高等学校试用教材

组合数学教程

湖南大学　王天民　编

机械工业出版社

高等学校试用教材

组合数学教程

湖南大学　王天民　编

机械工业出版社

(京)新登字054号

本书围绕计数问题这个中心，介绍组合数学的基本原理和思想方法。内容包括：幻方的构造、排列和组合、组合恒等式及组合解释、二项式定理和多项式定理、母函数及其应用、递归关系及其解法、Fibonacci数、Catalan数和Stirling数、容斥原理和反演公式、鸽笼原理和Ramsey定理介绍、置换群及其轮换指标、Burnside引理、Pólya基本定理及带权的Pólya定理。书中还介绍了组合数学在计算机科学中的应用。每章均有习题和例题（书末附有部分习题答案或提示），以帮助读者提高组合思维能力和掌握解题技巧。

本书可作为计算机软件、计算机应用、计算机通信、数字通信等专业本科生或研究生的教材，也适合作高等师范院校数学专业本科生或专科生的教材或教学参考书，还可供有关科技人员和中学数学教师参考。

组合数学教程

湖南大学　王天民　编

*

责任编辑：韩雪清　版式设计：霍永明

封面设计：郭景云　责任校对：刘　茹

责任印制：王国光

*

机械工业出版社出版（北京阜成门外百万庄南街一号）

邮政编码：100037

（北京市书刊出版业营业许可证出字第117号）

机械工业出版社京丰印刷厂印刷

新华书店北京发行所发行·新华书店经售

*

开本 787×1092 1/16·印张14 1/4·字数 349 千字

1993年10月北京第1版·1993年10月北京第1次印刷

印数0 001—2 370·定价：7.20元

*

ISBN 7-111-03729-4/0·84(课)

前　言

组合数学是离散数学大家庭中一个十分活跃的新兴分支，它主要研究离散对象的计数、枚举构造、优化和存在性问题。

组合数学与计算机科学关系十分密切。例如用计算机解决某个问题时，通常有好几种算法可供选择，究竟哪个算法最优？为此要细致地计算各算法的运算次数，计算出在最坏情况下的运算次数、当原始数据按通常概率分布时的平均运算次数等等，还要估计所占有的存储单元的数目，这就是所谓算法的时间和空间的复杂性问题。为解决这些问题，就要用到组合数学的方法和技巧。因此，国内外不少高等学校都把组合数学作为计算机学科各专业的一门基础理论课程。

组合数学不仅在许多新兴科学技术中有重要的应用，而且在一些以前与数学没有多大关联的学科（例如社会科学、生物学）中也要用到组合思维方法和技巧，因此组合数学受到人们越来越普遍的重视。

本书是高等工业学校计算机及应用专业的教材，是由计算机及应用专业教学指导小组推荐并审定的。本教程是以作者近几年来在湖南大学计算机科学系讲授此课程时编写的讲义为基础，经过修改整理而成，其中包含了作者的点滴心得。本教程围绕计数问题这个中心，介绍组合数学的基本理论和思想方法。在编写过程中，我们注意到工科学生的数学基础和思维特点，力求使教材内容安排符合认识规律和教学规律，叙述深入浅出，思路清晰，论证严谨，便于自学。书中安排较多例题，对有些问题提供多种解法，以培养学生的组合思维能力并帮助他们掌握解题技巧。书中近300道习题和若干思考题和正文内容配合紧密，并在书末附有习题答案或提示。

本书可作为高等学校工科有关专业（特别是计算机、数字通信）本科生高年级或研究生的选修课教材，也适合于师范院校数学专业师生作教学参考书或教材。

本书在编写过程中自始至终得到了湖南大学计算机系领导和教研室老师的支持和鼓励，特别是杨润生教授的帮助，在此谨致谢意。

本书由湖南大学何子凡教授担任主审，长沙铁道学院李蔚萱教授、湘潭大学罗铸楷教授、湖北师范学院李朝星副教授、湖南师范大学何国梁老师等也认真审阅了原稿。他们提出了不少改进意见，在此表示诚挚的谢意。

由于作者水平有限，书中难免还存在缺点或错误，恳请读者批评指正。

作　者

1990年 6 月于长沙岳麓山

目　录

第一章　导　　论

§1-1　组合数学的历史发展和中心问题

组合数学又叫组合分析或组合学，是一门既古老而又年轻的数学。

据传，早在4000多年前，在《河图》、《洛书》中我国人民就已对一些有趣的组合问题给出了正确的解答。公元前1100多年，在我国已隐约产生了排列的概念。公元1261年我国宋朝数学家杨辉著了一本名为《详解九章算法》的书，书中介绍了由我国贾宪发现的二项式系数的三角形表示，后人称为杨辉三角（在国外一般叫Pascal三角，但Pascal是在1654年才发现的，比我国贾宪至少晚300年）。

