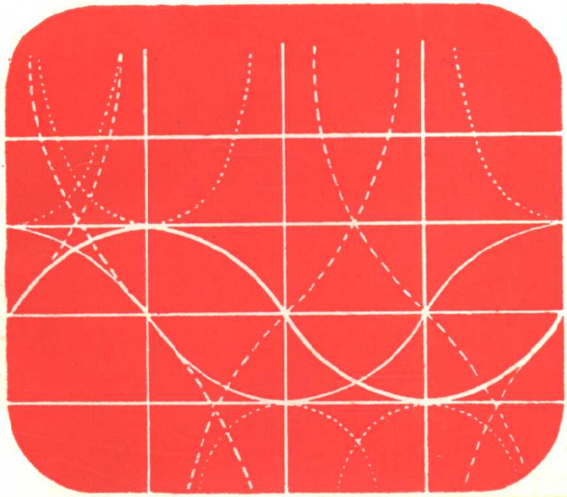

张盛开

矩阵对策初步

上海教育出版社

矩阵对策初步

张 盛 开

上海教育出版社

矩阵对策初步

张盛开

上海教育出版社出版
（上海永福路 123 号）

新华书店上海发行所发行　上海崇明印刷厂印刷

开本 787×1092 1/32　印张 1.75　字数 37,000
1980 年 8 月第 1 版　1983 年 4 月第 2 次印刷
印数55,001—71,200本

统一书号：7150·2298　　定价：0.14 元

目　　录

引　言

早在 1912 年，E. Zermelo 用集合论的方法研究过下棋，他著有《关于集合论在象棋对策中的应用》。之后，法国数学家 Borel 在 1921 年，也研究过下棋时的一些个别现象，并且引入了"最优策略"的概念. 本世纪四十年代以来，由于生产与战争的需要，运筹学的各学科纷纷出现. 特别是战争中兵力的调动、兵力部署、监视对方、侦察对方兵器等活动，迫切要求战争的指挥者拿出最好方案，用已有的条件去取得较大的胜利，于是对策论的数学模型很快形成了. 当时，各参战国组织了大批科学家参加这项研究工作.

1944 年，J. von Neumann 和 O. Morgenstern 把这一工作提高到一个新水平. 他们合著了《对策论与经济行为》(Theory of Games and Economic Behavier). 从此，对策论的研究才系统化与公理化.

矩阵对策，是整个对策论的研究基础. 不管是理论研究，还是生产实践，都不能越过矩阵对策这一个"第一道大门". 近代对策论的研究，其结果再深入，也无法摆脱矩阵对策这样一个母体. 矩阵对策又以研究二人对策为主题，策略的选取主要是研究有限情况.

我国劳动人民很早就认识了对策的问题，虽然没有完整的数学体系，没得出一套完整的数学方法，然而这种模型早就出现了. 所谓的"齐王赛马"就是一个非常典型的例子；再如，很早就出现了"棋谱"，也都是研究对策的萌芽，只不过没有系

统化和数学化罢了.

近几年来，对策论发展很快. 例如，随机微分对策，就被应用到航天技术上. 当然，对策论的某些理论上的研究成果，目前在生产与技术方面还用不上(在矩阵对策里，这种现象较少；在无穷对策中就很多，例如列紧对策，生产上就不易找到应用的模型). 尽管如此，对策论的研究并未因此而受到影响，相反，由于理论上这部分内容较完整，因而发展的速度更快，甚至研究出了不少新的意想不到的成果.

一、问题的提出

日常生活中，我们可以看到一些相互之间的竞争、比赛性质的现象，如下棋、打扑克和球类比赛等等. 竞争的双方都各有长处，各自都有一些不足，又各有特点. 在竞赛的过程中，双方都在想方设法发挥自己的长处，尽最大可能争取竞赛后的较好的结果.

除了上述体育比赛外，军事上，战争也可以看成是竞争，是一种你死我活的斗争. 此外，还有些现象也可以看成是一种竞争. 如在运输方面，由于运输工具的不同，能够服务的项目也不同，从而创造的价值也就不同. 作为生产指挥者，在安排时，必然是希望充分发挥现有运输能力，最大限度地减少消耗，去争取创造最大的价值.

