阅读这本书，并能掌握书中论述的方法。

本书系根据莫斯科罗蒙诺索夫国立大学的N·Ya·维伦金先生的同名著作编译而成。原著用俄文出版过两次，后被译成英文，是一本很有特色的计算机应用数学的普及性读物。可作为学习计算机解题方法的启蒙教材，也可供从事计算机工作的工程技术人员参考。还可作数学爱好者的参考读物。

在本书编译过程中，王仲文先生审校了全部稿件并对文章作了不少修改；张新副教授也审阅了全部文稿。对他们给予的极大的帮助和支持，作者谨在此致谢。由于作者水平有限，谬误之处难免，敬请读者指正。

潘林森　王　飞

目 录

1. 绪　言

在中学学习数学的时候，我们大量的时间是花在求解方程或方程组上，最初学习的是一次方程和一次方程组，后来，又学习了二次方程、双二次方程和无理方程，最后，还熟悉和掌握了指数方程、对数方程和三角方程。

我们如此重视方程决不是偶然的，因为方程在数学实际应用中是非常重要的。在你所选择的任何一个领域中应用数学，都要求解方程或方程组，才能得到最终的答案。

在中学，方程常常用于求解物理问题，例如，考虑下面的问题：

把一石头扔进井里，如果石头扔下T秒后便听到石头碰击水面的声音，求井水水面至井口的距离？

我们假设距离为x，为此得到一个关于x的方程

$$\sqrt{\frac{2x}{g}}+\frac{x}{v}=T$$

其中，V是声音在空中传播的速度（$\sqrt{2v/g}$ 是石头落到井水水面的时间，x/v是声音从井水水面传到地面的时间）。这是一个无理方程。令$\sqrt{x}=y$，原式化为一个二次方程

$$\frac{y^2}{v}+\sqrt{\frac{2}{g}}y-T=0$$

这个方程，用大家都知道的二次方程求解公式便可求解。

方程同样可用于解答几何问题，例如把一长度为l的线段AB划分成AC和CB，使得$AB:AC=AC:CB$，这个问题便导出一个二次方程

$$x^2+lx-l^2=0$$

其中，x表示AC的长度。

把一角度为α的角分为3等份的问题又导出一个比较复杂的方程：

$$4x^3-3x-\cos\alpha=0$$

其中，$x=\cos\frac{\alpha}{3}$。这样的方程叫三次方程。在中学是没有学习过的，但是在任何高等代数教科书里，都证明了关于三次方程有求解公式，见下面的公式（3）。

然而，在物理中，我们常常遇到的问题，导出的是更复杂的方程，这些方程，往往用我们过去在中学或大学所学的知识是难以求解的，例如，把一根铁条（工程师称它为桁条），铅直地固定紧它的一端，这时，如果我们敲击铁条一下，铁条就要产生横波振动，要求这种振动的频率，就要求解方程

$$e^x+e^{-x}=\frac{2}{\cos x} \qquad (1)$$

其中，$e=2.71828\cdots\cdots$

中学里，根本没有求解这种方程的法则，不要以为这是由于中学数学课程太简短，实际上，在中学通常所学的知识范围内，方程（1）是根本没有公式求解的。现在，让我们对这个问题作比较确切的陈述：

一个方程，如果它的根能够借助于算术运算、开方运算以及指数、对数、三角函数、反三角函数，用方程的各种参

数来表示，我们就说方程有求解公式。在这种意义上，二次方程$x^2+xP+q=0$有以下求解公式

$$x=-\frac{p}{2}\pm\sqrt{p^2/4-q} \qquad (2)$$

同样，三次方程*

$$x^3+px+q=0$$

也有求解公式

$$x=\sqrt[3]{-\frac{q}{2}+\sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}}}+\sqrt[3]{-\frac{q}{2}-\sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}}} \qquad (3)$$

可是在实际使用公式（3）时，却包含了若干困难，同时还要求使用复数。

对于四次方程，也有求解公式，但非常复杂，因此，我们不在此讨论了。

五次或高于五次方程的情形就更糟了，挪威数学家阿贝尔早在1826年就证明了：n次代数方程：

$$a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots\cdots+a_n=0$$

当$n\geqslant 5$时，没有求解公式（它的根不能借助于算术运算和开方运算来表示），只是在特殊情况下，高于四次的代数方程才可能有求解公式**。

如果数学家们研究方程时仅仅限于考虑准确解，即只考

---

* 任何三次方程$a_0x^3+a_1x^2+a_2x+a_3=0$都可借助于代换$x+A_1/3a_0=y$化成上面的形式.