1666年，20岁的Leibniz，G.W著有《组合学论文》一书，这是组合数学的第一部专著，并首次使用"组合学"(Combinatorics)一词。1718年，A.de Moivre最先发现容斥原理和引进母函数方法。稍后几年L.Euler用母函数法解决了组合分析和数论中的若干问题。母函数这个名称是由P.S.Laplace取的。P.G.L.Dirichlet提出了抽屉原理（即鸽笼原理）。1937年G.Pólya创立了计数的群论方法。

但是，组合数学的飞跃进展是近几十年的事，自本世纪60年代以来，数字通信理论、规划论、试验设计等新兴学科发展迅速，特别是计算机科学的巨大发展，大大推动了组合数学的发展，使组合数学成为富有生命力的新兴的数学分支。

组合数学所研究的中心问题是与"按一定的规则来安排一些对象"有关的数学问题。当符合所要求的安排，并不是很显然不存在或存在时，那么首要的问题就是去证明它的不存在或是去证明它的存在。当符合所要求的安排显然是存在或是我们已经证明它是存在时，那么这时的问题就是求出这样的安排（全部或其中不等价的）的个数，以及怎样能够把这样的安排求出来。如果还给出了最优化的标准，则还需寻求出最优的安排，如此等等。上述几方面问题依次被称为存在性问题、计数问题、构造问题、最优化问题。

在这本教程中，我们将围绕计数问题这个中心，介绍组合数学的基本理论和方法。

一般说来，解决组合问题需要特殊的方法，即使是在使用组合数学中的基本原理和方法去解决问题时，仍需要巧妙地应用它们。因此在解决组合问题时，经验和人的智能极为重要，所以学习组合数学中典型问题的解题经验是非常重要的。

下面两节给出这方面的例子。

§1-2　棋盘的完备覆盖

一个$m\times n$的棋盘，它有m行和n列，总共分成mn个方格。

假定有一批外形完全一样的骨牌，每块骨牌恰好覆盖棋盘上两个邻接的方格。若用一些骨牌覆盖棋盘，使得棋盘上的所有方格都被骨牌覆盖，并且没有两块骨牌交叠，就称这种覆

盖是棋盘的一个完备覆盖。

不难证明，一个$m\times n$棋盘有完备覆盖的充要条件是m和n中至少有一个是偶数。因此，一个3×5的棋盘不存在完备覆盖，而一个8×8的棋盘却有许多（近1300万）个不同的完备覆盖。但是，一个剪去了对角上两个方格的8×8棋盘是否还存在完备覆盖呢？这一问题的答案不是显然的。现我们把棋盘的方格用黑、白两色交替着色（如图1-1所示，有阴影的方格表示着黑色，而其它的方格表示着白色)。由于任一骨牌必然覆盖一黑一白两个方格，而剪角的棋盘中，有32个黑色方格和30个白色方格，因此，这个剪去了两个对角的棋盘不存在完备覆盖。这个证明十分简单，但却是用组合论证的一个出色例子。

从上述的初步研究可以看出，对于存在性问题，在有的情况下结论是明显的，如8×8棋盘存在完备覆盖，而3×5棋盘不存在完备覆盖。在另一些情况下，结论并不是显而易见的，例如剪角的8×8棋盘是否存在完备覆盖就是一例。在有些情况下，存在性的解决甚至是非常困难的。

我们已经知道，一个$2\times n$的棋盘一定有完备覆盖，而且也容易用一些骨牌构造几个不同的完备覆盖。但是，$2\times n$棋盘的完备覆盖的个数总共有多少，这就是一个计数问题了。

所谓两个完备覆盖是不同的，如果至少有两个相邻接的方格，这两个覆盖盖住这两个方格的方式是不同的。

让我们用组合推理的分类分析方法来解这个问题，设f_n表示$2\times n$棋盘的完备覆盖的总个数，显然有

$$f_1=1,\quad f_2=2$$

现讨论$n\geqslant 3$的情形，设棋盘横置如图1-2所示。

让我们考察左上角的方格，在棋盘$2\times n$的所有的完备覆盖中，可划分为不相容的两类：

第一类，在每一个完备覆盖中，用一块骨牌将左上角的方格和左下角的方格盖住。如图1-2a所示。此时剩下$2\times(n-1)$个方格，构成一个$2\times(n-1)$棋盘，因此第一类共有f_{n-1}个完备覆盖；

第二类，在每一个完备覆盖中，用一块骨牌将左上角的方格与其右邻的方格盖住。从而左下角的方格与其右邻的方格被另一块骨牌盖住，如图1-2b所示。此时剩下$2\times(n-2)$个方格，构成一个$2\times(n-2)$的棋盘，对应的完备覆盖数为f_{n-2}，因此第二类共有f_{n-2}个完备覆盖。

