教育部高职高专规划教材

复变函数与积分变换

陈　洪　贾积身　王　杰等　编

高等教育出版社

图书在版编目(CIP)数据

复变函数与积分变换/陈洪等编．—北京：高等教育出版社，2002.8

ISBN 7-04-010831-3

Ⅰ．复… Ⅱ．陈… Ⅲ．①复变函数②积分变换 Ⅳ．O17

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2002)第 015438 号

责任编辑 韩 颖 **封面设计** 杨立新 **责任绘图** 朱 静
版式设计 马静如 **责任校对** 杨雪莲 **责任印制** 张小强

复变函数与积分变换
陈洪 贾积身 王杰 等编

出版发行	高等教育出版社	**购书热线**	010－64054588
社　　址	北京市东城区沙滩后街55号	**免费咨询**	800－810－0598
邮政编码	100009	**网　　址**	http://www.hep.edu.cn
传　　真	010－64014048		http://www.hep.com.cn

经　　销	新华书店北京发行所
印　　刷	北京市鑫鑫印刷厂

开　　本	850×1168　1/32	**版　　次**	2002年8月第1版
印　　张	9	**印　　次**	2002年8月第1次印刷
字　　数	220 000	**定　　价**	11.60元

出版说明

教材建设工作是整个高职高专教育教学工作中的重要组成部分．改革开放以来，在各级教育行政部门、学校和有关出版社的共同努力下，各地已出版了一批高职高专教育教材．但从整体上看，具有高职高专教育特色的教材极其匮乏，不少院校尚在借用本科或中专教材，教材建设仍落后于高职高专教育的发展需要．为此，1999年教育部组织制定了《高职高专教育基础课程教学基本要求》（以下简称《基本要求》）和《高职高专教育专业人才培养目标及规格》（以下简称《培养规格》），通过推荐、招标及遴选，组织了一批学术水平高、教学经验丰富、实践能力强的教师，成立了“教育部高职高专规划教材”编写队伍，并在有关出版社的积极配合下，推出一批“教育部高职高专规划教材”．

“教育部高职高专规划教材”计划出版500种，用5年左右时间完成．出版后的教材将覆盖高职高专教育的基础课程和主干专业课程．计划先用2～3年的时间，在继承原有高职、高专和成人高等学校教材建设成果的基础上，充分汲取近几年来各类学校在探索培养技术应用性专门人才方面取得的成功经验，解决好新形势下高职高专教育教材的有无问题；然后再用2～3年的时间，在《新世纪高职高专教育人才培养模式和教学内容体系改革与建设项目计划》立项研究的基础上，通过研究、改革和建设，推出一大批教育部高职高专教育教材，从而形成优化配套的高职高专教育教材体系．

“教育部高职高专规划教材”是按照《基本要求》和《培养规格》的要求，充分汲取高职、高专和成人高等学校在探索培养

技术应用性专门人才方面取得的成功经验和教学成果编写而成的，适用于高等职业学校、高等专科学校、成人高校及本科院校举办的二级职业技术学院和民办高校使用.

教育部高等教育司

2000 年 4 月 3 日

前言

本书是教育部高职高专规划教材，也是教育部新世纪数学课程教学内容课程体系改革课题的研究成果之一.

在本书的编写过程中，根据高职高专人才培养目标，编者结合多年从事复变函数与积分变换课程的教学实践与教学研究的体会，努力适应高职高专的教学需要．本教材具有如下特点：

1．从实用性角度出发，加大积分变换及其应用的篇幅，加进了工程上常用的 Z 变换及其应用内容．同时不追求复变函数的系统性，根据需要压缩了复变函数的篇幅.

2．在讲清基本概念、基本方法的基础上，降低了本课程难度，力求低起点，通俗易懂．每章都安排小结与练习一节，便于学生理解和掌握.

3．增加了用 Matlab 进行积分变换运算一章，体现了教材的现代化.