在这里，运输的指挥者(或运输部门)看成是竞赛的一方，而被服务的单位可看成是竞赛的另一方. 对被服务单位来说，他们希望付出较少的代价，得到较满意的服务.

再如，在工业生产方面，工厂中拥有一定数量的设备，能

加工不同类型的产品．不同设备单位时间内创造的价值不一样，消耗也不一样．从企业管理的角度来看，就是如何充分发挥其设备能力，减少消耗，去争取创造最多的价值．

在这里，工厂指挥者可看成是一方，自然现象的消耗、成本损失等看成是另一方．这样，两者之间也可以看成是一种竞争现象．

诸如此类的问题还很多，在农业方面，如合理施肥、农药除虫等方面，都有类似的问题．

形形色色的竞争现象中，可以抽象出哪几个本质的东西呢？

1．首先，竞争总得有对立面．例如象棋比赛中，对奕的两位象棋运动员即是比赛的对立面（或称为"对手"）；一场战争中，交战的双方就是斗争的对立面；生产斗争中，常常是人类和大自然成了对立面，等等．我们把介入竞争的对立面，称为局中人．

2．各局中人在竞争中总希望取得尽可能大的胜利，谁也不希望自己失败，至少不要败得很惨．这样，各方都在想方设法选择对付对手的"办法"，或说是选取一种"着法"，我们把这种"办法"（或"着法"）称为策略．

这里所谓策略，是指局中人在整个竞争过程中的对付对手的办法，并不是指竞争中某一步所采用的办法．如在下象棋中，"当头炮"只是作为一个策略的一个组成部分，并非一个策略．

局中人的一切可能的策略，组成该局中人的策略集合．本书中，只讨论策略集合中含有限个策略的情况．

3．竞争的结局，或是表现为胜负（输赢），或是表现为得失．这种结局称为一种"赢得"（或"支付"）．

这种竞争现象正是对策论所要研究的，称为对策现象，而上述三点则为对策的三要素.

当然，为了得到一种较好的结局，局中人如何选取策略是很重要的，下面以“齐王赛马”为例加以说明.

战国时期，齐国的国王与国内一个名叫田忌的大将进行赛马. 双方约定，各自出三匹马，分别为三个等级的——即一等马（好的）、二等马（中等的）、三等马（差的）各一匹. 比赛时，每次双方各从自己的三匹马中任选一匹来比，输者得付给胜者一千两黄金，一回赛三次，每匹马都参加. 这里，局中人自然是齐王和田忌，两局中人的策略集合则为各自三等级马的全排列，结局是某一局中人赢得黄金一千两或三千两.

当时，三种不同等级的马相差非常悬殊，而同等级的马中，齐王的马比田忌的马要强. 这样，如果齐王和田忌都是一、二、三等马依次参赛的话（即策略同为：一等马先参赛，其次二等马参赛，最后三等马参赛），田忌就得输三千两黄金. 这时，田忌的朋友给他出了个主意，让田忌用三等马去与齐王的一等马比赛，一等马对齐王的二等马，二等马对齐王的三等马. 即田忌的策略是三等马先参赛，一等马次之，二等马最后，用以对付齐王的一、二、三等依次参赛. 这样，结局是齐王非但没有赢得，反而输了一千两黄金. 这个例子说明，局中人选取一个好策略至关重要. 至于这种好策略是否能找得到？运用什么方法去找？这都是对策论里所要解决的问题，本书也将适当予以介绍.

下面再介绍几个概念：

从上述提出的问题来看，不管是赛球、下棋（可以是象棋，也可以是国际象棋），还是齐王赛马，这种双方竞争的对策称为二人对策. 在二人对策中，一个局中人的赢得等于另一局

中人的输出时，称这类二人对策为二人零和对策，赢得的数字称为对策的值。例如，在上述齐王赛马的例子中，每当齐王赢得一千两黄金时，就可看成是他的赢得为$+1$，这时田忌的赢得看成是-1；如果齐王输了一千两黄金，就看成它的赢得为-1，这时田忌的赢得为$+1$。于是，在对策的结局，双方的赢得之和等于零。这就是"零和"对策称呼的来历。