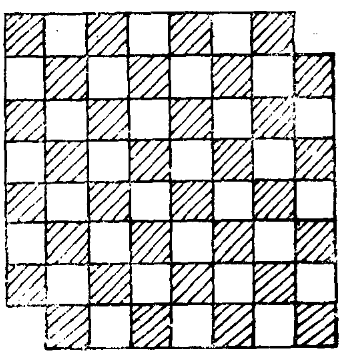
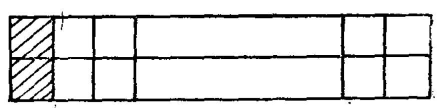
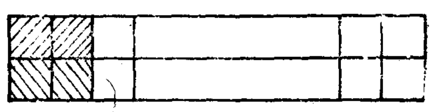


图 1-1



a)



b)

图 1-2

由加法法则知

$$\begin{cases} f_n = f_{n-1} + f_{n-2} \qquad (n \geqslant 3) \\ f_1 = 1,\ f_2 = 2 \end{cases} \tag{1-1}$$

这样我们找到了一个$2\times n$棋盘的完备覆盖数f_n应满足的关系式。不难算出

$$f_1,\ f_2,\ f_3,\ f_4,\ f_5,\ f_6\cdots$$

$$1,\ 2,\ 3,\ 5,\ 8,\ 13\cdots$$

此即Fibonacci数列。因此求$2\times n$棋盘的完备覆盖数的问题就转化为求Fibonacci数列的通项问题。仿照等比数列的情况，令

$$f_n = c_1 q_1^n + c_2 q_2^n \qquad (n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots) \tag{1-2}$$

式中，c_1、c_2为待定常数；q_1、q_2为待定的公比数。将式(1-2)代入式(1-1)，得

$$c_1 q_1^{n-2}(q_1^2 - q_1 - 1) + c_2 q_2^{n-2}(q_2^2 - q_2 - 1) = 0 \tag{1-3}$$

显然，方程

$$q^2 - q - 1 = 0$$

的两个根都能使式(1-3)成立，因此，可令

$$q_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2},\quad q_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$$

现在，利用初始值$f_1=1$和$f_2=2$来确定待定常数c_1和c_2，即在式(1-2)中分别令$n=1$，$n=2$得

$$f_1 = c_1 \times \frac{1+\sqrt{5}}{2} + c_2 \times \frac{1-\sqrt{5}}{2} = 1$$

$$f_2 = c_1 \times \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^2 + c_2 \times \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^2 = 2$$

解得

$$c_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2\sqrt{5}},\quad c_2 = \frac{-(1-\sqrt{5})}{2\sqrt{5}}$$

将q_1、q_2、c_1、c_2代入式(1-2)，整理即得

$$f_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1}\right] \qquad (n \geqslant 1)$$

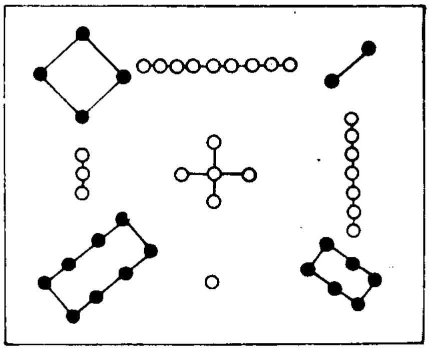
这个例子的解题方法是组合数学的一种重要方法，其要点是首先用组合推理对问题进行分析，建立递归关系，然后得到所需的计数公式。这将在第五章详细讨论。

§1-3　幻　　方

相传在大禹（约公元前2100年）治水时，洛水（在陕西境内）里浮出一只大乌龟，龟背上有一个图案，后人把它叫做洛书。这图案由45个黑白小圆圈组成，如图1-3a所示。

洛书上的每个圆圈都是代表一个1，因此若我们把洛书上的图形用阿拉伯数字写出来就得到图1-3b。

初看起来，这个图案并没有什么值得特别注意的，但细究一下，则发现它具有奇妙的性



a)

4	9	2
3	5	7
8	1	6

b)

图 1-3

质：它是由 1 到 9 构成的具有三行三列的方阵，且每行，每列及每条对角线上三数之和都相等。

对这样的图案进行深入研究的第一个人是我国宋朝大数学家杨辉，他找到了构造这种图案的巧妙方法，记载在1275年他著的名为《续古摘奇算经》的书上，他将这种图案命名为“纵横图”。后来国外称它为“幻方”。洛书是世界上最古老的一个三阶幻方。

古印度对幻方也很有研究，在印度加太苏兰神庙的石碑上，发现了一个11世纪的四阶幻方，它的构造十分巧妙，如图1-4所示。

15世纪时，在希腊、意大利相续出现了幻方的记载，当时外国人并不把它作为一个数学对象来研究，只认为它是一个神秘的东西，建筑师和工艺师将它刻在墙壁上和器皿上，为的是防邪避凶。例如1514年德国著名画家阿伯莱德·杜埃在他的有名的木刻雕版画《忧郁》上便刻有一个四阶幻方，如图1-5所示。最具匠心的是，他把创造这个幻方的年份1514也显示在幻方中。

