代数拓扑学

E. H. 斯潘尼尔 著　　左再思 译

上海科学技术出版社

DAISHU TUOPU XUE

代 数 拓 扑 学

E. H. 斯潘尼尔 著

左再思 译

廖山涛 校

上海科学技术出版社

内容提要

本书是 E. H. Spanier 著《代数拓扑学》一书中的第一部分——前三章．是代数拓扑学的入门，也是代数拓扑学的重要基础．主要内容包括：同伦和基本群；覆叠空间和纤维化；多面体．书中例题、习题丰富．叙述简洁流畅，逻辑严谨．

本书可作为大学数学系中有关专业的高年级学生及研究生的教材和参考书。

ALGEBRAIC TOPOLOGY

Edwin H. Spanier

McGraw-Hill Book Company

代数拓扑学

E. H. 斯潘尼尔 著

左再思 译

廖山涛 校

责任编辑 赵序明

上海科学技术出版社出版

（上海瑞金二路 450 号）

新华书店上海发行所发行 商务印书馆上海印刷厂印刷

开本 850×1156 1/32 印张 6.125 字数 161,000

1987 年 8 月第 1 版 1987 年 8 月第 1 次印刷

印数 1— 5,300

统一书号：13119·1427 定价：1.80 元

译　　序

Edwin H. Spanier 的 Algebraic Topology 一书，在 1966 年由 McGraw-Hill 出版，至今已有二十年了．二十年来，我们看到国内外不少代数拓扑的专著和教程问世，各有其特点．但是，这本书尽管不可能包括这二十年新出现的成果，却仍未减其光彩．作者以其对代数拓扑的广泛研究和深刻理解，以其收集材料之丰富，叙述之简洁流畅，逻辑之严谨，取舍之得当，使这本书至今仍是代数拓扑学的不可多得的好教材和参考书．到了八十年代，Springer-Verlag 还再版此书，也从某个侧面说明了这一点．

1975 年，又一本不可多得的好书问世了，即 Robert M. Switzer 的 Algebraic Topology-Homotopy and Homology (Springer-Verlag 出版)．作者在序言中写道："近几年来，基础代数拓扑的一系列优秀的教科书出版了，其中最值得注意的是 Spanier 的书，我主张将其作为本书的姐妹篇．" Switzer 的书写成于 1973 年，自然比本书多了不少近代内容；而且不言而喻，会汲取本书的长处及弥补一些不足之处．孙以丰教授、吴振德教授先后选用该书作为研究生的教材，在吉林大学和河北师范大学使用．译者亦步二位师长之后尘．通过实践，一方面确实感到是一本很好的书；另一方面又感到作者为了尽量多地收入近代的结果而不得不将叙述浓缩，抽象．不仅增加了教学的难度，也删去了不少精彩的内容．例如关于覆叠空间，就是一带而过，让需要的读者去查阅 Spanier 的书．因此，这两本书各有长处，其作用不能互相取代．这就是时至今日，出版本书仍有必要的理由之一．

Spanier 曾问译者：那么，为什么不同时也将 Switzer 的书译成中文呢？对此的解释是：到了可以自学该书的程度，读两种文字

的效果已无甚差别了.

译者在1975年初次见到本书，即为其深深吸引住. 同时，便产生了将其译成中文，介绍给国内同行和青年的强烈愿望. 北京大学教授江泽涵先生、廖山涛先生对此给以热情的鼓励和支持. 后经暨南大学梁文骐先生的介绍，被上海科学技术出版社列入出版计划. 廖山涛先生用了大量时间仔细阅读了全书的译稿，对于翻译错误及不妥之处逐字进行了细致的修改和校正. 江泽涵先生对于译文的出版始终给以亲切的关注，多次对译者提出指导性的意见. 北京大学教授姜伯驹先生及参加1982年烟台会议的各位老师和同行也给以关心和鼓励. 出版社的编辑则对译稿进行了认真的加工和文字校正.

但是，后来由于某些客观原因，经出版社与译者商定，先印出这个大体上相当于一个学期教学量的前三章的"节译本"，以应教学之急需. 至于全文的出版，以后根据情况再定.

译者在此向江泽涵先生、廖山涛先生表示衷心的敬意和感谢，同时感谢姜伯驹先生、梁文骐先生以及各位关心过此书的同行和同事，感谢编辑同志的辛勤劳动. 并借此机会，遥向大洋彼岸的E. H. Spanier教授致意，感谢他对译者的鼓励及寄来原书的支持. 衷心希望全书早日问世.