本教材的教学时数为 44 学时左右，打“*”号内容需另加学时.

本书第一章、第二章及第三、四、五章习题由咸美新(南京工程学院)编写，第三章、第四章、第五章、第十章由陈洪(南京工程学院)编写，第六章、第七章、第九章由贾积身(河南机电高等专科学校)编写．第八章由王杰(西安电力高等专科学校)编写．全书由陈洪负责统稿和定稿.

苏州广播电视大学钱椿林教授作为本书的主审，提出了许多宝贵的意见，在此表示衷心感谢.

因作者水平有限，错误和不当之处难免，敬请师生批评指正．

编　者

2000年9月

目　录

第一篇　复变函数

第二篇 积 分 变 换

第一篇　复变函数

第一章　复　　数

复数是复变函数的基础．本章主要介绍复数的概念、性质及运算，然后引入平面点集、区域和复平面的概念．

§1.1　复数及其几何表示

1.1.1　复数

形如 $z=x+\mathrm{i}y$ 称为**复数**，其中 x 和 y 是任意实数，i 是**虚数单位**($\mathrm{i}^2=-1$)．实数 x 和 y 分别称为复数 z 的**实部**和**虚部**，记为

$$x=\operatorname{Re} z,\quad y=\operatorname{Im} z.$$

例如，复数 $5-6\mathrm{i}$ 中，5 为实部，即 $\operatorname{Re}(5-6\mathrm{i})=5$，$-6$ 为虚部，即 $\operatorname{Im}(5-6\mathrm{i})=-6$．

全体复数构成的集合称为**复数集**，记作 $\mathbf{C}$，即

$$\mathbf{C}=\{z=x+\mathrm{i}y \mid x,y\in\mathbf{R}\}.$$

复数 $z=x+\mathrm{i}y$，当 $y=0$ 时，$z=x$ 就是**实数**；当 $x=y=0$ 时，z 就是实数 0；当 $y\neq 0$ 时，z 为**虚数**；当 $x=0$，$y\neq 0$ 时，$z=\mathrm{i}y$，称为**纯虚数**．显然实数集 $\mathbf{R}$ 是复数集 $\mathbf{C}$ 的真子集，即 $\mathbf{R}\subsetneqq\mathbf{C}$．

当两个复数的实部与实部相等，虚部与虚部相等时，称这两个**复数相等**．特别地，复数的实部和虚部都为零时，这个复数等于零．即若 a，b，x，$y\in\mathbf{R}$，则

$$a+\mathrm{i}b=x+\mathrm{i}y \implies a=x,\ b=y,$$

$$x+\mathrm{i}y=0 \implies x=y=0.$$

例如，当 x，$y\in\mathbf{R}$，复数 $3x+\mathrm{i}y=3-\mathrm{i} \implies x=1,\ y=-1$.

两个复数只能说相等或不相等，不能比较大小．例如 $1+\mathrm{i}$ 与 $3+5\mathrm{i}$ 不能比较大小．

当两个复数实部相等，虚部互为相反数时，称这两个复数互为**共轭复数**，即称 $x-\mathrm{i}y$ 与 $x+\mathrm{i}y$ 互为共轭复数．复数 z 的共轭复数记为 $\bar{z}$，即若 $z=x+\mathrm{i}y$，则 $\bar{z}=x-\mathrm{i}y$.

显然，$\overline{\overline{Z}}=z$，且任何一个实数的共轭复数就是它本身．

1.1.2 复数的表示

从复数 $z=x+\mathrm{i}y$ 的定义可以看出，复数由一对有序实数 (x,y) 惟一确定，于是在选定直角坐标系后，能够建立平面上的全部点和复数集 $\mathbf{C}$ 之间的一一对应关系，即可以借助横坐标 x，纵坐标 y 的点 $P(x,y)$ 来表示 $z=x+\mathrm{i}y$（如图 1.1.1）.