7	12	1	14
2	13	8	11
16	3	10	5
9	6	15	4

图 1-4

16	3	2	13
5	10	11	8
9	6	7	12
4	15	14	1

图 1-5

后来人们把对这类问题的研究推广到一般情形，即将1，2，…，n^2，这n^2个自然数填入一个$n\times n$正方形的方格中，使每行、每列和对角线上的n个数之和都相等，满足这个要求的方阵叫做“n阶幻方”或“n阶魔术方阵”。

由于n阶幻方中每行、每列和对角线上n个数之和都相等，我们把这个和数叫做n阶幻方的幻数，记为S_n，于是

$$1+2+\cdots+n^2=\frac{(1+n^2)}{2}n^2=nS_n$$

故

$$S_n=\frac{n(1+n^2)}{2}$$

关于幻方研究的组合学问题是，确定n取哪些值时存在n阶幻方？如果n阶幻方存在，要找出构造它的一般方法，并求出有多少个不同的n阶幻方？

显然，2阶幻方不可能存在，因为任何一个数不可能与两个不相同的数构成相等的和数。

不过 n 取其它数值时，n阶幻方是可以构造出来的，有许多构造幻方的特殊方法。

首先，我们用解方程的办法来构造 3 阶幻方。设 3 阶幻方如图1-6所示。

幻数为

$$S_3=\frac{1}{2}\times3\times(1+3^2)=15$$

现将含有a_5的所有行、列和对角线上的数加起来，有

$$\begin{aligned}4S_3&=(a_4+a_5+a_6)+(a_2+a_5+a_8)+(a_1+a_5+a_9)+(a_3+a_5+a_7)\\&=60\end{aligned}$$

整理得

$$4S_3=3a_5+\sum_{j=1}^{9}a_j=3a_5+3S_3$$

$$\therefore\quad a_5=\frac{1}{3}S_3=5$$

a_1	a_2	a_3
a_4	a_5	a_6
a_7	a_8	a_9

图 1-6

便得出如下结论：任何 3 阶幻方的中心位置必须是5。由此推出，a_2和a_8有相同的奇偶性，a_4和a_6、a_1和a_9、a_3和a_7亦然。这是由于

$$a_2+a_8=a_4+a_6=a_1+a_9=a_3+a_7=10$$

下面进一步证明a_2、a_4、a_6、a_8都为奇数。为此，先将第一行和第一列的各数加起来，有

$$\begin{aligned}&(a_1+a_2+a_3)+(a_1+a_4+a_7)\\&=2a_1+(a_2+a_4)+(a_3+a_7)\\&=2a_1+(a_2+a_4)+10\\&=30\end{aligned}$$

即

$$a_2+a_4=20-2a_1$$

a_2+a_4为偶数，故a_2和a_4有相同奇偶性，从而a_2、a_4、a_6、a_8有相同的奇偶性。剩下来的a_1、a_3、a_7、a_9也有相同的奇偶性。注意a_1+a_3为偶数，又$a_1+a_3+a_2=15$，故a_2必为奇数，因此a_2、a_4、a_6、a_8都为奇数。于是四角上的数a_1、a_3、a_7、a_9必全为偶数。

利用上面得到的结论，我们即可以构造出 3 阶幻方。

若将 8 放在左上角，即令$a_1=8$，则必有$a_9=2$。此时若$a_3=6$(或 4)，则$a_7=4$(或 6)，由此立即可得 3 阶幻方如图1-7和图1-8所示。也就是说，8放在左上角可得两个 3 阶幻方。因为 8 可放在四个角中的任一个角上，故共有 8 个 3 阶幻方。但是可以从其中任何一个幻方经过旋转和翻转而得到其它的 7 个，我们把这 8 个 3 阶幻方称为是同构的，因此，从同构的意义讲，3阶幻方只有一个。

8	1	6
3	5	7
4	9	2

图 1-7

8	3	4
1	5	9
6	7	2

图 1-8

当$n\geqslant3$时，n阶幻方都是存在的。已经证明：4阶幻方共有880种，5阶幻方共有275 305 224种。但是要把这些不同构的幻方一一构造出来则非容易事。

关于构造奇数阶幻方的方法，最早由我国宋朝杨辉于1275年创造，他提出了构造 3 阶幻

方的方法，推广他的方法可用来构造任何奇数阶幻方㊀。在国外数学书刊中，通常介绍的是于1687年由S.de la Loubère从泰国传到法国的一种构造方法[9]。但这两种方法对任何奇数阶都只能分别构造出一种幻方。

我们对这两种方法综合分析后找到了一种更有效的构造幻方的新方法，它能对大于3的每个奇数阶n构造出2个以上的不同构的同阶幻方，特别是当n为素数时，它能直接构造出$(n-1)/2$个不同构的n阶幻方。

