WEIJIFENTIXINGFENXI

微积分题型分析

刘光旭 编

南开大学出版社

微积分题型分析

刘光旭　编

南开大学出版社

微积分题型分析

刘光旭 编

南开大学出版社出版
新华书店天津发行所发行
天津新华印刷四厂印刷

1985年12月第1版 1985年12月第1次印刷
开本：787×1098 1/32 印张：6.5 字数：137千

统一书号：13301·23 定价：1.20 元

前　　言

作者应国家统计局和中央电视台联合邀请，于一九八五年八月至一九八六年一月，在中央电视台作经济类高等数学的教学讲座。为配合教学，现根据近年来财经、统计、管理、金融等专业高等数学的教学和考试大纲的要求，编写了这本自学参考书。本书在题型选择上注意到突出重点和加大覆盖面。希望通过典型例题的讲解和分析，使读者加深对微积分基本理论的理解，掌握各种题型的处理方法，提高解题能力。

本书可供准备通过经济类高等数学考试的学生（包括广播电视大学、统计干部电视函授学院、职工高等院校等各类成人高等学校的学生）使用，也可作为有关院校的参考教材。

南开大学王家骅同志对本书初稿进行了详细认真的审阅，在此谨致谢意。

由于水平所限，加之时间仓促，本书不妥之处在所难免，敬希读者不吝指教。

作　者

一九八五年秋于南开大学

目　　录

第一章　极限与连续

A组题

类型1　填空

（1）　$\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^{x}=($　　　$)$。

答：（0）．

（2）　$\lim\limits_{x\to-\infty}2^{x}=($　　$)$．

答：（0）．

（3）　如果　$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$，而且$A>0$，则总存在一个正数$\delta$，使当（　　　　　　）时，$f(x)>0$。

答：$(0<|x-x_0|<\delta)$．

（4）　如果　$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$，而且　$f(x)\geqslant0$，则A（　　）．

答：$(\geqslant0)$．

（5）　$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$　成立的充分必要条件是其左，

右极限（　　　　　　）.

答：（存在且 $\lim\limits_{x\to x_0^+}(x)=\lim\limits_{x\to x_0^-}f(x)=A$）.

（6）　以零为极限的变量称为（　　　　　　　　）.

答：（无穷小量）.

（7）　变量y以A为极限的必要且充分条件是：变量y可以表示为（　　　　　　　　　　）的和.

答：（A与一个无穷小量的和）.

（8）　如果变量α是无穷小量，变量y是有界变量，则变量αy是（　　　　　　）.

答：（无穷小量）.

（9）　设α，β为两个无穷小量，如果 $\lim\dfrac{\beta}{\alpha}=0$，则称是（　　　　　　）.

答：（比α较高阶的无穷小量）.

如果　$\lim\dfrac{\beta}{\alpha}=\infty$，则称$\beta$是（　　　　　　　　）.

答：（比α较低阶的无穷小量）.

如果　$\lim\dfrac{\beta}{\alpha}=C\neq 0$，（$C$为常数），则称$\beta$（　　　　）.

答：（与α是同阶的无穷小量）.

如果　$\lim\dfrac{\beta}{\alpha}=1$，则称（　　　　　　　）.

答：（α与β是等价的无穷小量）.

（10） 如果在某个变化过程中，三个变量x，y，z总有关系$y\leq x\leq z$，且（ ），则（ ）。

答：（$\lim y=\lim z=A$），（$\lim x=A$）。

（11） 如果数列 $y_n=f(n)$ 是（ ），则 $\lim\limits_{n\to\infty} f(n)$ 一定存在。

答：（单调有界的）。

（12） $$\lim_{(\quad)}\frac{\sin x}{x}=1.$$

答：（$x\to 0$）。

（13） $$\lim_{(\quad)}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=e.$$

答：（$x\to\infty$）。

$$\lim_{(\quad)}(1+\alpha)^{\frac{1}{\alpha}}=e.$$

答：（$\alpha\to 0$）。

$$\lim_{x\to\infty}A_0\left(1+\frac{r}{x}\right)^{tx}=(\qquad).$$

答：（A_0e^{rt}）。

（14） 函数$f(x)$在点$x=x_0$连续，则$f(x)$在$x=x_0$处必满足下述三个条件：（i）（ ）；（ii）（ ）；（iii）（ ）。

答：(i)（函数在x_0有定义，即$f(x_0)$有确定值）；

(ii) （$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$存在，即 $\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x)=\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)$）；

(iii) （$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=f(x_0)$）。

(15) 如果$f(x)$在点x_0处有下列三种情形之一，则点x_0为$f(x)$的间断点：

(i)（ ）；(ii)（ ）；(iii)（ ）。

答：(i)（$f(x)$在点x_0处没有定义）；

(ii) （$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$不存在）；(iii)（$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)\neq f(x_0)$）。

