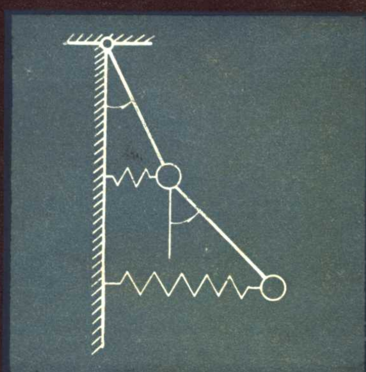
理论力学教学参考丛书

线性振动

西北工业大学 扈英超 编



高等教育出版社

内容提要

本书是《理论力学教学参考丛书》的一册。

《理论力学教学参考丛书》是为了高等学校工科理论力学课程的教学需要而编写的，结合理论力学教材中的某些专题或加深加宽内容，作了进一步的阐述。这套教学参考丛书可作为理论力学教材的补充，供有关专业的大学生、研究生和教师在教学中参考选用。

本书内容包括：一自由度系统的自由振动、一自由度系统的强迫振动、二自由度系统的振动、多自由度系统的振动、多自由度系统的近似方法、弹性体的振动。各章均有习题，书末附线性代数的有关基本知识。

理论力学教学参考丛书

线性振动

西北工业大学　扈英超　编

高等教育出版社出版

新华书店北京发行所发行

人民教育出版社印刷厂印装

*

开本 850×1168 1/32　印张 5.25　字数 125.000

1981年12月第1版　1983年8月第1次印刷

印数 00,001—6,500

书号15010·0387　　定价 0.81 元

前　言

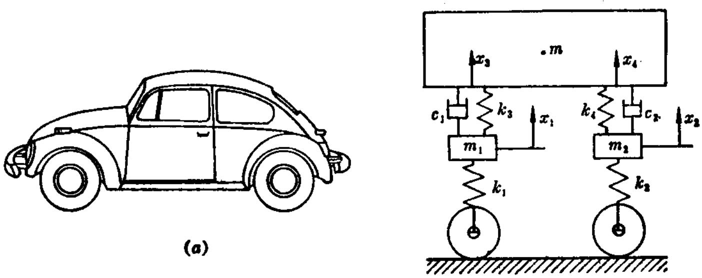
所谓振动，就是某些物理量(或某些物体或某种状态)随时间反复变化的现象。它广泛地存在于物理和工程技术等各个领域中。桥梁、房屋等结构物的振动，车船、飞行器、机器及其零部件的振动等，属于机械振动。在无线电工学中则广泛地利用了电路振荡的规律。此外，在声学、光学、原子物理学等领域中，也普遍地存在着振动的现象和问题。虽然上述各个领域中振动问题所涉及的物理量及其物理本质各不相同，但表示它们运动规律的数学形式及其研究方法却是统一的。本书以机械振动为研究对象，但其研究方法以及所得结论可以推广应用于其他领域的同类问题。

发生振动的机器或结构物等都称为振动系统。实际的振动系统往往很复杂，对它们作精确的分析，常常难以做到。因此，在研究振动问题时，一般都根据系统的特点以及问题的要求将其简化为某种模型。这种简化模型的特性由系统的物理参数确定。

工程问题中的振动系统，在很多情况下，其振幅被限制在很小的范围内，因而位移和速度都是微小量，于是恢复力与变形之间、阻力与相对速度之间都可看为具有线性关系。这种情况下的恢复力与阻尼，分别称为线性恢复力与线性阻尼，后者又称为粘性阻尼。此时描述其运动的方程是线性的，因此称这种系统为线性系统。对于振幅较大或者由于问题的要求不能将其线性化时，则为非线性系统。本书内容只限于线性系统的问题。

实际的振动系统如机器及结构物等都由弹性体组成，但在处理它们的振动问题时，常常将其简化为有限个无弹性的集中质量

和无质量的弹簧的组合，称为弹簧质量系统。例如，在考虑汽车的上下运动时，由于车身以及前桥、后桥自身的变形相对说来较小，可以忽略它们的弹性，将其看为质量为 m、m_1、m_2 的刚性物体，弹簧和车胎则简化为没有质量的弹簧和阻尼器，构成弹簧质量系统，如图 1b。