下面介绍我们这种新方法。

为行文方便，我们把位于第j行、第k列的那个方格简称为方格(j, k)。

令$n=2k+1$，将1，2，3，…，n^2这些自然数依次按下面规则填入$n\times n$个方格中。

1）将数码1填入方格$(j, k+1)$中，即填入幻方中心所在列、从顶行向下数第j个方格中，此处$j\in\{1, 2, 3, \cdots, k\}$。

2）若当前数已填入方格(p, q)，$p>1$，$q<n$，则后继数填入方格$(p-1, q+1)$中，即后继数填在当前数的右上方。

3）若当前数在方格$(1, q)$中，$q<n$，则后继数填入方格$(n, q+1)$中。

4）若当前数在方格(p, n)中，$p>1$，则后继数填入方格$(p-1, 1)$中。

5）当按上述2）～4）条规则填数时，若方格中已填入数或者当前数在方格$(1, n)$中，则后继数填在当前数的正下方的第$2j-1$个方格中（亦即当前数的正上方的第$n-2j+1$个方格中）。

在运用由上述5条规则组成的新方法时，数码1所在的行号j扮演着重要角色，它与n是素数还是合数有密切关系。

当n是素数时，j可分别取1，2，…，k，用本方法便直接构造出k个不同构的n阶幻方。

当n是合数时，j分别取1或k，用本方法便直接构造出2个不同构的n阶幻方；若j取其它值$(2\leqslant j\leqslant k-1)$，会出现多种可能情况：或者是直接构造出幻方，或者是要对所得数表中的个别数进行交换后才能造出幻方，或者甚至要对规则5）进行适当修改。

不难验证，当$j=1$时，用本方法构造出的幻方就是用Loubère方法构造出的那个幻方；当$j=k$时，用本方法构造出的幻方按水平中线翻转就是用推广杨辉方法所构造出的那个幻方。

以7阶为例，用本方法所构造出的3个不同构的7阶幻方，它们分别如图1-9～图1-11所示。

30	39	48	1	10	19	28
38	47	7	9	18	27	29
46	6	8	17	26	35	37
5	14	16	25	34	36	45
13	15	24	33	42	44	4
21	23	32	41	43	3	12
22	31	40	49	2	11	20

图 1-9

13	47	32	17	2	36	28
46	31	16	1	42	27	12
30	15	7	41	26	11	45
21	6	40	25	10	44	29
5	39	24	9	43	35	20
38	23	8	49	34	19	4
22	14	48	33	18	3	37

图 1-10

46	15	40	9	34	3	28
21	39	8	33	2	27	45
38	14	32	1	26	44	20
13	31	7	25	43	19	37
30	6	24	49	18	36	12
5	23	48	17	42	11	29
22	47	16	41	10	35	4

图 1-11

㊀ 请参阅"陈景润著．组合数学．郑州：河南教育出版社，1985"。

至于偶数阶（大于2）的幻方的构造方法以及奇数阶幻方的其它构造方法可以在 W. W. Rouse Ball著的《Mathematical Recreations and Essays》一书的第 7 章中找到（纽约：Macmillan，1947，193～221）。

习 题 一

1．试构造 5 个11阶幻方。

2．是否存在一个 4 阶幻方，它具有图1-12所示形式？

2	3		
4			

图 1-12

3．证明在 n 阶幻方中每个数码 a 换为 n^2+1-a 所得到的阵列仍是一个 n 阶幻方。

4．试证明 $m\times n$ 棋盘有完备覆盖的充要条件是 m 和 n 中至少有一个是偶数。

5．试求 3×4 棋盘的完备覆盖的个数。

6．设一所监狱有64间囚室，其排列类似于 8×8 棋盘，在所有相邻的囚室之间都有门相通，告示关押在一个角落囚室里的囚犯，只要他能够不重复地通过其它每间囚室后到达对角的囚室，他将被释放。问囚犯能够获得自由吗？

7．考虑 6×6 棋盘，证明对它的任一完备覆盖，总存在一种水平的（或竖直的）切开棋盘的方法，使切割线不穿过任一骨牌。

8．对一个 4×7 棋盘的每一个方格染上黑色或白色。试证明：对任一种涂染方式，棋盘必定含有一个矩形，其四个角上的不同方格有相同的颜色。

9．试给出 4×6 棋盘的一种黑白涂染方式，使其含有的每一个矩形有如下性质：位于四个角上的方格都不能是同一种颜色。

第二章　排列和组合

排列和组合问题是组合学中最常见、最基本的论题。在这一章，首先介绍两个基本计数法则，给出各种常见的排列和组合的定义及其推广，讨论组合数的一些初等性质，介绍若干组合恒等式及其组合意义。

在分析问题的思路和解决问题的方法方面，力求多样化，以利于培养“组合思维”和熟练“组合技巧”。

§2-1　加法法则和乘法法则

加法法则和乘法法则是求解计数问题的两条基本法则，是人们经过长期的大量的实践所总结出来的，利用它们可证明一系列组合公式。

一、加法法则

加法法则：选取某物F有m种方法，选取另一物G有另外n种方法，则选取F或G有$m+n$种方法。

例1　某学生想选修一门数学课或一门电子类课，但不能同时选修两门。若有四门数学课和三门电子类课可供选修，那么该生“选修一门数学课或一门电子课”有$4+3=7$种方式来选修。