* * *

原书共分为九章，它们的标题是：1. 同伦和基本群；2. 覆叠空间和纤维化；3. 多面体；4. 同调；5. 乘积；6. 一般上同调论和对偶性；7. 同伦论；8. 阻碍理论；9. 谱叙列和球的同伦群.

作者在前言中指出：这九章可分成三部分，每部分三章，分别介绍基本群，同调论和同伦论的基础内容. 因此，如把全书按这三部分译为三个分册，则由前三章组成的这个节译本实质上便是第一分册.

另一方面，这三部分彼此又是有机地联系的. 前面为后面作了大量的准备. 这些准备本身也是代数拓扑学的重要基础内容. 因此，用"基本群"一个词汇概括这部分并不完全. 而说成"代数拓

扑入门”可能更恰当些.

第1章的八个小标题标明本章向读者介绍的概念. 它们(或许可以不包括基本广群)可说是学习现代代数拓扑学的最基本的概念. 全章包含了入门的主要知识，是每个学习代数拓扑学或邻近学科的学习者所必不可少的.

第2章系统而全面地叙述覆叠空间的理论，以及纤维丛，纤维化的入门知识. 本章是这部分最精彩的内容. 通过学习不仅可以掌握所介绍的概念和结论，而且可以学到不少代数拓扑学中论证的典型方法.

第3章介绍多面体和单纯复形的理论. 虽然原书前言说是解决基本群的计算问题，但事实上也为同调论作了大量准备. 由于单纯逼近定理已被包含在本章中，以后介绍同调论时，最麻烦的不变性问题(或单纯同调与奇异同调的自然等价问题)实质上已提前在此通过了关键的步骤. 本章最后一些应用举例，也是很精彩的.

原书的第1章之前，还有一个引言，介绍本书所需要的集合论等有关概念，结论和记号约定. 除了模以外，前三章都有用. 由于篇幅不多，为保持完整性，全文都照译了. 另外，补了几本重要的中文参考书.

作者在前言中开宗明义地指出：“本书特别强调自然性的地位，故可恰当地称之为*函子式拓扑学*.”换言之，本书以函子的语言处理所有的重要问题，概念，结论和方法，形成本书的一大特色，也是它的突出的优点. 国内迄今出版的代数拓扑的书，包括译著在内，还都没有这样写的. 这样的处理，比之传统的处理具有很大的优越性. 因此无论本科生还是研究生，学习代数拓扑都宜采取这个“*函子式*”的体系.

原书每章后附有许多习题. 作者在前言中指出：“这些习题被分成一些组，每组致力于单个的专题或少量彼此有关系的专题. 除去个别例外，正文中不会引用它们. 习题分几种类型. 一种是该章中研究的一般理论的例子；一种是处理以后将讨论的一般课题的特殊情况；还有一种是提供在所有课文中未讨论到的课题. 既

有常规的习题，又有较困难的习题，后者常常附有提示，告诉读者怎样着手．也有时把一个与课文素材有关的课题放在一组习题中来展开讨论．”

每章配备了若干组内容丰富、难易结合的习题，成为原书的又一特色．迄今见到的国内外代数拓扑的教科书，很少有能与之媲美的．这里也体现了作者的匠心．如果学生能够结合学习而基本作完这些习题，便具备了很好的代数拓扑的基础了．

对于原书上一些明显的排印错误，译成中文已予以改正．对于一些作者的疏忽之处，如使用了未给出的概念和记号以及某些误用的记号等等，都加了译注，按译者的理解给以解释．这些理解不见得恰当，尚希读者批评指正．

左再思

1986 年于华南师范大学

目　录

引言 ……1

§1　集合论 ……1

§2　一般拓扑 ……4

§3　群论 ……7

§4　模 ……8

§5　欧氏空间 ……11

第1章　同伦和基本群 ……14

§1　范畴 ……14

§2　函子 ……20

§3　同伦 ……25

§4　收缩和形变 ……31

§5　H 空间 ……39

§6　同纬映象 ……45

§7　基本广群 ……52

§8　基本群 ……57

第1章习题 ……65

第2章　覆叠空间和纤维化 ……69

§1　覆叠投射 ……69

§2　同伦升腾性质 ……73

§3　与基本群的关系 ……79

§4　升腾问题 ……84

§5　覆叠投射的分类 ……90

§6　覆叠变换 ……97

§7　纤维丛 ……103

§8　纤维化 ……112

第2章习题 ……121

第3章　多面体 ……124

§1　单纯复形 ……125

§2　单纯复形中的线性性质 ……132

§3　重分 ……140

§4　单纯逼近 ……148

§5　邻接类 ……152

§6　棱道广群 ……158

§7　图 ……163

§8　例子和应用 ……169

第3章习题 ……177

索引 ……182

引　言

我们假定本书的读者对于集合论、一般拓扑和代数的初步概念已有所了解. 下面是本书中应用到的这些领域中的一些概念和结果的简单摘要. 这些内容所以如此明确列出，或则由于它们不是已经规范化了的，或则由于它们在以后的课文中有着特别的重要性.