二、矩阵对策的数学模型

我们继续来讨论齐王赛马的例子。以$\alpha_1(1, 2, 3)$表示齐王先用一等马，再用二等马，最后用三等马参赛。于是，齐王共有如下六个策略：

$$\alpha_1(1, 2, 3), \quad \alpha_2(1, 3, 2),$$
$$\alpha_3(2, 1, 3), \quad \alpha_4(2, 3, 1),$$
$$\alpha_5(3, 2, 1), \quad \alpha_6(3, 1, 2);$$

同理，田忌也有六个策略：

$$\beta_1(1, 2, 3), \quad \beta_2(1, 3, 2),$$
$$\beta_3(2, 1, 3), \quad \beta_4(2, 3, 1),$$
$$\beta_5(3, 2, 1), \quad \beta_6(3, 1, 2).$$

齐王的策略集合S_1含有六个元素，记为：

$$S_1=\{\alpha_1, \alpha_2, \cdots\cdots, \alpha_6\};$$

田忌的策略集合S_2也含有六个元素，记为：

$$S_2=\{\beta_1, \beta_2, \cdots\cdots, \beta_6\}.$$

列一个表，表示齐王的赢得（单位：千两黄金）：

	β_1	β_2	β_3	β_4	β_5	β_6
α_1	3	1	1	1	1	−1
α_2	1	3	1	1	−1	1
α_3	1	−1	3	1	1	1
α_4	−1	1	1	3	1	1
α_5	1	1	−1	1	3	1
α_6	1	1	1	−1	1	3

如果只考虑数字表，写成如下形式：

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 3 & 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 3 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

在数学中，这可以看成一个矩阵❶. 由于它是齐王赢得表中的数字依次抽象出来的，所以这个矩阵可称为齐王的赢得矩阵. 对于二人零和对策，局中人Ⅰ的赢得矩阵给定后，两局中人就

❶ 将 $m\times n$ 个数字 $a_{11}, a_{12}, \cdots, a_{mn}$ 排成 m 行(横排是"行")、n 列(纵排是"列")的矩形表：

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix},$$

称为 m 行 n 列的矩阵，可以简记成 $A=(a_{ij})$，其中 $i=1,2,\cdots,m$; $j=1,2,\cdots,n$. 也可以记成 $A_{m\times n}$.

对于两个矩阵 $A_{m\times n}=(a_{ij})$、$B_{m\times n}=(b_{ij})$，当且仅当所有的元素对应相等，即 $a_{ij}=b_{ij}$ 时，才认为这两个矩阵是相等的：$A=B$.

便于各自考虑选取最优策略，以谋取最大的赢得.

为了表述方便，以后，当我们给定一个对策时，如果局中人 I 的策略集合记为 S_1，局中人 II 的策略集合记为 S_2，局中人 I 的赢得矩阵是 $\boldsymbol{A}$，这时我们把这个对策记为 Γ，具体的写为

$$\Gamma=\{\mathrm{I},\ \mathrm{II};\ S_1,\ S_2,\ \boldsymbol{A}\} \quad \text{或} \quad \Gamma=\{S_1,\ S_2,\ \boldsymbol{A}\}.$$

有限二人零和对策又称为矩阵对策.

下面，我们通过几个再简单些的例子，用以说明如何来选取最优策略.

[例 1] 对于一个矩阵对策 $\Gamma=\{\mathrm{I},\mathrm{II};\ S_1,\ S_2,\boldsymbol{A}\}$，其中

$$S_1=\{\alpha_1,\ \alpha_2,\ \alpha_3,\ \alpha_4\},\quad S_2=\{\beta_1,\ \beta_2,\ \beta_3\},$$

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}-6 & 1 & -8\\ 3 & 2 & 4\\ 9 & -1 & -10\\ -3 & 0 & 6\end{pmatrix},$$

求双方的最优策略，并求对策的值？

解 由 $\boldsymbol{A}$ 可以看出，局中人 I 的最大赢得是 9，就是说局中人 I 总希望自己取得 9，就得出 α_3 参入对策. 然而，局中人 II 也是在考虑，因为局中人 I 有出 α_3 的心理状态，于是局中人 II 就想出 β_3 参入对策，这样不仅不能使 I 得到 9，反而得输 10 (即赢得 -10). 同样，I 也会这样想，II 有出 β_3 的心理状态，于是 I 就会出 α_4，结果 II 不但得不到 10，反而要输 6.