加法法则可用集合的语言表述。

设A、B为两个有限集合，且$A\cap B=\varnothing$

则
$$|A\cup B|=|A|+|B|$$

这只要用A表示选取某物F的不同方法的集合，B表示选取G的不同方法的集合，由于这些方法彼此不同，故满足$A\cap B=\varnothing$这一条件。

加法法则可以推广到有限多个集合的情形。设子集A_1，A_2，…，A_k是有限集合S的一个划分，则S的元素个数等于这k个不相交子集的元素个数之和，即

$$|S|=\left|\bigcup_{i=1}^{k}A_i\right|=\sum_{i=1}^{k}|A_i|$$

简言之，加法法则指出，整体是它的各部分之和。在运用加法法则时，就是把所考察的集合划分为若干个两两不相交的子集，使得每个子集的元素个数容易算出。如何划分一个集合要视具体问题而定。

在此我们再三强调各子集必须两两不相交。如果允许各子集间有公共元素，如何通过S的各子集A_i来计算$|S|$，还需要对加法法则作进一步的推广，这将在第七章中讨论。

例2　在所有6位二进制数中，至少有连续4位是数码1的有多少个？

解：约定自右到左依次叫做第1，2，…，6位，用S表示符合题意的6位二进制数的全体，用$A_i(i=4,5,6)$表示恰有连续i个1的6位二进制数的全体，显然$A_i\cap A_j=\varnothing$，$i\neq j$，故

$$|S|=|A_4|+|A_5|+|A_6|$$

易知$|A_6|=1$，$|A_5|=2$，至于A_4又可划分为3个不相交的子集A_{41}、A_{42}和A_{43}。A_{41}指第1到第4位都是1，第5位必为0，第6位或为0，或为1，故$|A_{41}|=2$；A_{42}指第2到第5位都是1，第1位和第6位必取0，故$|A_{42}|=1$；又$|A_{43}|=|A_{41}|=2$，故得$|A_4|=2+1+2=5$

从而
$$|S|=5+2+1=8$$

但是加法法则不能应用于下面的这个例子。

例3 小于10的偶数共有4个(即2，4，6，8)；小于10的素数共有4个(即2，3，5，7)；但是，小于10的正整数，它或者是偶数或者是素数的个数（即2，3，4，5，6，7，8)只有7个，而不是8个，其原因是此处的偶数集和素数集之交并非空集。

二、乘法法则

乘法法则：选取某物F有m种方法，若用这m种方法中的任一种选出F后，都有n种方法选出另一物G，则依次选出F和G有mn种方法。

若用A表示选取F的不同方法的集合，B表示选取G的不同方法的集合，任取$a_i\in A$，$b_j\in B$，则可用序偶$\langle a_i,\ b_j\rangle$表示"依次选出F和G"的一种方法，即先用方法a_i选出F，接着用方法b_j选出G。因此，"依次选出F和G"的所有方法的集合与集合$A\times B$之间存在一一对应。

故乘法法则也可用集合语言表述如下。

设A、B为两个非空有限集合，则

$$|A\times B|=|A||B|$$

同样，乘法法则可推广到有限多个集合的情形，设A_1，A_2，…，A_k都为有限集合，则

$$\left|\prod_{i=1}^{k}A_i\right|=\prod_{i=1}^{k}|A_i|$$

例4 用字母a、b、c、d、e和f来组成长度为3的字母串，按下列不同的限制条件，分别求出符合要求的字母串的个数：

（1）允许串中出现相同的字母。

（2）不许串中出现相同的字母。

（3）不许串中出现相同的字母，但串中含有字母a。

（4）允许串中出现相同的字母，且串中含有字母a。

解：（1）对串的每一个位置，可取6个字母中的任何一个，即有6种选法，而每个串有3个位置，由乘法法则知，此类字母串共有$6\times6\times6=216$个。

（2）由于字母不许在串中重复出现，对串中的第1位置有6种选法；第2位置只能从剩下的5个字母中选取，即有5种选法；同理，第3位置只有4种选法。由乘法法则知，此类字母串共有$6\times5\times4=120$个。

（3）字母a可在串的3个位置中任取一个，有3种选法；对于a的每一种选取，由于不允许字母重复出现，对余下的5个字母放在余下的2个位置有$5\times4=20$种选法，由乘法法则知，此类字母串共有$3\times20=60$个。

