高等财经院校试用教材

经济应用数学

基础（上册）

主　编　刘雨泽
副主编　袁世栋　齐　毅

中国商业出版社

前　言

《经济应用数学基础》是根据国家教委和商业部教育司颁发的经济类专科学校教学大纲和教学计划编写的数学试用教材。它可供经济类专科学校数学课程的教学之用，也可为经济类各专业的大专函授、夜大学及职业大专院校用作教材或教学参考书。

本书分上、下两册。上册编入了微积分和概率论与数理统计的基本内容。下册编入了线性代数、线性规划等基本内容。

本书由刘雨泽副教授任主编，袁世栋、齐毅任副主编，参加编写的还有白岩、宵忠莲、张天纪、张福生、国春光、赵景悦、姜兴武。

由于编者水平有限，书中缺点错误在所难免，敬请读者不吝赐教。

编者

1993 年 5 月

目　录

微积分部分

概率论部分

微积分部分

第一章　函数、极限与连续

微积分所研究的主要对象是函数，所用的主要方法是极限，而极限的概念是微积分学的“灵魂”，是学习后几章的重要工具；连续性是函数的重要性质，本门课中所研究的主要是连续函数，而不连续函数的和函数的不连续性只在个别之处涉及到。

这一章内容表面上带有初等数学（常量数学）的复习性质，但不完全是简单地重复，所讲的内容无论从深度、广度上都是常量数学不可比拟的。这一章是常量数学（初等数学）向变量数学（高等数学）的过渡阶段。

§1.1　函数的概念及其表示法

一、函数的定义

如果当变量 x 在其变化范围内任意取一数值时，变量 y 按一定法则总有确定的数值和它对应，这时就把 y 叫做 x 的函数。

通常将 x 称为自变量，将 y 称为因变量，一定的法则称做对应律或函数关系，也称做对应关系。自变量变化范围叫定义域，因变量变化范围叫值域。

函数一般记为　$y=f(x)$

y——因变量　x——自变量　f——对应关系

如果两个函数对应律不同，那么小括号外的字母也用不相同的字母表示，即同一自变量由于对应律不同是两个不同的函数．例如：

$$f(x)=\pi x^2$$

$$\varphi(x)=2\pi x$$

如果对应律相同而自变量不同，这只是自变量字母差异，例如：

$$f(x)=x^2+2x+3$$

$$f(t)=t^2+2t+3$$

两个式子实质是一个函数。

如果自变量在定义域内任取一个确定值时，函数都只有一个确定值与它对应，我们就说这种函数是单值函数；如果函数有两个或两个以上的值与自变量的一个值对应，我们就说函数是多值函数。例如：

$y=ax^2+bx+c$ 是单值函数。

$y^2=2px$ 及 $y=\arcsin x$ 是多值函数。

只有一个自变量的函数叫做一元函数；有两个自变量的函数叫做二元函数，有 n 个自变量的函数叫做 n 元函数。二元和二元以上的函数均称为多元函数。

同一元函数记号相仿，多元函数记号，在自变量位置将自变量全列上，如 $z=f(x,y)$ 或 $F(x,y,z)=0$，………，$U=\varphi(x_1,x_2\cdots\cdots\cdots x_n)$

在函数定义中，并没有要求自变量变化时函数一定要变，重要的是：当自变量 x 在定义域中任取一数值时，函数有确定的值和它对应，因此，我们可以把常量当作函数来看待，它对于自变量的一切值来说函数值都是相等的，这种意义下称做常函数。

二、函数的表示法

函数的表示法，通常情况下用下面三种表示法：

1. 公式法(解析法)

用数学式子表示自变量与因变量之间对应关系的方法叫做公式法。公式法的优点是简明准确，便于理论分析，但不直观，并

且在有些实际问题中遇到函数关系，很难用甚至不能用公式法表示。

2. **列表法**

用表格表示函数自变量与因变量对应关系的方法叫列表法，例如：三角函数表、对数表、平方表等等。

列表法的优点是一般可以从自变量的值直接查到对应的函数值。但表中列的数据往往不够完全，同时这样表示的函数也不便于进行理论分析。

3. **图示法**

用坐标系内的图形表示函数自变量与因变量对应关系的方法叫图示法。

图示法优点是鲜明直观，但也不便于理论研究和分析。工厂产值示意图，气温变化图象等均属图示法。

三、分段函数

用公式法表示的函数中，有一种函数，在不同范围内用不同解析式表示同一函数，则称这个函数为分段函数，例如：

$$y = f(x) = \begin{cases} 2\sqrt{x} & (0 \leqslant x \leqslant 1) \\ 1 + x & (x > 1) \end{cases}$$