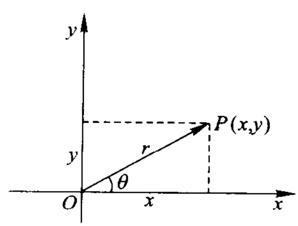

图 1.1.1

实数与 x 轴上的点一一对应，x 轴称为实轴；纯虚数与 y 轴上的点一一对应，y 轴称为虚轴，这样表示复数 z 的平面称为**复平面**或称 **Z 平面**．由于复数与平面上直角坐标系中的点一一对应，为方便起见，今后不再区分“数 z”和“点 z”.

很明显，复平面内表示共轭复数的两个点 $\bar{z}$ 和 z 关于实轴对称(如图 1.1.2).

复数 $z=x+\mathrm{i}y$ 除了可以用复平面内的点(x,y)表示外，还可以用一个向量表示．如图 1.1.1 所示．

复数 $z=x+\mathrm{i}y$ 可以用起点为原点，终点为 $P(x,y)$的向量$\overrightarrow{OP}$来表示，x 与 y 分别是$\overrightarrow{OP}$在 x 轴与 y 轴上的投影．这样，复数与平面上的向量之间建立了一一对应关系．

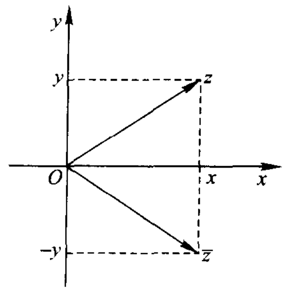

图 1.1.2

图 1.1.1 中的向量$\overrightarrow{OP}$的长度叫做复数 $z=x+\mathrm{i}y$ 的**模**，记作$|z|$或 r，即

$$|z|=r=\sqrt{x^2+y^2}.$$

设复数 $z\neq 0$ 对应的向量为$\overrightarrow{OP}$(如图 1.1.1)，$\overrightarrow{OP}$与实轴正方向所夹的角 θ 称为复数 z 的**辐角**，记作 $\operatorname{Arg} z$，即

$$\theta=\operatorname{Arg} z.$$

显然，$\operatorname{Arg} z$ 是多值的．通常将满足条件 $-\pi<\theta_0\leqslant\pi$ 的辐角 θ_0 称为 $\operatorname{Arg} z$ 的**主值**，记为 $\theta_0=\arg z$．每一个不等于零的复数有惟一的模与辐角的主值，并且可由它的模与辐角的主值惟一确定．于是

$$\operatorname{Arg} z=\arg z+2k\pi \qquad k=0,\ \pm 1,\ \pm 2,\ \cdots.$$

利用直角坐标与极坐标之间的变换关系

$$\begin{cases} x=r\cos\theta, \\ y=r\sin\theta, \end{cases}$$

则可用模 $r=|z|$和辐角 $\theta=\operatorname{Arg} z$ 来表示z，即

$$z=r(\cos\theta+\mathrm{i}\sin\theta). \qquad (1.1.1)$$

式(1.1.1)叫做复数 z 的**三角表示式**．$x+\mathrm{i}y$ 叫做复数z 的**代数表示式**．

根据欧拉公式

$$e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta,$$

利用三角表示式可以得到

$$z = re^{i\theta} \tag{1.1.2}$$

式(1.1.2)叫做复数 z 的**指数表示式**.