（4）根据字母a在串中出现的不同情况，将此类字母串分解为如下3种不相交的子类：

第1子类是第1位置上有字母a。此时第2和第3位置各有6种选法，因此第1子类有6×6个字母串。

第 2 子类是第 1 位置上没有a，第 2 位置上有字母a。此时第 1 位置只有 5 种选法，第 3 位置有 6 种选法，因此第 2 子类有5×6个字母串。

第 3 子类是只有第 3 位置上有字母a。此时第 1 和第 2 位置上各有 5 种选法，因此第 3 子类有5×5个字母串。

由加法法则知，符合要求的字母串的个数共有

$$6\times6+5\times6+5\times5=91$$

例5 在3000与8000之间各位数字彼此不同的奇数有多少个？

解：个位数在$A=\{1, 3, 5, 7, 9\}$中选取，十位数和百位数在$B=\{0, 1, \cdots, 9\}$中选取，千位数在$C=\{3, 4, 5, 6, 7\}$中选取，故在3000与8000之间的所有奇数的个数为

$$\begin{aligned}|A||B||B||C|&=5\times10^2\times5\\&=2500\end{aligned}$$

其中有许多奇数的某几位数字相同，例如3533，5555等等。

为了求出各位数字都不一样的奇数，我们将所求的奇数按千位数的奇偶性分为不相交的两类：

1）千位数为偶数 4 和6。此时千位数有 2 种选法；个位数有 5 种选法；当千位数和个位数选定后，由于$A\subset B$，且$C\subset B$，为使十位数不同于个位数和千位数，故在B中只有$|B|-2=8$个数可作为十位数，即十位数只有 8 种选法；同理，百位数只有 7 种选法，由乘法法则知，此类奇数共有$2\times5\times8\times7=560$个。

2）千位数为奇数3、5和7，此时千位数有 3 种选法；当千位数选定后，个位数有 4 种选法；当千位数和个位数选定后，十位数有 8 种选法；当千位、十位和个位数选定后，百位数只有 7 种选法。由乘法法则知，此类奇数共有$3\times4\times8\times7=672$个。

由加法法则知，所求奇数为$560+672=1232$个。

求解大多数计数问题的最困难之处是找出所求问题中的一种结构，使得允许把该问题分解为一些子问题或步骤，如我们在上面诸例中所做的那样。下面再举一例。

例6 由 5 个不可分辨的苹果和 8 个不可分辨的桔子能组成多少个非空的集合。

解：首先指出，一个集合不同于另一个集合是指它们含有的苹果数目或桔子数目彼此不全相同。因此我们能用整数对(a, b)来刻划这样的集合，其中a表示所含苹果的数目，b表示所含桔子的数目。

由于a有 6 种可能的值：0、1、2、3、4、5，b有 9 种可能的值，因此整数对(a, b)有$6\times9=54$种，因$(0, 0)$表示一个空集，故只能组成53个非空集合。

思 考 题

1．试用例4(3)中的方法去计算例4(4)。字母a可在 3 个位置中任取一个，有 3 种选法；对于a的每一种选取，由于允许字母重复，对余下的 2 个位置，便有$6\times6=36$种选法。由乘法法则知，此类字母串共有$3\times36=108$个，请问这种算法是否正确，问题出在何处？

2．对例 6 设计另一种算法如下：先按照集合中所含有的果实（苹果或桔子）的数目将所讨论的问题分解为若干个子问题，然后分别求解每个子问题，最后将所得结果相加．请问这种算法是否行得通？并将它和例 6 中给出的算法进行比较，找出它们各自的特点．

§2-2 集合的排列与组合

一、排列

在初等代数中，读者已知下列定义：

定义1 从含有n个元素的集合A中，有序地选取r个元素，称为集合A的一个r-排列。集合A的n-排列称为集合A的一个全排列。

设集合$A=\{a_1, a_2, \cdots, a_n\}$，于是集合$A$的一个$r$-排列可看作由$A$中的$r$个不同元素所组成的$r$元组$(a_{i_1}, a_{i_2}, \cdots, a_{i_r})$，或说是集合$A$的一个$r$-有序子集。

今后约定，用n-集表示含有n个元素的集合。

n-集的所有r-排列的个数称为n-集的r-排列数，记为$P(n, r)$或$(n)_r$。于是$(n)_n$表示n-集的全排列数。

定理1 当$1\leqslant r\leqslant n$，有$P(n, r)=(n)_r=n(n-1)\cdots(n-r+1)$

证明：设想有r个编号为1，2，3，…，r的空盒，现考虑有多少种方法能把n个可分辨的球放到这r个空盒中去，要求每盒只放一个且必放一个。显然，符合这一要求的每一方法对应一个r-排列。首先因为n个不同的球的任何一个均可放入空盒1内，所以向空盒1放球有n种方法。当盒1放入球后，可在剩下的$n-1$个球中任取一个放入盒2内。因此，向盒2放球有$n-1$种方法。依此类推，当前面r-1个盒放入球后，就只剩下$n-(r-1)$个球了，故对空盒r放球只有$n-r+1$种方法。由乘法法则知，总的方法数应该是

$$(n)_r=n(n-1)\cdots(n-r+1)$$

例1 6本书排成一列，其中有3本书不能被隔开，问有多少种排法？

解：由于有3本书不被隔开，可以把这3本书看成一个整体，共按4本书计算，有$4!$种排法。但这3本书之间，又有$3!$种排法，由乘法法则知，共有

$$4!\times 3!=144$$

种排法。

例2 由字母a、b、c、d、e组成的4个字母的"单词"，每个字母在单词中至多使用一次，这样的单词个数为$P(5, 4)=5\times 4\times 3\times 2=120$。