(a) (b)

图 1

确定一个系统在空间的位置所需独立变量的数目，称为该系统的自由度数。图 1b 中系统的位置，需由 x_1、x_2、x_3、x_4 四个坐标确定，所以是一个四自由度系统。系统的性质由各集中参数即各刚度系数 k、各阻尼系数 c 以及各质量 m 之值确定。故称为集中参数系统。集中参数系统的自由度数是有限的。在数学上，它的运动由常微分方程表示。

由弹性体所组成的系统，其参数是分布的，故称为分布参数系统。由于弹性体可以看为由无穷多个质点所组成，所以分布参数系统具有无穷多个自由度。在数学上，它的运动由偏微分方程表示。

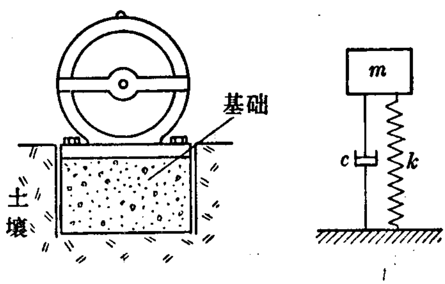
本书主要讨论有限个自由度系统的振动，并对弹性体的振动问题作简单的介绍。

由于编者水平所限，文中定有错误与不当之处，希望读者批评指正。

目　录

第一章　一自由度系统的自由振动

工程中很多振动系统可以简化为一自由度系统。例如，电机固定在混凝土基础上，当其转动时，常常要考虑电机和基础整体的振动(图 1-1a)。这时，可将电机与基础看为一个刚性物体；而支承基础的土壤一方面有弹性，另一方面土壤内部以及土壤与基础之间有摩擦，它们分别起着弹簧和阻尼器的作用。因此，在研究电机与基础的铅直振动时，可简化为图 1-1b 所示的一自由度阻尼弹簧质量系统。



(a)　　(b)

图　1-1

本章以阻尼弹簧质量系统为模型，讨论一自由度系统的自由振动。

§1-1　无阻尼系统的自由振动

设质量为m的物块放在光滑的固定水平面上，弹簧平行于水平面放置(图 1-2)。物块受扰后将沿水平直线运动。设弹性力是线性的，刚度系数为k，阻尼不计。

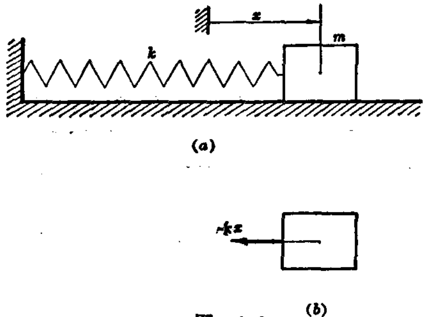


图 1-2

取静平衡位置(即弹簧未变形的位置)为原点。物块在振动中的位置由其坐标 x 确定。物块受到初始扰动后，将在线弹性力 $-kx$ 的作用下作无阻尼自由振动（由于物块的重力与水平面的反力平衡，图中不再画出）。由牛顿定律得