复数的这几种表示方法，根据讨论不同问题时的需要，可以互相转换．当把复数 $z = x + iy$ 化为三角表示式和指数表示式时，均需计算 r 和 θ，即 $|z|$ 和 $\operatorname{Arg} z$．由 $|z| = r = \sqrt{x^2 + y^2}$ 很容易算出 r 的值，又 $x = r\cos\theta$，$y = r\sin\theta$，即知

$$\tan \operatorname{Arg} z = \tan\theta = \frac{y}{x},$$

从而

$$\operatorname{Arg} z = \theta = \arg z + 2k\pi \quad (k = 0, \pm 1, \pm 2\cdots),$$

这就给出了 z 的全部辐角．在确定主值 $\arg z$ 时，必须考虑点 z 所在的象限：

$$\underset{(z\neq 0)}{\arg z} = \begin{cases} \arctan\dfrac{y}{x}, & \text{当 } x > 0,\ y \gtreqless 0; \\ \arctan\dfrac{y}{x} + \pi, & \text{当 } x < 0,\ y \geqslant 0; \\ \arctan\dfrac{y}{x} - \pi, & \text{当 } x < 0,\ y < 0; \\ \dfrac{\pi}{2}, & \text{当 } x = 0,\ y > 0; \\ -\dfrac{\pi}{2}, & \text{当 } x = 0,\ y < 0. \end{cases}$$

其中 $-\dfrac{\pi}{2} < \arctan\dfrac{y}{x} < \dfrac{\pi}{2}$.

例 1.1.1　计算 $z = e^{i\pi}$.

解　因为 $e^{i\pi} = \cos\pi + i\sin\pi$，所以 $z = e^{i\pi} = -1$.

例 1.1.2　试将 $z = -1 + i\sqrt{3}$ 化为三角表示式和指数表示式.

解　因为 $x = \operatorname{Re} z = -1$；$y = \operatorname{Im} z = \sqrt{3}$,

所以 $|z| = r = \sqrt{(-1)^2 + (\sqrt{3})^2} = 2$.

设 $\theta = \arg z$，则 $\tan\theta = \dfrac{\sqrt{3}}{-1} = -\sqrt{3}$，

又因为 $z = -1 + \mathrm{i}\sqrt{3}$ 位于第Ⅱ象限，所以 $\theta = \arg z = \dfrac{2\pi}{3}$. 从而有

$$z = -1 + \mathrm{i}\sqrt{3} = 2\left(\cos\frac{2\pi}{3} + \mathrm{i}\sin\frac{2\pi}{3}\right) = 2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{2\pi}{3}}.$$

例 1.1.3 试将 $z_1 = 2\mathrm{i}$、$z_2 = 3$、$z_3 = -1$，$z_4 = -2\mathrm{i}$ 表示成三角表示式和指数表示式.

解 注意到 z_1，z_2，z_3，z_4 是复平面上的特殊点，处于虚轴和实轴上，因此辐角主值可直接求出. 由于 z_1 位于虚轴上，并且在上半复平面，于是 $\theta_1 = \arg z_1 = \dfrac{\pi}{2}$. z_2 在实轴上，并且在右半复平面，因此 $\theta_2 = \arg z_2 = 0$. z_3 在实轴上，并且在左半复平面，因此 $\theta_3 = \arg z_3 = \pi$. z_4 在虚轴上，并且在下半平面，于是 $\theta_4 = \arg z_4 = -\dfrac{\pi}{2}$. 至于复数的模显然为 $r_1 = 2$，$r_2 = 3$，$r_3 = 1$，$r_4 = 2$，故

$$z_1 = 2\left(\cos\frac{\pi}{2} + \mathrm{i}\sin\frac{\pi}{2}\right) = 2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{2}},$$

$$z_2 = 3(\cos 0 + \mathrm{i}\sin 0) = 3\mathrm{e}^{\mathrm{i}0},$$

$$z_3 = 1(\cos\pi + \mathrm{i}\sin\pi) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi},$$

$$z_4 = 2\left[\cos\left(-\frac{\pi}{2}\right) + \mathrm{i}\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)\right] = 2\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\pi}{2}}.$$

§ 1.2 复数的运算

1.2.1 复数的四则运算

复数的加(减)法按实部与实部相加(减)，虚部与虚部相加(减)，即设 $z_1 = x_1 + \mathrm{i}y_1$，$z_2 = x_2 + \mathrm{i}y_2$，则