这样一来，双方都必然要考虑，不冒风险，考虑到对方会设法使自己得到最小收入. 所以就应当从最坏的方案中着手，去争取最好的结果.

对于局中人 I 来说，所有最坏的结果，即 $\boldsymbol{A}$ 中每一行的

最小数分别是：

$$-8,\ 2,\ -10,\ -3,$$

在这些最坏的情况中，最好的结果又是 2．于是，局中人 I 要是出 α_2 参加对策，至少可以保证收入不会少于 2．同样道理，对于局中人 II 来说，所有最坏的结果(即 $\boldsymbol{A}$ 中每一列的最大数，也是最多输掉的数)分别是：

$$9,\ 2,\ 6,$$

这些最坏的结果中，最好的结果(输得最小)是 2．于是，局中人 II 要是出 β_2 参入对策，那么它最多输 2．

这就是说，局中人 I 的最优策略是 α_2，局中人 II 的最优策略是 β_2；数值 2 就是对策 Γ 的值：$V_\Gamma=2$．

把例 1 的求解过程用数学式子写出来，就是：从每一行里求出最小数，可写成

$$\begin{aligned}
&\min\{-6,\ 1,\ -8\}=-8,\\
&\min\{3,\ 2,\ 4\}=2,\\
&\min\{9,\ -1,\ -10\}=-10,\\
&\min\{-3,\ 0,\ 6\}=-3;
\end{aligned}$$

再从这些最小的数中取最大的，可写为

$$\max\{-8,\ 2,\ -10,\ -3\}=2.$$

对于局中人 II 来说，从每一列里取最大的，可写为

$$\begin{aligned}
&\max\{-6,\ 3,\ 9,\ -3\}=9,\\
&\max\{1,\ 2,\ -1,\ 0\}=2,\\
&\max\{-8,\ 4,\ -10,\ 6\}=6;
\end{aligned}$$

再从这些最大的数中取最小的，就是

$$\min\{9,\ 2,\ 6\}=2.$$

一般地，如果对策 Γ 的赢得矩阵 $\boldsymbol{A}$ 为：

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix},$$

对局中人 I 来说，对 A 的每一行取其中的最小值 $\min\limits_{j} a_{ij}$ $(i=1, 2, \cdots, m)$，再从这些最小值中取最大值，得

$$\max_{i} \min_{j} a_{ij};$$

对局中人 II 来说，对 A 的每一列取其中的最大值 $\max\limits_{i} a_{ij}$ $(j=1, 2, \cdots, n)$，再从这些最大值中取最小值，得

$$\min_{j} \max_{i} a_{ij}.$$

如果

$$\max_{i} \min_{j} a_{ij}=\min_{j} \max_{i} a_{ij}=a_{i^*j^*},$$

则 α_{i^*}、β_{j^*} 分别为局中人 I、II 的最优策略，且这一对策的值 V_Γ 即为

$$V_\Gamma=\max_{i} \min_{j} a_{ij}=\min_{j} \max_{i} a_{ij}.$$

为了表述方便，对于局中人 I 用 α_i，局中人 II 用 β_j 进行对策，我们称 (α_i, β_j) 为一个局势。对于能使

$$\max_{i} \min_{j} a_{ij}=\min_{j} \max_{i} a_{ij}$$

的 α_{i^*}、β_{j^*} 构成的局势 $(\alpha_{i^*}, \beta_{j^*})$ 称为对策的解，而 α_{i^*}、β_{j^*} 分别称为局中人 I 与 II 的最优纯策略。显然，在例 1 中，对策的解为 (α_2, β_2)，对策的值为 $V=2$。

［例 2］ 设有一个矩阵对策，局中人 I 的赢得矩阵 A 为

$$A=\begin{pmatrix} 4 & 1 & 2 \\ -3 & 0 & 4 \\ 3 & -1 & 0 \end{pmatrix},$$

求双方的最优纯策略，并求对策的值。

解 首先求出

$$\max_i \min_j a_{ij}=1,$$

再求出

$$\min_j \max_i a_{ij}=1,$$

由于 $\max\limits_i \min\limits_j a_{ij}=\min\limits_j \max\limits_i a_{ij}=a_{12}=1$，所以局中人 I 的最优纯策略是 α_1，局中人 II 的最优纯策略是 β_2，对策的值 $V=1$.