§1 集　合　论[*)]

术语"集合"、"族"和"聚集"同义；术语"类"则留给不假定是集合的总汇(例如，所有集合的类). 若 X 为一集合，$P(x)$为对每个元素 $x\in X$ 的一个判断，或为真，或为假，则以

$$\{x\in X\,|\,P(x)\}$$

记使 $P(x)$ 为真的那些 x 组成的 X 的子集.

若 $J=\{j\}$ 是一集合，且 $\{A_j\}$ 为一指标取在 J 的集合族，则它们的并集记为 $\cup A_j$ (或记为 $\bigcup_{j\in J}A_j$)，它们的交集记为 $\cap A_j$ (或 $\bigcap_{j\in J}A_j$)，它们的笛卡儿积记为 $\times A_j$ (或 $\times_{j\in J}A_j$)，它们的集合和(或称它们的分离并)记为 $\vee A_j$ (或 $\bigvee_{j\in J}A_j$)，由 $\vee A_j=\cup(j\times A_j)$定义. 在 $J=\{1, 2, \cdots, n\}$ 的情况下，我们也用记号 $A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_n$, $A_1\cap A_2\cap\cdots\cap A_n$, $A_1\times A_2\times\cdots\times A_n$ 及 $A_1\vee A_2\vee\cdots\vee A_n$ 分别表示并，交，笛卡儿积及集合和.

从 A 到 B 的一个函数(或映射)记为f: $A\to B$. 从 A 到 B 的所有函数的集合记为 B^A. 若 $A'\subset A$，则存在一包含映射

*) 作为一般参考书，可看 P. R. Halmos, "*Naive Set Theory*", D. Van Nostrand Company, Inc., Princeton, N. J., 1960. ——原注

i: $A'\to A$，且以记号 i: $A'\subset A$ 表示 A' 是 A 的子集，并且 i 是包含映射．从一集合 A 到自身的包含映射称作 A 的恒同映射，记为 1_A．若 $J'\subset J$，则有一包含映射

$$i_{J'}\colon \bigvee_{j\in J'} A_j \subset \bigvee_{j\in J} A_j.$$

在一集合 A 中的一个等价关系，是 A 的元素之间的一个关系$\sim$，它是自反的（亦即，对所有 $a\in A$，有 $a\sim a$），对称的（亦即，对 a、$a'\in A$，$a\sim a'$ 蕴涵 $a'\sim a$），传递的（亦即，对 a，a'，$a''\in A$，$a\sim a'$ 和 $a'\sim a''$ 蕴涵 $a\sim a''$）．$a\in A$ 关于关系$\sim$的等价类是子集 $\{a'\in A\,|\,a\sim a'\}$．A 的元素关于$\sim$的所有等价类的集合记为 $A/\sim$，称为 A 的商集．存在投射 $A\to A/\sim$，把 $a\in A$ 变到它的等价类．若 J' 为 J 的子集，则也有一个投射

$$p_{J'}\colon \bigtimes_{j\in J} A_j \to \bigtimes_{j\in J'} A_j$$

（是为上述意义下的投射）．

给定函数 f: $A\to B$ 和 g: $B\to C$，它们的合成 $g\circ f$（也记为 gf）是从 A 到 C 的一个函数，由 $(g\circ f)(a)=g(f(a))$ $(a\in A)$ 所定义．若 $A'\subset A$，及 f: $A\to B$，f 在 A' 上的限制是指函数 $f|A'$: $A'\to B$，由 $(f|A')(a')=f(a')$ $(a'\in A')$ 所定义．（这样，$f|A'=f\circ i$，其中 i: $A'\subset A$），且函数 f 称为 $f|A'$ 到 A 的扩充．

一个单映（或称单函数）是一个函数 f: $A\to B$，满足 $f(a_1)=f(a_2)$ 蕴涵 $a_1=a_2$，对 a_1、$a_2\in A$．一个满映（或称满函数）是一个函数 f: $A\to B$，使得 $b\in B$ 蕴涵存在 $a\in A$ 使 $f(a)=b$．一个双映（或称双函数，或称一一对应）是既为单映又为满映的函数．

在一集合 A 内的一个偏序是 A 的元素间的一个关系 $\leqslant$，它是自反的和传递的（注意这里未假定 $a\leqslant a'$ 和 $a'\leqslant a$ 蕴涵 $a=a'$[*)]）．A 内的一个全序（或称单序）是 A 内的一个偏序，使对 a、$a'\in A$，总有 $a\leqslant a'$ 或 $a'\leqslant a$；且它是反称的（即 $a\leqslant a'$ 和 $a'\leqslant a$ 蕴涵 $a=a'$）．一个偏序集是一个带有偏序的集合，一个全序集是一个带有全序

*) 有些文献中偏序的定义是假定这个条件的．读者在查阅有关结论时宜注意此区别．——译注

的集合.