$$m\ddot{x}=-kx,$$

或

$$m\ddot{x}+kx=0. \tag{1-1-1}$$

令

$$p^2=\frac{k}{m}. \tag{1-1-2}$$

得一自由度无阻尼系统自由振动运动方程为

$$\ddot{x}+p^2x=0. \tag{1-1-3}$$

设方程的特解为

$$x=e^{st},$$

将其代入式(1-1-3)，得特征方程及其根分别为

$$s^2+p^2=0,$$

$$s_{1,2}=\pm ip.$$

于是方程(1-1-3)的通解为

$$x=C_1e^{ipt}+C_2e^{-ipt}. \tag{1-1-4}$$

应用欧拉公式，上式可改写为

$$x=C\cos pt+D\sin pt. \tag{1-1-5}$$

C、D 为任意积分常数，其值由运动的初始条件确定。设 $t=0$ 时，

$$x=x_0,\quad \dot{x}=\dot{x}_0. \tag{1-1-6}$$

将式(1-1-6)代入式(1-1-5)，得 $C=x_0$, $D=\dfrac{\dot{x}_0}{p}$。因此

$$x=x_0\cos pt+\frac{\dot{x}_0}{p}\sin pt. \tag{1-1-7}$$

经三角函数变换，(1-1-7)式又可表示为

$$x=A\sin(pt+\alpha). \tag{1-1-8}$$

式中

$$A=\sqrt{x_0^2+\left(\frac{\dot{x}_0}{p}\right)^2},\quad \alpha=\mathrm{tg}^{-1}\frac{px_0}{\dot{x}_0}. \tag{1-1-9}$$

(1-1-8)式表明，无阻尼的自由振动是以平衡位置为中心的谐振动，其振幅 A 和初位相角 α 与系统的参数和初始条件有关。

系统振动的周期

$$T=\frac{2\pi}{p}=2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}\ 秒(\mathrm{s}). \tag{1-1-10}$$

系统振动的频率

$$f=\frac{1}{T}=\frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k}{m}}\ 秒^{-1}(\mathrm{s}^{-1})或赫兹(\mathrm{Hz}). \tag{1-1-11}$$

而

$$p=2\pi f=\frac{2\pi}{T}=\sqrt{\frac{k}{m}}\ 弧度/秒(\mathrm{rad/s}). \tag{1-1-12}$$

p 称为系统振动的圆频率。以上三者只决定于系统的参数，而与运动的初始条件无关。所以，T、f、p 分别称为系统的固有周期、固有频率和固有圆频率(圆频率常简称为频率)。

式(1-1-5)和(1-1-8)中所表示的系统运动规律 $C\cos pt$、$D\sin pt$ 与 $A\sin(pt+\alpha)$ 及其间的关系，可以用大小分别为 OC'、OD' 与 OA'、角速度均为 p 的旋转矢量在 x 轴上的投影表示，如图 1-3。

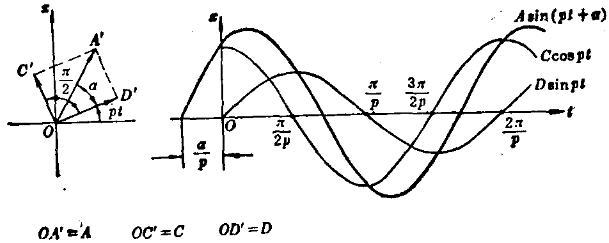


图 1-3

例 1-1 物块重为 G，用刚度系数为 k 的弹簧铅直悬挂，如图 1-4 所示。求物块自由振动的运动方程及固有圆频率。

解： 物块处于静平衡位置时弹簧的静伸长

$$\lambda_s=\frac{G}{k}. \qquad (a)$$

以静平衡位置为原点，物块的运动方程为

$$m\ddot{x}=G-k(\lambda_s+x).$$

将(a)式代入上式，得

$$m\ddot{x}+kx=0. \qquad (b)$$

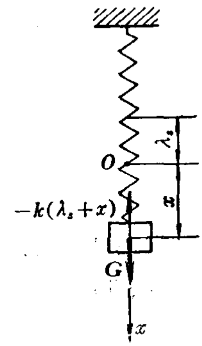


图 1-4

(b)式与(1-1-1)式完全相同。所以，铅直悬挂的物块也将以静平衡位置为中心作谐振动，其运动规律与式(1-1-8)相同。固有圆频率

$$p=\sqrt{\frac{k}{m}}=\sqrt{\frac{kg}{G}}=\sqrt{\frac{g}{\lambda_s}}. \qquad (1\text{-}1\text{-}13)$$