下面再来看一个实例.

［例 3］ 山东省济南市东郊人民公社计划种茄子、辣椒、大葱、大白菜等十一种蔬菜，种植面积为 1300 亩，但感到水、肥均不足，根据各种蔬菜的收获量及市场价格，应怎样安排各种蔬菜的种植面积，使既能满足市场供应，又保证公社能获得最大的收入.

解 首先，把问题适当简化，以利归结为一个数学问题. 我们可以把水分成两种情况：足与不足，把肥分成三种情况：足够、稍缺、甚缺，这样投入每一块田的水、肥结合起来便有六种不同情况. 另外，根据市场实际需要和种植情况，将各种蔬菜的种植面积分成五种不同方案，并按市价算出总收入数字(单位：元)列成下表：

方案	自然条件					
	一	二	三	四	五	六
甲	192460	235120	278200	156360	197520	242840
乙	189560	231700	273630	155620	196600	239710
丙	192060	234799	277095	158235	198580	243280
丁	194370	237218	280751	158475	199813	245362
戊	194360	238990	281385	157835	199750	246020

这就把问题归结为二人零和对策，局中人分别为人和大自然，人有五种策略，大自然有六种策略，把上表数字抽象出来就是人的赢得矩阵.

上述赢得矩阵 $A=(a_{ij})$ 是一个有五行、六列的矩阵，可求得

$$\max_i \min_j a_{ij}=\min_j \max_i a_{ij}=158475,$$

即采用方案丁，其总收入决不少于 158475 元，而有达到 280751 元的希望.

[例 4] 给定一个矩阵对策 Γ，其赢得矩阵是

$$\begin{pmatrix} 6 & 5 & 6 & 5 \\ 1 & 4 & 2 & -1 \\ 8 & 5 & 7 & 5 \\ 0 & 2 & 6 & 2 \end{pmatrix},$$

由于

$$\min_j a_{1j}=5,\ \min_j a_{2j}=-1,\ \min_j a_{3j}=5,\ \min_j a_{4j}=0.$$

在这些最小中去取最大，有

$$\max_i \min_j a_{ij}=a_{i^*j^*}=5,\quad i^*=1,\ 3;\ j^*=2,\ 4.$$

又由于

$$\max_i a_{i1}=8,\ \max_i a_{i2}=5,\ \max_i a_{i3}=7,\ \max_i a_{i4}=5.$$

在这些最大中去取最小，是

$$\min_j \max_i a_{ij}=a_{i^*j^*}=5,\quad i^*=1,\ 3;\ j^*=2,\ 4.$$

显然有

$$\max_i \min_j a_{ij}=\min_j \max_i a_{ij}=5.$$

故 $(\alpha_1,\ \beta_2)$、$(\alpha_3,\ \beta_4)$、$(\alpha_1,\ \beta_4)$、$(\alpha_3,\ \beta_2)$ 四个局势都是对策 Γ 的解，即

$$(\alpha_{i^*},\ \beta_{j^*})=(\alpha_1,\ \beta_2)=(\alpha_3,\ \beta_4)=(\alpha_3,\ \beta_2)=(\alpha_1,\ \beta_4).$$

由例 4 可以看到，对策的解可以不唯一，当然它的值是唯一的.