这是确定在$[0, +\infty)$上的一个函数，当自变量x取闭区间$[0, 1]$上的数值时，对应的函数y由公式$y=2\sqrt{x}$确定；当x取区间$(1, +\infty)$内的数时，y值由公式$y=1+x$确定。

例1. 某运输公司规定货物运输的吨公里运价为：若不超过100公里，每公里K元；100公里以上又不超过200公里，每增加1公里为$\frac{4}{5}K$元；超过200公里，每增加1公里为$\frac{3}{5}K$元，试把运价M和里程S之间的关系用公式法表示出来。

解：依题意

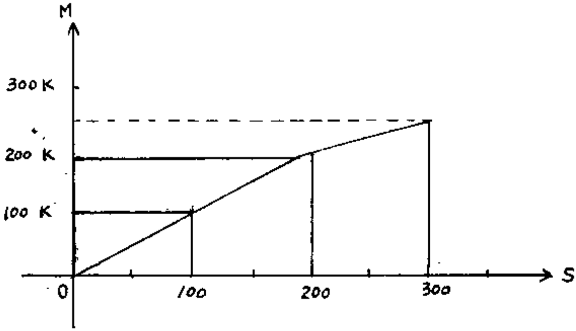

图 1.1

$$M=\begin{cases} KS & 0\leqslant S\leqslant 100 \\ 100K+(S\text{-}100)\dfrac{4}{5}K & 100<S\leqslant 200 \\ 100K+100\times\dfrac{4}{5}K+(S\text{-}200)\dfrac{3}{5}K & S>200 \end{cases}$$

四、隐函数

用公式法表示的函数叫显函数。如果函数的对应关系由一个含有自变量x和因变量y的方程来确定，那么称y为x的隐函数，也就是说因变量隐含在方程之中，一数形式为：

$F(x,y)=0\qquad F(x_1,x_2\cdots\cdots\cdots x_n,y)=0$

例如　$x+y=1\qquad e^x=x$

有些隐函数可化为显函数，有些则困难，有些根本就不能。

§1.2　函数的几种简单性质

1. 函数的有界性

设函数 $f(x)$ 在 D 内有定义（D 可以是函数 $f(x)$ 的整个定

义域，也可以只是 $f(x)$ 定义域的一部分)，如果存在正数 M，使得当 x 取 D 内的任何一个值时，对应的函数值 $f(x)$ 都满足不等式。

$$|f(x)| \leqslant M$$

就称函数 $f(x)$ 在 D 内有界。

例如　$f(x) = \sin x$　在$(-\infty, +\infty)$内是有界的，因为对于任何 $x \in (-\infty, +\infty)$ 不等式 $|\sin x| \leqslant 1$ 都成立，而 $f(x) = x^2$ 在$(-\infty, +\infty)$内是无界的。(因不存在一个大于 $|x^2|$ 的数)。

2. 函数的单调性

如果函数 $f(x)$ 在区间(a,b)内随着 x 增大而增，即对于(a,b)内任意两点 x_1 及 x_2，当 $x_1 < x_2$ 时，有 $f(x_1) < f(x_2)$，则函数 $f(x)$ 叫做在区间(a,b)内是单调增加的；如果函数 $f(x)$ 在区间(a,b)内随着 x 增大而减小，即对于(a,b)内任意两点 x_1 及 x_2，当 $x_1 < x_2$ 时，有 $f(x_1) > f(x_2)$，则函数 $f(x)$ 叫做在区间(a,b)内是单调减少的。单调增加函数、单调减少函数统称为单调函

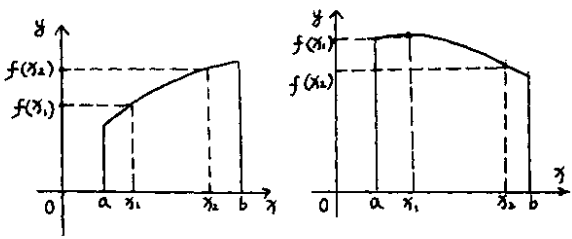

图 1.2

数。所在区间叫单调区间。

例 1. $f(x) = x^2$ 在区间$[0, +\infty)$内单调增加，在区间$(-\infty,$

0] 内单调减小，$[0, +\infty)$ 与 $(-\infty, 0]$ 是 $f(x)$ 的单调区间，而 $f(x)$ 是在区间 $[0, +\infty)$ 和 $(-\infty, 0]$ 内的单调函数。但在区间 $(-\infty, +\infty)$ 内就不是单调函数。如图 1.3 所示。