1. **Zorn 引理** 一个偏序集中，若任一全序子集有上界，则此偏序集包含极大元素.

一个顺向集 Λ 是一个带有偏序 $\leqslant$ 的集合，使得对 α、$\beta\in\Lambda$，存在 $\gamma\in\Lambda$，使 $\alpha\leqslant\gamma$ 和 $\beta\leqslant\gamma$. 集合的一个顺向体系 $\{A^\alpha, f_\alpha^\beta\}$ 以下述方式组成，即：一族集合 $\{A^\alpha\}$，其指标取于一个顺向集 $\Lambda=\{\alpha\}$，以及一族函数 f_α^β: $A^\alpha\to A^\beta$，对每一对 $\alpha\leqslant\beta$，使得

(a) $f_\alpha^\alpha=1_{A^\alpha}$: $A^\alpha\subset A^\alpha$，对所有 $\alpha\in\Lambda$;

(b) $f_\alpha^\gamma=f_\beta^\gamma\circ f_\alpha^\beta$: $A^\alpha\to A^\gamma$，对 Λ 中的 $\alpha\leqslant\beta\leqslant\gamma$.

顺向体系的顺向极限记为 $\lim_\to\{A^\alpha\}$，是 $\vee A^\alpha$ 的等价类的集合，其等价关系 $a^\alpha\sim a^\beta$ 为：若有 γ 使 $\alpha\leqslant\gamma$ 及 $\beta\leqslant\gamma$，则 $f_\alpha^\gamma a^\alpha=f_\beta^\gamma a^\beta$. 对每个 α，存在一个映射 i_α: $A^\alpha\to\lim_\to\{A^\alpha\}$，且若 $\alpha\leqslant\beta$，则 $i_\alpha=i_\beta\circ f_\alpha^\beta$.

2. 给定一个集合的顺向体系 $\{A^\alpha, f_\alpha^\beta\}$，且给定一个集合 B，及对每个 $\alpha\in\Lambda$，给定一个函数 g_α: $A^\alpha\to B$，使 $g_\alpha=g_\beta\circ f_\alpha^\beta$，若 $\alpha\leqslant\beta$. 则存在唯一映射 g: $\lim_\to\{A^\alpha\}\to B$，使对所有 $\alpha\in\Lambda$，$g\circ i_\alpha=g_\alpha$.

3. 在定理 2 所用的同样记号下，映射 g 是双映，当且仅当下列两条成立:

(a) $B=\bigcup g_\alpha(A^\alpha)$;

(b) $g_\alpha(a^\alpha)=g_\beta(a^\beta)$ 当且仅当存在 γ，使 $\alpha\leqslant\gamma$，$\beta\leqslant\gamma$，$f_\alpha^\gamma(a^\alpha)=f_\beta^\gamma(a^\beta)$.

设 $\{A_j\}$ 是指标取于 $J=\{j\}$ 的集合族. 设 Λ 是 J 的有限子集族，且定义 $\alpha\leqslant\beta$，对于 α, $\beta\in\Lambda$，由 $\alpha\subset\beta$，则 Λ 是一顺向集，且存在一顺向体系 $\{A^\alpha\}$ 由 $A^\alpha=\bigvee_{j\in\alpha}A_j$ 定义；并且，若 $\alpha\leqslant\beta$，则令 f_α^β: $A^\alpha\to A^\beta$ 是包含映射. 记 g_α: $A^\alpha\to\bigvee_{j\in J}A_j$ 为包含映射.

4. 在上述记号下，存在一个双映

$$g:\ \lim_\to\{A^\alpha\}\to\bigvee_{j\in J}A_j,$$

使 $g\circ i_\alpha=g_\alpha$（亦即，任意集合和是其有限部分集合和的顺向极限）.