对于例 4 这样的对策，当对策的解不唯一时，它有两条重要性质：

1．无差别性．即 $(\alpha_1,\ \beta_2)$ 与 $(\alpha_3,\ \beta_4)$ 是两个解，那末也有

$$a_{12}=a_{34}.$$

一般说来，$(\alpha_{i_1},\ \beta_{j_1})$，$(\alpha_{i_2},\ \beta_{j_2})$ 是两个解，那末也有

$$a_{i_1j_1}=a_{i_2j_2}.$$

2．可换性．由于 $(\alpha_1,\ \beta_2)$，$(\alpha_3,\ \beta_4)$ 是两个解，那末 $(\alpha_1,\ \beta_4)$ 与 $(\alpha_3,\ \beta_2)$ 也都是解．一般说来，若 $(\alpha_{i_1},\ \beta_{j_1})$，$(\alpha_{i_2},\ \beta_{j_2})$ 是两个解，那末 $(\alpha_{i_1},\ \beta_{j_2})$ 与 $(\alpha_{i_2},\ \beta_{j_1})$ 也都是对策的解.

最后，我们来讨论，是否只要给定一个对策 Γ，就一定有解呢？上述例 1～例 4 都是有解的，但也有没有解的对策．例如，前述齐王赛马的对策，便是没有解的，因为在齐王的赢得矩阵 $\boldsymbol{A}$ 中，可以算出

$$\max_i \min_j a_{ij}=-1,$$

$$\min_j \max_i a_{ij}=3,$$

显然，这里的

$$\max_i \min_j a_{ij}\neq\min_j \max_i a_{ij}.$$

所以，齐王赛马的对策中，双方没有最优纯策略.

什么情况下给定的对策有解呢？

定理　对策 $\Gamma=\{\mathrm{I},\ \mathrm{II};\ S_1,\ S_2,\ \boldsymbol{A}\}$ 有解的充分必要条件是：存在一个纯局势 $(\alpha_{i^*},\ \beta_{j^*})$，对一切 $i=1,\ 2,\ \cdots,\ m$；$j=1,\ 2,\ \cdots,\ n$，都有

$$a_{ij^*}\leqslant a_{i^*j^*}\leqslant a_{i^*j}.$$

证明　先证充分性．由于对一切 i、j 均有

$$a_{ij^*}\leqslant a_{i^*j^*}\leqslant a_{i^*j},$$

故有

$$\max_i a_{ij^*}\leqslant a_{i^*j^*}\leqslant\min_j a_{i^*j},$$

而

$$\min_j\max_i a_{ij}\leqslant\max_i a_{ij^*},$$

$$\min_j a_{i^*j}\leqslant\max_i\min_j a_{ij},$$

从而可得

$$\min_j\max_i a_{ij}\leqslant a_{i^*j^*}\leqslant\max_i\min_j a_{ij}.$$

另外，显然有❶

$$\max_i\min_j a_{ij}\leqslant\min_j\max_i a_{ij}.$$

将上两式比较，即得

$$\max_i\min_j a_{ij}=\min_j\max_i a_{ij}=a_{i^*j^*},$$

这就证明了对策 Γ 有解 $(\alpha_{i^*},\ \beta_{j^*})$，且其值为 $a_{i^*j^*}$.

现在来证明必要性．既然对策 Γ 有解，假设 $\min\limits_j a_{ij}$ 在 $i=i^*$ 时达到最大，$\max\limits_i a_{ij}$ 在 $j=j^*$ 时达到最小，即

$$\max_i\min_j a_{ij}=\min_j a_{i^*j},$$

$$\min_j\max_i a_{ij}=\max_i a_{ij^*},$$

而

$$a_{i^*j^*}=\max_i\min_j a_{ij}=\min_j\max_i a_{ij},$$

从而有

$$a_{i^*j^*}=\min_j\max_i a_{ij}=\max_i a_{ij^*}\geqslant a_{ij^*};$$

$$a_{i^*j^*}=\max_i\min_j a_{ij}=\min_j a_{i^*j}\leqslant a_{i^*j}.$$

---

❶ 对于矩阵 $A=(a_{ij})$，显然有 $\min\limits_j a_{ij}\leqslant a_{ij}$，从而 $\max\limits_i\min\limits_j a_{ij}\leqslant\max\limits_i a_{ij}$. 由于上式右端包括了一切 j，所以也有 $\max\limits_i\min\limits_j a_{ij}\leqslant\min\limits_j\max\limits_i a_{ij}$.