** 关于代数方程可参见A. G. Kurosh, Algebraic Equations of arbitrary Degrees, MirPublishers, Moscow, 1977

虑能由求解公式表示的解，那么，工程师和数学家之间将会发生下面的谈话：

工程师：我设计一幢建筑时，遇到这个方程（拿出方程）需要尽快地知道它的解——因为一个月之内我必须完成任务。

数学家：我很高兴帮助你，不过，这种形式的方程没有求解方法。

工程师：你不能推导一个求解公式吗？

数学家：那可没有用处，很久以前就证明了这种方程没有求解公式。

听了这样的谈话，人们可以想像，工程师的数学见解将使方程求解的可能性变得更糟。幸运的是，不可能发生这样的谈话。实际上，工程师通常不需要这样那样方程的求解公式。他们所需要的是满足一定精度的正确答案——而这种答案或者用公式求得或者用别的方法求得对他们都不太感兴趣。

比如，我们设想由某个公式得出的答案是$x=3+\sqrt{13}$。很明显，这个答案不能直接用在实际中（人们不可能在机器上制造出精确长度为（$3+\sqrt{13}$）cm的零件），实际应用中，$\sqrt{13}$应该表示成十进制小数，小数的位数要由给出的实际问题的要求精度而决定。

因此，只要数学家告诉工程师怎样计算方程的根以及必需的精度，工程师就非常满意了。数学中已呈现出了大量的求方程近似解的方法，本书中将要叙述其中一些方法。

2. 逐次逼近

大多数求方程近似解的方法都是根据逐次逼近的概念，这种概念不仅可用于求解方程，而且也可以用来解决许多实际问题。

逐次逼近法或尝试法及误差法常常被炮手们采用。他们为了击中靶子，需要确定大炮射击的方位和目标，炮弹发出后，观察炮弹的爆炸点，如果没击中靶子，就适当修正大炮射击的方位和目标，然后再继续射击。经过几次这样调整逼近以后，他们就能确定出准确的方位和目标，以便击中靶子。

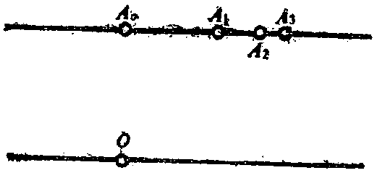


图 1

有时候，决定瞄准点也需要用逐次逼近法，比如，一架高射炮在O点射击一架飞机（图 1）。假定某一时刻，飞机在A_0点，此时如果高射炮向A_0点瞄准射击，是击不中飞机的。因为炮弹射击的同时，飞机已飞到了A_1点。如果人们知道了飞机的速度和炮弹的速度，就可比较容易找到射击瞄准点A_1，可是，如果仍然瞄准A_1点射击，还是击不中飞机

的，因为炮筒的倾斜度改变了炮弹运行的轨道，因此，炮弹在 OA_0 距离间运行的时间与在OA_1距离间运行的时间不一样，结果，炮弹仍击不中飞机。但是，瞄准A_1点射击就比瞄准A_0点射击失误小。为了使失靶的可能性更小，炮手们还应该求得炮弹在OA_1距离间运行的时间以及在这个时间内飞机所到达的地点。A_2点将是跟踪目标点的再次逼近，之后再根据炮弹由O点到A_2点所需时间来计算A_3点，即是飞机在那个时间内要到达之处，经过若干次逼近以后，我们将找到具有一定准确度的瞄准点。

逐次逼近的方法还可用来解决许多其它问题。

假定，人们要从N个采沙场A_1、A_2……，A_n运沙到M个建筑工地B_1，B_2，……，B_m，假设第j个沙场A_j每天生产a_j吨沙，第K个工地B_k每天需要b_k吨沙，再假设从A_j沙场运输一吨沙到B_k工地需要的费用为C_{jk}（由A_j到B_k之间的距离和运输单价等决定）。

为了制定运输计划，我们作表1，在表 1 中，x_{jk}表示从A_j沙场运到B_k工地沙的总数。

表 1

	B_1	B_2	B_k	B_m
A_1	x_{11}	x_{12}	x_{1k}	x_{1m}
A_2	x_{21}	x_{22}	x_{2k}	x_{2m}
A_j	x_{j1}	x_{j2}	x_{jk}	x_{jm}
A_n	x_{n1}	x_{n2}	……	x_{nm}

其中，x_{jk}满足关系：

$$x_{j1}+x_{j2}+\cdots\cdots+x_{jm}\leqslant a_j$$

（每天从A_j沙场运出的沙石不能超过a_j吨），

$$x_{1k}+x_{2k}+\cdots\cdots+x_{nk}=b_k$$

（B_k工地每天要得到b_k吨沙）

如果按表1的运输计划，其运输费用为：

$$\begin{aligned}C=&C_{11}x_{11}+C_{12}x_{12}+\cdots\cdots+C_{1n}x_{1n}+\\&+C_{21}x_{21}+C_{22}x_{22}+\cdots\cdots+C_{2n}x_{2n}+\\&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\&+C_{m1}x_{m1}+C_{m2}x_{m2}+\cdots\cdots+C_{mn}x_{mn}\end{aligned}\qquad(4)$$