一个集合的逆向体系 $\{A_\alpha, f_\alpha^\beta\}$ 以下述方式组成，即：一个指标

取于顺向集合 $\Lambda=\{\alpha\}$ 的集合族 $\{A_\alpha\}$, 及一函数族 f_α^β: $A_\beta\to A_\alpha$ 对 $\alpha\leqslant\beta$, 使得:

(a) $f_\alpha^\alpha=1_{A_\alpha}$: $A_\alpha\subset A_\alpha$ 对 $\alpha\in\Lambda$;

(b) $f_\alpha^\gamma=f_\alpha^\beta\circ f_\beta^\gamma$: $A_\gamma\to A_\alpha$ 对 $\alpha\leqslant\beta\leqslant\gamma\in\Lambda$.

逆向体系的逆向极限记为 $\lim_{\leftarrow}\{A_\alpha\}$, 是 $\times A_\alpha$ 的子集, 由所有如下所述的点(a_α)组成, 即: 若 $\alpha\leqslant\beta$, 则 $a_\alpha=f_\alpha^\beta a_\beta$. 对每个 α, 存在映射 p_α: $\lim_{\leftarrow}\{A_\alpha\}\to A_\alpha$, 且若 $\alpha\leqslant\beta$, 则 $p_\alpha=f_\alpha^\beta\circ p_\beta$.

5. 给定一个集合的逆向体系 $\{A_\alpha, f_\alpha^\beta\}$, 并给定一个集合 B 和对任一 $\alpha\in\Lambda$ 的一个函数 g_α: $B\to A_\alpha$ 使 $g_\alpha=f_\alpha^\beta\circ g_\beta$, 若 $\alpha\leqslant\beta$. 则存在唯一的函数 g: $B\to\lim_{\leftarrow}\{A_\alpha\}$ 使对所有的 $\alpha\in\Lambda$, $g_\alpha=p_\alpha\circ g$.

6. 在定理5的相同记号下, 映射 g 是双映, 当且仅当下列两条件成立:

(a) $g_\alpha(b)=g_\alpha(b')$ 对所有 $\alpha\in\Lambda$, 蕴涵 $b=b'$;

(b) 给定$(a_\alpha)\in\times A_\alpha$, 使 $a_\alpha=f_\alpha^\beta a_\beta$ (若 $\alpha\leqslant\beta$), 则存在 $b\in B$, 使对所有的 $\alpha\in\Lambda$, $g_\alpha(b)=a_\alpha$.

设 $\{A^j\}$ 是一指标取于 $J=\{j\}$ 的集合族. 设 Λ 是 J 的有限非空子集族, 且定义对 α, $\beta\in\Lambda$, $\alpha\leqslant\beta$, 若 $\alpha\subset\beta$, 则 Λ 是一顺向集合, 且存在一个逆向体系 $\{A_\alpha\}$, 由 $A_\alpha=\times_{j\in\alpha}A^j$ 定义, 并且若 $\alpha\leqslant\beta$, 则 f_α^β: $A_\beta\to A_\alpha$ 是投射, 对每个$\alpha\in\Lambda$. 令 g_α: $\times_{j\in J}A^j\to A_\alpha$ 为投射.

7. 在上述记号下, 存在双映 g: $\times_{j\in J}A^j\to\lim_{\leftarrow}\{A_\alpha\}$, 使 $g_\alpha=p_\alpha\circ g$(亦即, 任意笛卡儿积是其有限的部分笛卡儿积的逆向极限).

§2 一般拓扑[*]

一个拓扑空间也简称为一个空间, 除非明确说明, 我们并不假

[*] 作为一般的参考书见 J. L. Kelley: *General Topology*, D. Van Nostrand Company, Inc., Princeton, N. J., 1955 和 S. T. Hu: *Elements of General Topology*, Holden-Day, Inc. San Francisco, 1964.——原注

定它满足任何可分离性的公设. 但对于拟紧致的, 正规的和正则空间, 我们始终假定都是 Hausdorff 空间. 从一拓扑空间到另一个的连续映射也被简称为映射.

给定一个集合 X 和一族拓扑空间 $\{X_j\}_{j\in J}$ 及函数 f_j: $X\to X_j$, 在 X 上由函数 $\{f_j\}$ 诱导的拓扑是使每个 f_j 都连续的最小的或称最粗的拓扑.

1. 在 X 上由函数 $\{f_j: X\to X_j\}$ 诱导的拓扑由下述性质所示性: 若 Y 是一拓扑空间, 则函数 g: $Y\to X$ 是连续的, 当且仅当 $f_j\circ g$: $Y\to X_j$ 对每个 $j\in J$ 都连续.