例 1-2 等截面简支梁的中点放有质量为 m 的物块(图1-5)。设梁的抗弯刚度为EI，梁重不计。求物块振动的固有频率。

解： 由材料力学知，在物块重力作用下，梁中点的静挠度为

$$\lambda_s=\frac{mgl^3}{48EI}.$$

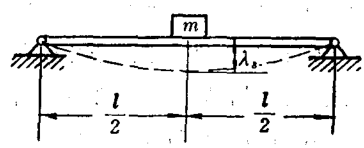


图 1-5

根据式(1-1-13)，固有频率

$$p=\sqrt{\frac{g}{\lambda_s}}=\sqrt{\frac{48EI}{ml^3}}.$$

例 1-3　铅直弹性轴的 A 端固定，另一端 O 处装有水平圆盘，如图 1-6。

轴的扭转刚度系数为 k。设轴重不计，求圆盘摆动的固有圆频率。

解：设 θ 为圆盘偏离平衡位置的扭转角度，则恢复力矩 $M_z=-k\theta$。圆盘摆动的运动方程为

$$I_z\ddot{\theta}+k\theta=0.$$

该式与(1-1-1)式形式相同，故圆盘摆动的固有圆频率为

$$p=\sqrt{\frac{k}{I_z}}.$$

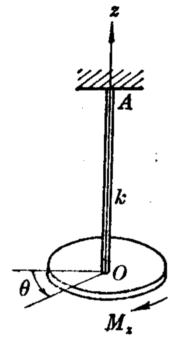


图 1-6

§1-2 能 量 法

系统的动能 T 与势能 U 之和，称为系统的机械能。在不计阻尼的条件下，系统没有能量损失，机械能将守恒。即

$$T+U=\text{常量}, \tag{1-2-1}$$

因而

$$\frac{d}{dt}(T+U)=0. \tag{1-2-2}$$

应用以上二式也可以求得系统的固有频率和运动方程。

设图 1-2 中物块按 $x=A\sin(pt+\alpha)$ 的规律作谐振动。取平衡位置为势能零点，则物块振动到达任意位置 x 时，其动能与势能将分别为

$$T=\frac{m}{2}\dot{x}^2,\quad U=\frac{k}{2}x^2.$$

当物块经过平衡位置时，$U=0$，T 达到最大值 $T_{\max}=\frac{m}{2}(Ap)^2$；当达到最大位移即 $x=\pm A$ 时，$T=0$，U 达到最大值 $U_{\max}=\frac{k}{2}A^2$。根据(1-2-1)式，可得

$$U_{\max}=T_{\max}, \tag{1-2-3}$$

即

$$\frac{k}{2}A^2=\frac{m}{2}(Ap)^2,$$

所以 $$p=\sqrt{\frac{k}{m}}.$$

该式与(1-1-12)式完全相同。

例 1-4 图 1-7 为一测振仪简图。物块质量为 m，下面由刚度系数为 k_1 的弹簧支持。上面连于直角杠杆 AOB 的 A 点。B 点用刚度系数为 k_2 的水平弹簧连于仪器壳体上。C 为笔尖，D 为滚筒，上面裹以纸带。仪器工作时笔尖 C 可在纸带上描出振动曲线。设杠杆对其转轴 O 的转动惯量为 I_O，求系统的固有圆频率。

解：这是一自由度系统。设杠杆作微振动的摆角 $\theta=\Theta\sin pt$，则物块(或 A 点)和 B 点的振动位移和速度分别为

$$\left.\begin{aligned}&x_1=a\theta,\ x_2=b\theta;\\&\dot{x}_1=a\dot{\theta}=a\Theta p\cos pt,\ \dot{x}_2=b\dot{\theta}=b\Theta p\cos pt.\end{aligned}\right\}\tag{a}$$

系统的动能 T 与势能 U 为

$$\left.\begin{aligned}T&=\frac{m}{2}\dot{x}_1^2+\frac{I_O}{2}\dot{\theta}^2=\frac{\dot{\theta}^2}{2}(ma^2+I_O),\\U&=\frac{k_1}{2}x_1^2+\frac{k_2}{2}x_2^2=\frac{\theta^2}{2}(k_1a^2+k_2b^2).\end{aligned}\right\}\tag{b}$$