(16) 如果$y=f(x)$在（ ）上连续，则$f(x)$在（ ）上有界。

答：（闭区间$[a,b]$），（闭区间$[a,b]$）。

(17) 如果$f(x)$在（ ）上连续，则$f(x)$在这个区间上有（ ）与（ ）。

答：（闭区间），（最大值），（最小值）。

(18) 如果$f(x)$在闭区间$[a,b]$上连续，m和M分别为$f(x)$在$[a,b]$上的最小值与最大值，则介值定理说：（ ）。

答：（对介于m与M之间的任一实数C（即$m<C<M$），至少存在一点$\xi\in(a,b)$，使得$f(\xi)=C$）。

(19) 如果$f(x)$在闭区间$[a,b]$上连续，且$f(a)$与$f(b)$（ ）号，则（ ）。

答：（异），（至少存在一点$\xi\in(a,b)$，

使得$f(\xi)=0$）。

类型2　选择

（1）$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{|x|}$ 等于（　　）。　A：1；

B：-1；　C：不存在。

答：（C）。

（2）$\lim\limits_{x\to 0} x\sin\dfrac{1}{x}=$（　　）。　A：1；

B：0；　C：不存在。

答：（B）。

（3）设$f(x)=\begin{cases} x+1 & x\neq 1, \\ 1 & x=1. \end{cases}$ 则 $f(x)$在$x=1$处

是（　　）。A：连续；　B：间断。

答：（B）。

（4）$y=|x|$，$-1\leq x\leq 1$，在$x=0$处是（　　）。

A：连续；　B：间断。

答：（A）。

（5）设 $f(x)=\begin{cases} x-1, & x<0 \\ 0, & x=0 \\ x+1, & x>0, \end{cases}$ 则 $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$

=（　　）。A：-1；　B：0；　C：1；　D：不存在。

答：(D)。

(6) $\lim\limits_{x\to+\infty}\log_a x=$ (　　)，其中 $0<a<1$。

A：$+\infty$；　B：0；　C：$-\infty$。

答：(C)。

(7) $\lim\limits_{x\to0^+}\lg x=$ (　　)。　A：0；

B：$-\infty$；　C：$+\infty$。

答：(B)。

(8) $\lim\limits_{x\to0}x\cdot\sin\frac{1}{x}$ 中的 $\sin\frac{1}{x}$ 是 (　　)。

A：无穷小量；B：无穷大量；C：有界变量。

答：(C)。

(9) 设 $f(x)=\begin{cases}4^x, & -2<x<0,\\ x^2-1, & 0\le x<1,\\ x^2, & 1\le x\le4,\end{cases}$ 在

$x=0$ 处 (　　)。

A：有极限；　B：连续；　C：无极限。

答：(C)。

(10) 上题中 $f(1)=$ (　　)。

A：4；　B：0；　C：1。

答：(C)。

B组题

题型一　求极限

类型1　利用连续性求极限

(1)　求 $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{2x^2+x-5}{3x+1}$

解　因为

$$\lim_{x\to 2}(2x^2+x-5)=2(\lim_{x\to 2}x)^2+\lim_{x\to 2}x-\lim_{x\to 2}5$$

$$=2\times 2^2+2-5=5,$$

$$\lim_{x\to 2}(3x+1)=7\neq 0,$$

所以 $$\lim_{x\to 2}\frac{2x^2+x-5}{3x+1}=\frac{\lim\limits_{x\to 2}(2x^2+x-5)}{\lim\limits_{x\to 2}(3x+1)}=\frac{5}{7}.$$

(2)　求 $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{5x}{x^2-4}$.

解　因为分母的极限

$$\lim_{x\to 2}(x^2-4)=0,$$

所以不能直接利用题（1）的方法求此分式的极限. 但分子的极限

$$\lim_{x\to 2}5x=10\neq 0,$$

所以我们可以求出

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^2-4}{5x}=\frac{\lim\limits_{x\to 2}(x^2-4)}{\lim\limits_{x\to 2}5x}$$

$$=\frac{0}{10}=0.$$

这就是说，当$x\to 2$时，$\dfrac{x^2-4}{5x}$为无穷小量．因此，原式$\dfrac{5x}{x^2-4}$为无穷大量．所以

$$\lim_{x\to 2}\frac{5x}{x^2-4}=\infty.$$

(3) 求 $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{x^2+\ln(2-x)}}{4\operatorname{arc\,tg}x}$

解

$$\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt{x^2+\ln(2-x)}}{4\operatorname{arc\,tg}x}=\frac{\sqrt{1^2+\ln(2-1)}}{4\operatorname{arc\,tg}1}$$

$$=\frac{1}{4\cdot\frac{\pi}{4}}=\frac{1}{\pi}.$$

类型2　约简分式求极限法（即$\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{P(x)}{Q(x)}$为“$\dfrac{0}{0}$”型不定式时，先设法消去“不定因子”，然后再求极限）．

(1) 求 $\lim\limits_{x \to -2} \dfrac{x^2-4}{x^3+8}$.