拓扑空间 X 的子空间是 X 的一子集 A, 其拓扑由包含映射 $A\subset X$ 诱导. 拓扑空间 X 的离散子集是 X 的一个子集, 它的每个子集在 X 中都是闭子集. 带指标的拓扑空间族 $\{X_j\}_{j\in J}$ 的拓扑积是笛卡儿积 $\times X_j$, 其拓扑由投射 p_j: $\times X\to X_j$, 对每个 $j\in J$ 诱导出. 若 $\{X_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$ 是一个拓扑空间的逆向体系(即 X_α 对每个 $\alpha\in\Lambda$ 皆为拓扑空间, 且 f_α^β: $X_\beta\to X_\alpha$ 是连续的, 对 $\alpha\leqslant\beta$), 其逆向极限 $\lim_{\leftarrow}\{X_\alpha\}$ 由函数 $\{p_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$ 诱导出拓扑, 其中

$$p_\alpha\text{: } \lim_{\leftarrow}\{X_\alpha\}\to X_\alpha\quad(\alpha\in\Lambda).$$

给定一个集合 X 和带指标的拓扑空间族 $\{X_j\}_{j\in J}$ 以及函数 g_j: $X_j\to X$ $(j\in J)$. 在 X 上由函数 $\{g_j\}$ 上诱导的拓扑是使每个 g_j 为连续的最大的或称最细的拓扑.

2. 在 X 上由函数 $\{g_j: X_j\to X\}$ 上诱导的拓扑由下述性质所示性: 若 Y 是任一拓扑空间, 则函数 f: $X\to Y$ 连续, 当且仅当 $f\circ g_j$: $X_j\to Y$ 对每个 $j\in J$ 都连续.

拓扑空间 X 的商空间是 X 的一个商集 X', 其拓扑由投射 $X\to X'$ 上诱导出. 若 $A\subset X$, 则 X/A 记 X 的商空间, 它由将整个 A 等同为一个点而得到. 带指标的拓扑空间族 $\{X_j\}_{j\in J}$ 的拓扑和为集合和 $\vee X_j$, 其拓扑由单映 i_j: $X_j\to\vee X_j$ $(j\in J)$ 上诱导出. 若 $\{X^\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$ 是拓扑空间的顺向体系(亦即 X_α 都是拓扑空间 $(\alpha\in\Lambda)$, 且 f_α^β: $X^\alpha\to X^\beta$ 都是连续的, $\alpha\leqslant\beta$), 其顺向极限 $\lim_{\rightarrow}\{X^\alpha\}$ 由函数 $\{i_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$ 上诱导出拓扑, 其中,

$$i_\alpha: X^\alpha \to \lim_{\to}\{X^\alpha\},\ \alpha\in\Lambda.$$

设 $\mathscr{A}=\{A\}$ 是拓扑空间 X 的子集族. X 称作具有对 $\mathscr{A}$ 的上凝聚拓扑，若 X 上的拓扑由子空间 $\{A\}$ 的包含映射 $\{A\subset X\}$ 上诱导出.（在一些文献上这种拓扑常被称为关于 $\mathscr{A}$ 的弱拓扑.）

3. X 具有对 $\mathscr{A}$ 的上凝聚拓扑的充分必要条件是：X 的子集 B 在 X 中是闭的(或开的)，当且仅当 $B\cap A$ 在子空间 $A(A\in\mathscr{A})$ 中是闭的(或者相应地是开的).

4. 若 $\mathscr{A}$ 是 X 的任一开覆盖或局部有限闭覆盖，则 X 具有对 $\mathscr{A}$ 的上凝聚拓扑.

5. 设 X 是一个集合，$\{A_j\}$ 是个带指标的拓扑空间族，每个 A_j 都是 X 的子集. 设对每个 j 和 j'，$A_j\cap A_{j'}$ 是 A_j 及 $A_{j'}$ 中的闭(或开)子集，并且 $A_j\cap A_{j'}$ 从 A_j 诱导的拓扑等于它从 $A_{j'}$ 诱导的拓扑. 则在 X 上由包含映射 $\{A_j\subset X\}$ 上诱导的拓扑，被下述性质所示性：对每个 j，A_j 是 X 的闭(或开)子空间，且 X 具有对族 $\{A_j\}$ 的上凝聚拓扑.

定理5中 X 上的拓扑被称作是对 $\{A_j\}$ 的上凝聚拓扑.

一个紧致生成的空间是个 Hausdorff 空间，具有对其紧致子集族的上凝聚拓扑.（有些文献中又叫作 Hausdorff k-空间.）

6. 一个 Hausdorff 空间是局部紧致的或满足第一可数性公设，是紧致生成的.