因此
$$\left.\begin{aligned}T_{\max}&=\frac{p^2\Theta^2}{2}(ma^2+I_O),\\U_{\max}&=\frac{\Theta^2}{2}(k_1a^2+k_2b^2).\end{aligned}\right\}\tag{c}$$

将(c)式代入(1-2-3)式，得系统的固有圆频率

$$p=\sqrt{\frac{k_1a^2+k_2b^2}{ma^2+I_O}}.\tag{d}$$

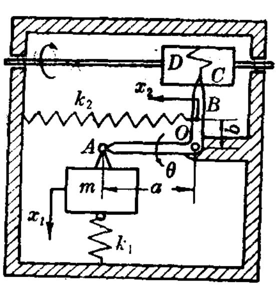


图 1-7

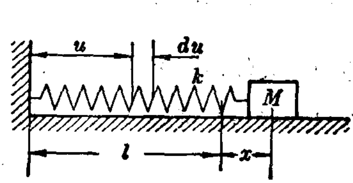


图 1-8

例 1-5 求螺旋弹簧的等效质量。

解: 由于弹簧总是有质量的,所以图 1-2 中所表示的实质上是分布参数系统。但在假设弹簧的质量可以略去不计时，可将其简化为一自由度系统。这在弹簧的质量m与物块的质量M相比很小时，求得的p值是足够准确的。如若不符合此假定,将导致较大的误差。下面说明应用能量法计入弹簧分布质量影响的一种近似方法,称为瑞利法;由它可以得到比较准确的结果。但要注意,用此法时需给系统以适当的假设振型。

设弹簧的长度为l(图 1-8),单位长度的质量为ρ,弹簧总质量$m=\rho l$与物块的质量M相比是比较小的。因此可假设系统振动的型式与不计m时的静变形相同,即弹簧上各点的位移与其到固定点的距离成正比。物块在振动中位移为x时，弹簧上距固定点为u处的位移为$\frac{x}{l}u$,因此弹簧的动能

$$T_s=\frac{1}{2}\int_0^l \rho du\left(\frac{\dot{x}}{l}u\right)^2=\frac{\rho\dot{x}^2}{2l^2}\int_0^l u^2du=\frac{m}{6}\dot{x}^2. \tag{a}$$

系统的最大动能

$$T_{\max}=\frac{M}{2}\dot{x}_{\max}^2+\frac{m}{6}\dot{x}_{\max}^2=\frac{\dot{x}^2_{\max}}{2}\left(M+\frac{m}{3}\right)=\frac{A^2p^2}{2}\left(M+\frac{m}{3}\right). \tag{b}$$

由于系统的势能只取决于弹簧的变形,所以系统的最大势能仍为

$$U_{\max}=\frac{k}{2}x_{\max}^2=\frac{k}{2}A^2. \tag{c}$$

将(b)、(c)式代入(1-2-3)式,得

$$\frac{k}{2}A^2=\frac{A^2p^2}{2}\left(M+\frac{m}{3}\right),$$

故

$$p=\sqrt{\frac{k}{M+m/3}}. \tag{1-2-4}$$

将上式与(1-1-12)式相比可见,用能量法计入弹簧质量所求得的固有圆频率,相当于在物块的质量上附加弹簧质量的$\frac{1}{3}$，所以$\frac{m}{3}$称为弹簧的等效质量。

实践证明,以静变形为假设振型,所得结果是比较准确的。例如，$m=\frac{M}{2}$时,所得结果对准确值之误差约为 0.5%。$m=M$时,误差约为 0.75%。即使$m=2M$,误差也不过 3%。