解

$$\lim_{x \to -2} \frac{x^2-4}{x^3+8} = \lim_{x \to -2} \frac{(x+2)(x-2)}{(x+2)(x^2-2x+4)}$$

(当$x \to -2$时，$x \neq -2$，$\therefore x+2 \neq 0$，$\therefore$ 可约分)

$$= \lim_{x \to -2} \frac{x-2}{x^2-2x+4} = -\frac{1}{3}$$

(注："$\dfrac{0}{0}$" 也可用罗彼塔法则求极限)

(2) 求 $\lim\limits_{x \to -2} \dfrac{x^3+3x^2+2x}{x^2-x-6}$.

解 $$\lim_{x \to -2} \frac{x^3+3x^2+2x}{x^2-x-6} = \lim_{x \to -2} \frac{x(x+1)(x+2)}{(x+2)(x-3)}$$

$$= \lim_{x \to -2} \frac{x(x+1)}{x-3} = -\frac{2}{5}.$$

(3) 求 $\lim\limits_{u \to -2} \dfrac{u^3+4u^2+4u}{(u+2)(u+3)}$.

解 $$\lim_{u \to -2} \frac{u^3+4u^2+4u}{(u+2)(u+3)} = \lim_{u \to -2} \frac{u(u+2)^2}{(u+2)(u+3)}$$

$$=\lim_{u\to -2}\frac{u(u+2)}{u+3}=\frac{-2(-2+2)}{-2+3}=0.$$

(4) 求 $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^n-1}{x-1}$ (n为正整数).

解 $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^n-1}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1}(x^{n-1}+x^{n-2}+\cdots+x+1)$

$=n$.

(5) 求极限 $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^m-1}{x^n-1}$ (m, n是正整数).

解 原式$=\lim\limits_{x\to 1}\frac{(x-1)(x^{m-1}+x^{m-2}+\cdots+1)}{(x-1)(x^{n-1}+x^{n-2}+\cdots+1)}$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{x^{m-1}+x^{m-2}+\cdots+1}{x^{n-1}+x^{n-2}+\cdots+1}$$

$$=\frac{1+1+\cdots\cdots+1(m\text{项})}{1+1+\cdots\cdots+1(n\text{项})}=\frac{m}{n}.$$

(6) 求 $\lim\limits_{x\to 1}\left[\frac{1}{1-x}-\frac{3}{1-x^3}\right]$.

解 $\lim\limits_{x\to 1}\left[\frac{1}{1-x}-\frac{3}{1-x^3}\right]=\lim\limits_{x\to 1}\frac{1+x+x^2-3}{1-x^3}$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)(x+2)}{(1-x)(1+x+x^2)}=\lim_{x\to 1}\left(-\frac{x+2}{1+x+x^2}\right)$$

$= -1$.

类型3 除以 n 或x的幂求极限

(1) 求 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2n^2-2n+3}{3n^2+1}$.

解 将分子分母同除以n^2,得

$$\lim_{n\to\infty}\frac{2n^2-2n+3}{3n^2+1}=\lim_{n\to\infty}\frac{2-\dfrac{2}{n}+\dfrac{3}{n^2}}{3+\dfrac{1}{n^2}}$$

$$=\frac{2}{3}.$$

(2) 求 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{4x^3+2x^2-1}{3x^4+1}$.

解 将分子分母同除以x^4,得

$$\lim_{x\to\infty}\frac{4x^3+2x^2-1}{3x^4+1}=\lim_{x\to\infty}\frac{\dfrac{4}{x}+\dfrac{2}{x^2}-\dfrac{1}{x^4}}{3+\dfrac{1}{x^4}}$$

$$=\frac{0}{3}=0.$$

(3) 求 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt[3]{n^2+n}}{n+2}$.

解 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt[3]{n^2+n}}{n+2}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt[3]{\dfrac{1}{n}+\dfrac{1}{n^2}}}{1+\dfrac{2}{n}}=0$。

(4) 求 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt{n^2+1}+\sqrt{n}}{\sqrt[4]{n^3+n^4}-n}$（$n$是正整数）。

解 将分子、分母同除以n，于是

$$\text{原式}=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{1+\dfrac{1}{n^2}}+\sqrt{\dfrac{1}{n}}}{\sqrt[4]{\dfrac{1}{n}+\dfrac{1}{n^4}}-1}=\frac{1}{-1}=-1。$$

类型4 有理化方法求极限

(1) 求 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x-\sqrt{x}}{\sqrt{x}}$。

解 原式$=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{(x-\sqrt{x})\cdot\sqrt{x}}{\sqrt{x}\cdot\sqrt{x}}$

$=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x\sqrt{x}-x}{x}=\lim\limits_{x\to0}(\sqrt{x}-1)=-1$。

(2) 求 $\lim\limits_{\Delta x\to0}\dfrac{\sqrt{x+\Delta x}-\sqrt{x}}{\Delta x}$。

解 $\lim\limits_{\Delta x\to0}\dfrac{\sqrt{x+\Delta x}-\sqrt{x}}{\Delta x}$