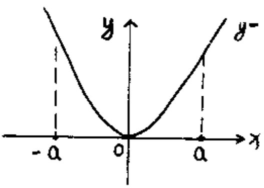

图 1.3

例 2. $f(x) = x^3$，在 $(-\infty, +\infty)$ 内是单调增加的，如图 1.4 所示。

3. 函数的奇偶性

如果函数 $f(x)$ 对于定义域内的任意 x 都满足 $f(-x) = f(x)$，则 $f(x)$ 叫做偶函数，如果函数对于定义域内任意 x 都满足 $f(-x) = -f(x)$，则 $f(x)$ 叫做奇函数，例如 $f(x) = x^2$ 就是偶函数，$f(x) = x^3$ 就是奇函数。

事实可证明，偶函数的图形是关于 y 轴为对称的。即轴对称；奇函数的图形是关于原点为对称的，即点对称，也存在非奇非偶函数。即 $f(-x) \neq f(x)$ 且 $f(-x) \neq -f(x)$ 例如　$y = \sin x + \cos x$。

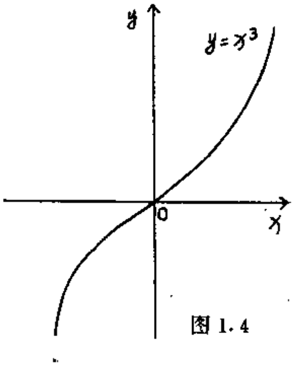

图 1.4

4. 函数的周期性

对于函数 $f(x)$，如果存在一个不为零的数 l，使得关系式

$$f(x + l) = f(x)$$

对于定义域内任何 x 都成立，则 $f(x)$ 叫做周期函数，l 就叫 $f(x)$ 的周期，l 可有无穷多个，通常我们所说的周期是指最小正

周期。

例如函数 $\sin x$、$\cos x$ 的周期是 2π(见图 1.5)$\mathrm{tg}x$、$\mathrm{ctg}x$ 的周期是 π。

以 l 为周期的函数在图形上表明在这个函数的定义域内的

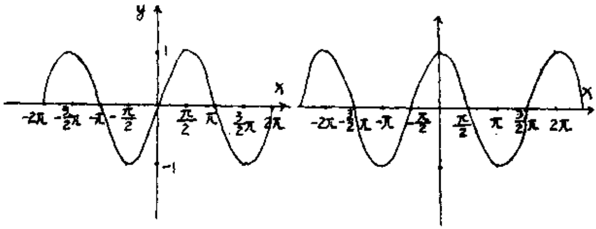

图 1.5

每个相邻长度为 l 的区间上，函数图形有相同的形状。

§1.3　反函数与复合函数

一、反函数

一元函数的两个变量中，如果其中一个定为自变量，那么另一个必然是因变量。比如研究正方形面积 A 与边长 x 之间依赖关系时，应该确定哪个变量为自变量呢?这，就要看我们认为哪一个作为自变量对问题的讨论来得方便，就确定哪一个作为自变量。

当我们要由给定的边长 x 求面积 A 时，或由 x 的变化来研究 A 的变化时，取 x 作为自变量来得方便，此时 A 是 x 的函数。则有

$$A = x^2 \tag{1}$$

当我们给定面积 A 求边长 x，或由 A 的变化来研究 x 的变

化时，就取A作自变量更方便些，这时x是A的函数，则由(1)式得出

$$x=\sqrt{A} \qquad (2)$$

因边长不能为负值，固根号前只取正号。

观察(1)式、(2)式，两个式子虽然是一个方程两种写法，但是从函数的观点出发，它们的对应律是不同的，所以是两个不同的函数。(1)式、(2)式之间的对应关系互为逆运算，显然(1)式的定义域是(2)式的值域，(1)式的值域是(2)式的定义域，一般来说像这样两个关系式，前一个函数叫直接函数，后一个叫前一个函数的反函数，广义地说(1)式、(2)互为反函数。

定义：如果在给出函数

$$y=f(x) \qquad (3)$$

中，把y看作自变量，x看作因变量，而能确定一个函数

$$x=\varphi(y) \qquad (4)$$

我们就说函数(4)是函数(3)的反函数，而函数(3)叫直接函数，反过来说也可。

函数(3)、函数(4)，用方程观点一说是同解方程，即任一点(a,b)即满足(3)，也满足(4)。反过来即满足(4)也满足(3)，所以(3)与(4)的图形在给定的直角坐标系中是同一曲线，并且在同一位置。

由于书写习惯，一般情况下因变量用y表示，自变量用x表示，这时反函数(4)表示式中的x改成y，y改成x，即

$y=\varphi(x) \qquad (5) \qquad$ (5)与(3)互为反函数，显然$f(x)$与$\varphi(x)$就不是一个图形了。依作图习惯总是把自变量的值作为横坐标，因变量的值作为纵坐标。(3)式与(5)式作图不同这处只在于x轴与y轴的位置对调，显然直接和反函数的图形对称于$y=x$直线。