下面通过例题说明应用(1-2-2)式可以求得系统的运动方程。

例 1-6 匀质圆柱质量为 m，半径为 r，在半径为 R 的圆柱面内滚而不滑(图 1-9)。求圆柱体微幅摆动的运动方程。

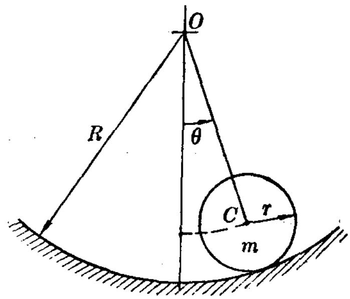


图 1-9

解: 取 θ 角如图。$\theta=0$ 为圆柱体的静平衡位置。圆柱体滚动时，其动能

$$T=\frac{m}{2}v_C^2+\frac{I_C}{2}\omega^2.$$

式中，v_C 为圆柱体质心的速度，ω 为圆柱体的角速度，而 $I_C=\frac{m}{2}r^2$ 为其对质心轴之转动惯量。由于

$$v_C=(R-r)\dot{\theta}=r\omega,$$

所以

$$T=\frac{m}{2}(R-r)^2\dot{\theta}^2+\frac{I_C}{2}\left(\frac{R-r}{r}\right)^2\dot{\theta}^2=\frac{3m}{4}(R-r)^2\dot{\theta}^2.$$

以平衡位置为势能零点，圆柱体的势能为

$$U=mg(R-r)(1-\cos\theta).$$

按(1-2-2)式，有

$$\frac{d}{dt}\left[\frac{3m}{4}(R-r)^2\dot{\theta}^2+mg(R-r)(1-\cos\theta)\right]=0,$$

得
$$\frac{3}{2}(R-r)^2\ddot{\theta}+g(R-r)\sin\theta=0.$$

对微幅摆动情况，$\sin\theta\approx\theta$，运动方程为

$$\ddot{\theta}+\frac{2g}{3(R-r)}\theta=0.$$

其圆频率

$$p=\sqrt{\frac{2g}{3(R-r)}}.$$

§1-3 阻尼系统的自由振动

系统作无阻尼自由振动时，由于机械能没有损失，所以一经扰动后将持续作等幅振动。但实际上阻尼总是存在的，它不断地消耗系统的能量，使运动逐渐减弱，直至振动完全消失。

阻尼可能有不同的来源，如振动物体受到的空气或液体的阻力，滑动表面间的摩擦以及材料的内阻等。不同来源产生的阻尼力其变化规律也不相同。本书以后的讨论一般都限于粘性阻尼，其阻力

$$R=cv,$$

c 称为粘性阻尼系数，v 为物体的运动速度。

设图 1-10 中的物块除受线性恢复力作用外，还受到粘性阻尼作用，阻尼系数为 c。由牛顿定律有

$$m\ddot{x}+c\dot{x}+kx=0. \tag{1-3-1}$$

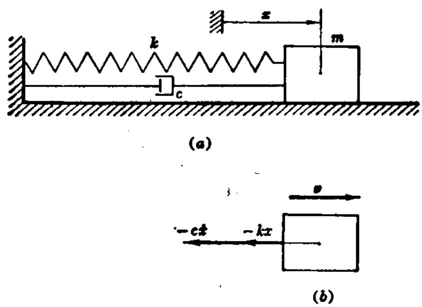


图 1-10

令

$$\frac{k}{m}=p^2,\ \frac{c}{m}=2\zeta p, \tag{1-3-2}$$

得运动方程

$$\ddot{x}+2\zeta p\dot{x}+p^2x=0. \tag{1-3-3}$$

设方程的特解为

$$x=e^{st}.$$

将其代入(1-3-3)式，得特征方程及其根分别为

$$s^2+2\zeta ps+p^2=0,$$

$$s_{1,2}=(-\zeta\pm\sqrt{\zeta^2-1})p. \tag{1-3-4}$$

于是方程(1-3-3)的通解为

$$x=C_1e^{s_1t}+C_2e^{s_2t}. \tag{1-3-5}$$

或

$$x=C_1e^{(-\zeta+\sqrt{\zeta^2-1})pt}+C_2e^{(-\zeta-\sqrt{\zeta^2-1})pt}. \tag{1-3-6}$$