7. 若 X 是紧致生成的，Y 是局部紧致的 Hausdorff 空间，则 $X\times Y$ 是紧致生成的.

若 X 和 Y 是拓扑空间，且 $A\subset X$ 及 $B\subset Y$，则以 $\langle A;B\rangle$ 记所有满足 $f(A)\subset B$ 的连续函数 f: $X\to Y$ 的集合. 以 Y^X 记从 X 到 Y 的所有连续函数组成的空间，其拓扑由子基 $\{\langle K;U\rangle\}$ 生成，这里 K 是 X 的紧致子集，U 是 Y 的开子集. 这个拓扑叫作紧致开拓扑. 若 $A\subset X$ 及 $B\subset Y$，我们用 $(Y,B)^{(X,A)}$ 记 Y^X 的子空间，由所有满足 $f(A)\subset B$ 的连续函数组成. 记 E: $Y^X\times X\to Y$ 为赋值映射，由 $E(f,x)=f(x)$ 定义. 给定函数 g: $Z\to Y^X$，则合成映射

$$Z\times X \xrightarrow{g\times 1} Y^X\times X \xrightarrow{E} Y$$

是从 $Z\times X$ 到 Y 的一个函数.

8. 指数对应定理 若 X 是局部紧致的 Hausdorff 空间, Y 和 Z 是拓扑空间, 则一映射 g: $Z\to Y^X$ 是连续的, 当且仅当 $E\circ(g\times 1)$: $Z\times X\to Y$ 是连续的.

9. 指数法则 若 X 是局部紧致的 Hausdorff 空间, Y 是拓扑空间, 则由 $\psi(g)=E\circ(g\times 1)$ 定义的函数 ψ: $(Y^X)^Z\to Y^{Z\times X}$ 是一个同胚.

10. 若 X 是一个紧致的 Hausdorff 空间, Y 是度量为 d 的度量空间, 则 Y^X 可由度量 d' 作成度量空间, 其中 d' 由

$$d'(f,\ g)=\sup\{d(f(x),\ g(x))\,|\,x\in X\}$$

定义.

§3 群 论

一个同态若分别是单映, 满映, 双映, 则分别称为单同态, 满同态, 同构. 若 $\{G_j\}_{j\in J}$ 是带指标的群族, 则其直积为一个群, 在笛卡儿积 $\times G_j$ 上, 由 $(g_j)(g'_j)=(g_jg'_j)$ 定义群的构造. 若 $\{G_\alpha\}$ 是群的一个逆向体系(即对每个 α, G_α 是个群, 且 f_α^β: $G_\beta\to G_\alpha$ 是同态, $\alpha\leqslant\beta$), 其逆向极限(做为集合的逆向极限) $\lim_{\leftarrow}\{G_\alpha\}$ 是 $\times G_\alpha$ 的一个子群.

设 A 是群 G 的子集. G 叫做由 A 自由生成的, 且 A 叫做 G 的自由生成集或 G 的自由基, 如果给定任意函数 f: $A\to H$, 其中 H 为一群, 则存在唯一同态 φ: $G\to H$ 是 f 的一个扩充. 一个群称为自由的, 若它是由某子集所自由生成的. 对任意集合 A, 由 A 生成的自由群是一个群 $F(A)$, 它包含 A 做为其自由生成集. 这样的群 $F(A)$ 存在, 且任意两个是典型同构的.

1. 任一群同构于一自由群的商群.

群 G 的一个显示由生成元集合 A, 关系集合 $B\subset F(A)$, 以及函数 f: $A\to G$ 组成, 且要求其扩充所成的同态 φ: $F(A)\to G$ 是

个满同态，其核是 $F(A)$ 的由 B 生成的正规子群. 若 A 和 B 是两个有限集合，则此显示称为有限的，且 G 称作是有限显示的。

§4 模[*)][**)]

我们主要有兴趣的 R 模是 R 为主理想环的. 不过，我们将从 R 模的某些性质入手，其中 R 是个带单位的交换环，此单位作用在每个所考虑的模上是恒同的. 若 φ: $A\to B$ 是 R 模的同态，则有 R 模

$$\ker\varphi=\{a\in A\,|\,\varphi(a)=0\}\subset A$$
$$\operatorname{im}\varphi=\{b\in B\,|\,b=\varphi(a),\ \text{对某些 } a\in A\}\subset B$$
$$\operatorname{coker}\varphi=B/\operatorname{im}\varphi.$$

1. Noether 同构定理 设 A 和 B 是模 C 的子模，且设 $A+B$ 是 C 中由 $A\cup B$ 生成的子模. 包含映射 $A\subset A+B$ 变 $A\cap B$ 到 B 内，且诱导 $A/(A\cap B)$ 同构于 $(A+B)/B$.