反函数的主值，一个反函数可能是多值的，多值函数不便于研究，因此我们常常规定其中一值为代表，这个值称做主值，例

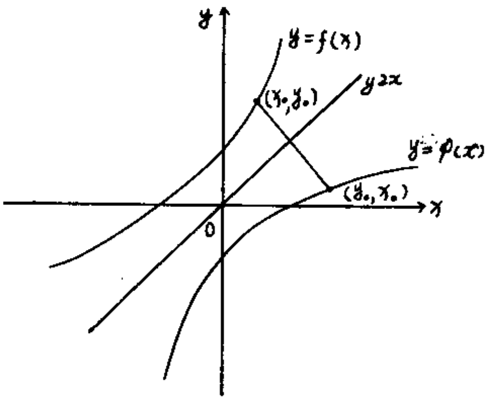

图 1.6

如：

$y=x^2$　反函数为 $y=\pm\sqrt{x^2}$，习惯上取$\sqrt{x^2}$。

$y=Arc\sin x$ 有无穷多值，习惯上用介于 $-\frac{\pi}{2}$ 与$\frac{\pi}{2}$ 之间的那个值，并特地用小写字母来表示主值。记为　$y=\arcsin x$，其它反三角函数亦如此。

例 1. 求 $y=3x-1$ 的反函数并作图。

解：由 $y=3x-1$ 可求出

$$x=\frac{y+1}{3}$$

得 $y=3x-1$ 的反函数为 $y=\frac{x+1}{3}$，见图 2.5

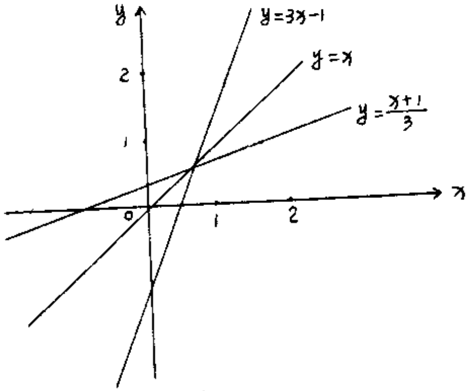

图 1.7。

二、复合函数

定义:如果 y 是 u 的函数 $y=f(u)$,而 u 又是 x 的函数,$u=\varphi(x)$,并且 $\varphi(x)$ 函数值全体或部分使 $f(u)$ 有定义,那么 y 通过 u 的联系也是 x 的函数,这样的函数是由 $y=f(u)$、$u=\varphi(x)$ 复合而成的函数,简称复合函数,记为

$$y=f[\varphi(x)]$$

其中 u 叫中间变量,x 叫最终变量,f、φ 称对应关系,也叫对应律。通俗的理解可以说函数的函数叫做复合函数。

例 1. $y=\sin u \qquad u=\sqrt{x}$

那么 $\quad y=\sin\sqrt{x}$

u 的定义域是$[0,+\infty)$,y 的最终定义域为$[0,+\infty)$.该例说明复合函数的定义域是中间变量的全部。

例 2. $y=\sqrt{u} \qquad u=1-x^2$

则 $\quad y=\sqrt{1-x^2}$

u 的定义域$(-\infty,+\infty)$，y 的最后定义域为$[-1,1]$是中间变量 u 定义域的一部分。这就是说 $\varphi(x)$ 的值域并不一定完全是函数 $f(u)$ 的定义域，也许是一部分，故定义中叙述有全部或部分的字样就好理解了。

例 3. $y = \text{arctg}u \quad u = 5^v \quad v = \sqrt{w} \quad w = 1 + x^2$

可合成为　$y = \text{arctg}5^{\sqrt{1+x^2}}$

其中 u、v、w 为中间变量　x 为最终变量。

例 4. 分解复合函数

① $y = \cos^2(x^2 + 1)$

最外层是幂函数，可写成 $y = u^2$。

第二层是三角函数，可写成 $u = \cos v$

第三层是多项式，可写成 $v = x^2 + 1$

故函数可分解为　$y = u^2 \quad u = \cos v \quad v = x^2 + 1$

② $y = 2^{\sin^3\frac{1}{x}}$

同理可分解为

$y = 2^u \quad u = v^3 \quad v = \sin w \quad w = \dfrac{1}{x}$

另外，不是任何几个函数都可以复合成一个复合函数的，以两个函数合成为例：$y = \arcsin u$、$u = 2 + x^2$、$y = \arcsin(2 + x^2)$，这是不成立的，因为 u 的定义域为$(-\infty,+\infty)$，其中任何一个 x 所对应的函数值都大于 2，所以所有的 u 值对于 $y = \arcsin u$ 都没意义。

§1.4　基本初等函数与初等函数

一、基本初等函数

下面六种函数叫做基本初等函数

1. 常函数　$y = c$