式中，C_1、C_2 由运动的初始条件确定。

对于 $\zeta \gtreqless 1$ 这三种不同情况，(1-3-6)式所表示的运动性质各不相同。下面分别进行讨论。

1. $\zeta>1$，大阻尼情况

当 $\zeta>1$ 时，特征方程的根 s_1 与 s_2 均为负实数。式(1-3-6)表明，x 将随时间按指数规律减小，并趋于平衡位置。

2. $\zeta=1$，临界阻尼情况

当 $\zeta=1$ 时，特征方程有重根 $s_1=s_2=-p$，故方程(1-3-3)的通解为

$$x=(C+Dt)e^{-pt}. \tag{1-3-7}$$

在以上两种条件下，系统受到初始扰动离开平衡位置后，将逐渐回到平衡位置，运动一般不是往复性的①。在临界阻尼情况，对不同的初始条件，其运动曲线如图 1-11。

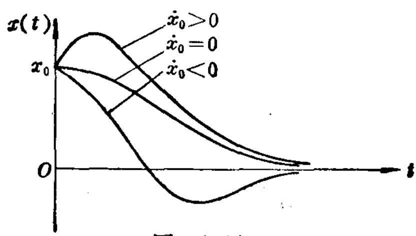


图 1-11

3. $\zeta<1$，小阻尼情况

$\zeta<1$ 时，特征方程的根 s_1、s_2 为共轭复数

$$s_{1,2}=(-\zeta\pm i\sqrt{1-\zeta^2})p. \tag{1-3-8}$$

---

① 在一定初始条件下也可能越过平衡位置一次，然后再逐渐回到平衡位置。

应用欧拉公式,得方程(1-3-3)的解为

$$x=e^{-\zeta pt}(C\cos qt+D\sin qt). \tag{1-3-9}$$

式中,$q=\sqrt{1-\zeta^2}p$, C、D 由运动的初始条件确定。设 $t=0$ 时,$x=x_0, \dot{x}=\dot{x}_0$,则

$$C=x_0, \qquad D=\frac{\dot{x}_0+\zeta p x_0}{q}. \tag{1-3-10}$$

另外,式(1-3-9)又可表示为

$$x=Ae^{-\zeta pt}\sin(qt+\alpha). \tag{1-3-11}$$

式中

$$\left.\begin{aligned} A&=\sqrt{x_0^2+\left(\frac{\dot{x}_0+\zeta p x_0}{q}\right)^2},\\ \alpha&=\mathrm{tg}^{-1}\frac{q x_0}{\dot{x}_0+\zeta p x_0}. \end{aligned}\right\} \tag{1-3-12}$$

其运动曲线如图 1-12。由于系统运动的幅度是逐渐减弱的,所以称为衰减振动。

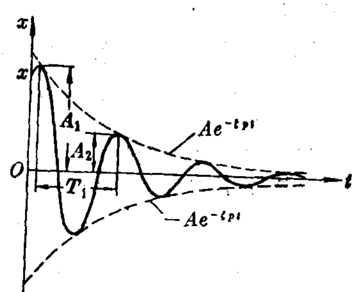


图 1-12

系统的衰减振动虽不是周期性运动,但(1-3-11)式中的因子 $\sin(qt+\alpha)$ 表明物体仍周期地通过平衡位置 O 向两侧偏离,因此习惯上将

$$q=\sqrt{1-\zeta^2}p,$$

$$T_1=\frac{2\pi}{q}=\frac{2\pi}{\sqrt{1-\zeta^2}p}=\frac{T}{\sqrt{1-\zeta^2}}. \tag{1-3-13}$$

分别称为衰减振动的圆频率和周期。将上式与无阻尼情况相比,可见阻尼使频率降低、周期加长。ζ 值越小,影响将越小。例如,当 $\zeta=0.2$ 时,$q=\sqrt{1-0.2^2}p=0.97980p, T_1=\dfrac{T}{\sqrt{1-0.2^2}}=1.02062T$;