例3 从$\{1, 2, \cdots, 9\}$中选取不同的数字且使5和6不相邻的7位数有多少？

解：方法一 按题意是计算$\{1, 2, \cdots, 9\}$的某类7-排列。现把这类7-排列分成4类：

（1）数字5和6都不出现。

（2）数字5出现，但数字6不出现。

（3）数字6出现，但数字5不出现。

（4）数字5和6都出现，但不相邻。

显然，类(1)的排列是$\{1, 2, 3, 4, 7, 8, 9\}$的7-排列，共有$P(7, 7)=7!=5040$个。

类(2)的排列个数可如下计算：由于数5可出现在7位中的任一位，剩下的6位数字是$\{1, 2, 3, 4, 7, 8, 9\}$的6-排列，故类(2)共有$7P(7, 6)=7\times 7!=35280$个。

类(3)同样有35280个7-排列。

为了计算类(4)的排列个数，我们按照数5出现的不同情况分别计算。

若5出现在第1位，此时第2位可有7种选择，然后数字6可有5种选择，于是剩下的

4 位是余下的 6 个数字的4-排列，所以在这种情况下，有$7\times5\times P(6,4)=12600$个排列。

若 5 出现在第 7 位，由上面的讨论知，在这种情况下有12600个排列。

若 5 出现在第 2 位到第 6 位中的任何一位，因而有 5 种选择，与 5 相邻的左边那一位数字可有 7 种选择，右边那一位数字只有 6 种选择，在其余 4 位中数 6 可以任选其中一位，最后剩下的 3 位是余下的 5 个数字的3-排列，因此在这种情况下共有$5\times7\times6\times4\times P(5,3)=50400$个排列。

于是类(4)共有$2\times12600+50400=75600$个排列。

利用加法法则便得问题的答案是

$$5040+2\times35280+75600=151200$$

请想想，计算类(4)有更简便的方法没有？

方法二 不去直接计算符合题意的排列个数，而是从$\{1, 2, \cdots, 9\}$的所有7-排列中去掉5 和 6 相邻的排列。

$\{1, 2, \cdots, 8, 9\}$的7-排列共有$P(9,7)$个，其中 5 和 6 相邻的7-排列有$2\times6P(7,5)$个，由加法法则知，5和 6 不相邻的7-排列的个数为

$$P(9,7)-2\times6P(7,5)=151200$$

二、圆排列

前面所讲的排列，可以想象是把 r 个物品排成一条直线，因此确切地说，这种排列叫线排列，如果把一些物品排成一个圆圈，这种方式的排列就叫圆排列。

定义2 在一圆周上有 r 个位置，从任一位置起按逆时针方向将这 r 个位置依次编号为1, 2, …, r。从集$A=\{a_1, a_2, \cdots, a_n\}$中选取 r 个元素$a_{i_1}, a_{i_2}, \cdots, a_{i_r}$依次排在圆周 r 个位置上，这样得到的排列叫做集合 A 的一个r-循环排列或r-圆排列，记为$\overrightarrow{a_{i_1}a_{i_2}\cdots a_{i_r}}$。

如果两个圆排列由相同的元素所组成，且其中任何两元素的相对位置保持不变，则认为这两个圆排列是相同的。

因此，下列 r 个r-圆排列是彼此相同的，即

$$\overrightarrow{a_{i_1}a_{i_2}\cdots a_{i_r}}=\overrightarrow{a_{i_2}a_{i_3}\cdots a_{i_r}a_{i_1}}=\cdots=\overrightarrow{a_{i_r}a_{i_1}\cdots a_{i_{r-1}}}$$

换言之，任一个r-圆排列经过旋转便得到另一个r-圆排列，但它们是相同的。

若用$\Phi(n,r)$表示n-集的r-圆排列的个数，现求$\Phi(n,r)$与$P(n,r)$之间的关系。

注意到，①每一个r-圆排列恰有 r 种不同的方式展成 r 个不同的线排列；②不同的r-圆排列展成的线排列彼此必不同；③全部圆排列展成的线排列恰好就是全部n-集的r-排列。因此线排列数是圆排列数的 r 倍，即得

$$\Phi(n,r)=\frac{P(n,r)}{r}=\frac{(n)_r}{r}$$

特别，n-集的n-圆排列数是

$$\Phi(n,n)=\frac{P(n,n)}{n}=\frac{n!}{n}=(n-1)!$$

例4 在一旋转圆筒上画 8 种不同条纹的方式数是$\Phi(8,8)=7!$。

例5 由20个不同颜色的珠子可以做成多少种项链？

解：项链是由20个珠子排成一圆周而成，因此有$\Phi(20,20)=19!$种圆排列，这种计数只考虑了项链的旋转，没有考虑项链的翻转。但是一个项链经过翻转还是同一项链，因此一