任何运输计划都应该是使费用C尽可能最少，首先，我们试探性地拟定一种计划，比如，可采用下面的运输方案：

开始，把A_1沙场的沙运到离它最近的工地，如果这个沙场每天生产的沙除了供应那个工地外还有剩余，就把剩下的沙运到其它工地中离它最近的一个工地上，如还有剩，再把剩下的运到离它较近另一个工地。A_1沙场生产的沙运完以后，再同样安排运A_2沙场的沙，如此等等。直到最后，每个工地都有限定的沙场运沙。

可是，这种运输计划并不是最好的方法，因为这样安排运沙，可能剩下最后几个建筑工地要到很远的沙场去运沙。所以，这种运输计划必须加以改进。有些人采用的运输方案是：在沙场和工地之间，先考虑给需沙量大的工地运输，再考虑给需沙量小的工地运输。

改变计划使得费用减少，这种方法是数学的一个分支，叫线性规划*。

借助于这些方法，经过几次逼近后，我们就能找出一种

---

*关于线性规划可参见A·S·Solodovnikov

Introductoni to linear algebra and linear programming", prosveshcheniye, Moscow, 1966

使和式（ 4 ）的值最小或者接近最小的计划。

通常，当我们制定一种计划、一张时间表等等的时候，最初总是用一些比较粗略的近似值，随后再逐次改进，直到得出最终的结果为止。

在工厂车间里，生产加工机器零件，也可以看成是一种逐次逼近的过程。开始是一种粗略的逼近——拿一块铸件或坯件，再把坯件拿到车床上先制成近似零件形状，然后在更精密的车床上经过几次加工，也就是几次逼近以后，便生产出我们需要的机器零件。

3. 阿基里斯和乌龟

最先提到逐次逼近法的是公元500年前伊利亚的季诺。这位哲学家试图证明自然界没有运动，他用下面的论据证明不存在运动：即使让跑得最快的希腊神阿基里斯去追赶1只乌龟，他也追不上。先假设阿基里斯和乌龟之间相距1000步远距离，再假设阿基里斯1秒钟跑10步，乌龟1秒钟爬动1步，那么，在100秒钟时，阿基里斯跑完他与乌龟相距的1000步距离，但与此同时，乌龟也爬了100步远。再用10秒钟时间，阿基里斯又跑完这100步远的距离，但乌龟同时也又爬了10步远，等阿基里斯再跑完这10步时，乌龟又爬了1步。因此，乌龟永远在阿基里斯前面，阿基里斯永远不能赶上乌龟。所以，自然界没有运动。

当然，季诺的论证仅仅是一种措词巧妙的谬论，是没有理由的，运动本身是物体内在的性质。

要计算阿基里斯追赶上乌龟的时间，对任何小学生都不是困难的事，建立一个方程式就可计算：

$$10x-x=1000 \qquad (5)$$

其中，x是所求时间，由方程我们得到

$$x=\frac{1000}{9}=111\frac{1}{9}\text{（秒）。}$$

不过，季诺的论证可以看成是一种近似求解方程（5）的特殊方法。

实际上，把x项移到方程的右边，两边再除以10，我们将得到方程

$$x=100+\frac{x}{10} \qquad (6)$$

如果略去方程右边的$x/10$项（它相对于x是小量），我们得到x的近似解$x_1=100$。现在，把近似解$x_1=100$代入方程右边的x，我们将得到一个更精确的x值，即$x_2=100+10=110$，再把这个新值代入方程右边x，又得到下一个近似解$x_3=100+110/10=111$，按这种方法，我们得到一组近似解

$$x_1=100,\ x_2=110,\ x_3=111,\ x_4=111.1,\ \cdots\cdots$$

也就是说，季诺的论证得出了上述这组数。这组数能够通过关系式

$$x_{n+1}=100+x_n/10 \qquad (7)$$

对n逐次计算得出。当n增大时，这组数逼近方程（5）的准确解　$x=111\frac{1}{9}$。

因为$x/10$项较之x是小量，所以上面描述的求解方法是成功的。不然的话，我们将得到一组越来越离准确解远的数。例如，假设阿基里斯不是追赶一只爬得很慢的乌龟，而是追赶一只跑得很快的羚羊，我们假设羚羊每秒钟跑20步远，为求阿基里斯追上羚羊所需的时间，我们必须解方程

$$10x-20x=1000 \qquad (8)$$

这个方程的准确解是$x=-100$。这就是说，阿基里斯和羚羊并驾齐驱的时间是在100秒钟以前，现在羚羊已经跑在阿基里斯的前面了，它们相隔的距离随着时间增加在增大。

现在，我们试着把解方程（5）的方法用来解方程（8），

与解方程（5）一样，先把$20x$移到方程右边，然后，两边同除以10，我们得到方程

$$x=100+2x \tag{9}$$

在方程右边令$x_0=0$，得到$x_1=100$，将这个值代入方程(9)右边得到第二个近似解$x_2=300$，继续这个过程，便得到了一组数

$$x_0=0,\ x_1=100,\ x_2=300,\ x_3=700,\ \cdots\cdots$$

我们看到，这组数是不逼近于方程（8）的准确解$x=-100$的。