若 $\{A_j\}_{j\in J}$ 是带指标的 R 模族，则其直积 $\times A_j$ 是个 R 模，且其直和 $\oplus A_j$ 也是一个 R 模（$\oplus A_j$ 是 $\times A_j$ 的子模，由仅有有限个坐标非 0 的元素组成）. R 模（以及同态 f_α^β: $A_\beta\to A_\alpha$, $\alpha\leqslant\beta$）的逆向体系 $\{A_\alpha\}$ 的逆向极限 $\lim_{\leftarrow}\{A_\alpha\}$ 是个 R 模; R 模（及同态）的顺向体系的顺向极限也是 R 模.

2. 任一 R 模同构于其有限生成的子模（及其包含映射）的顺向体系的顺向极限.

若 A 和 B 是 R 模，其张量积 $A\otimes B$（亦写作 $A\underset{R}{\otimes}B$）是个 R 模. 对于 $a\in A$ 和 $b\in B$，存在一个对应的元素 $a\otimes b\in A\otimes B$. $A\otimes B$ 由元素 $\{a\otimes b\,|\,a\in A,\ b\in B\}$ 生成，且对于 a, $a'\in A$,

---

*) 作为一般参考书，可看 H. Cartan 和 S. Eilenberg, *Homological Algebra*, Princeton University Press, N. J., 1956 及 S. MacLane, *Homology*, Springer-Verlag OHG, Berlin, 1963. ——原注

**) 本节内容仅应用于第 3 章以后，作为只阅读这个节译本的读者，可略去不读. ——译注

b, $b'\in B$, r, $r'\in R$, 有关系

$$(ra+r'a')\otimes b=r(a\otimes b)+r'(a'\otimes b),$$
$$a\otimes(rb+r'b')=r(a\otimes b)+r'(a\otimes b')$$

成立。

在 A 或 B 又是 R' 模的情况下, $A\underset{R}{\otimes}B$ 也是 R' 模。

3. 对任一 R 模 A, 由 $a\to a\otimes 1$ 和 $a\to 1\otimes a$ 定义的两个同态, 是 A 到 $A\otimes R$ 和 $R\otimes A$ 的两个同构.

4. 对于 R 模 A 和 B, 存在 $A\otimes B$ 到 $B\otimes A$ 的同构, 将 $a\otimes b$ 变为 $b\otimes a$。

5. 若 A 和 B 是 R 模, B 和 C 是 R' 模, 则存在 $(A\underset{R}{\otimes}B)\underset{R'}{\otimes}C$ 到 $A\underset{R}{\otimes}(B\underset{R'}{\otimes}C)$ 的同构, 变 $(a\otimes b)\otimes c$ 为 $a\otimes(b\otimes c)$ (两者皆被视为既是 R 模又是 R' 模)。

若 A 和 B 是 R 模, 其同态模 $\mathrm{Hom}(A,B)$ [也写为 $\mathrm{Hom}_R(A,B)$] 是以 R 同态 $A\to B$ 为元素的 R 模. 在 A 或 B 也是 R' 模的情况下, $\mathrm{Hom}_R(A, B)$ 也是个 R' 模.

6. 若 A 和 B 是 R 模, B 和 C 是 R' 模, 则存在 $\mathrm{Hom}_{R'}(A\underset{R}{\otimes}B, C)$ 到 $\mathrm{Hom}_R(A, \mathrm{Hom}_{R'}(B, C))$ 的同构 (两者皆既视为 R 模又视为 R' 模), 将 R' 同态 φ: $A\underset{R}{\otimes}B\to C$ 变为 R 同态

$$\varphi'\colon A\to\mathrm{Hom}_{R'}(B, C),$$

由 $\varphi'(a)(b)=\varphi(a\otimes b)$ 给出 $(a\in A,\ b\in B)$。

R 模 A 的子集 S 称为 A 的基(且 A 称为由 S 自由生成的), 如果任意函数 f: $S\to B$, 其中 B 是一 R 模, 容许唯一地扩充为同态 φ: $A\to B$. 若一模有基, 则称它为自由模. 对于任一集合 S, 由 S 生成的自由模记为 $F_R(S)$, 是从 S 到 R 的所有有限非 0 函数的模(其加法和数乘以显然的方式定义), 且将 $s\in S$ 等同于其特征函数. $F_R(S)$ 包含 S 作为其基, 且任意以 S 为基的模典型地同构于 $F_R(S)$。

7. 任一 R 模同构于一自由 R 模之商。